

ОБЩИНА ВАРНА
ИКОНОМИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА
КАТЕДРА „СТАТИСТИКА И ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА“

МЛАДЕЖКА ИНИЦИАТИВА
"ОЛИМПИАДА ПО ФИНАНСОВА
МАТЕМАТИКА ЗА СТУДЕНТИ"

Условия и решения на задачите от състезателната тема

5 ноември 2022 г.

Младежката инициатива "Олимпиада по финансова математика" се осъществява от катедра "Статистика и приложна математика" при Икономически университет – Варна със съдействието на сектор "Управление на проекти" към университета и финансовата подкрепа на Дирекция „Образование и младежки дейности“ при Община Варна.

Екип за организация и изпълнение на проекта:

1. Проф. д-р Росен Николаев – ръководител на проекта
2. Доц. д-р Танка Милкова
3. Гл. ас. д-р Йордан Петков
4. Гл. ас. д-р Велина Йорданова
5. Гл. ас. д-р Деян Михайлов
6. Гл. ас. д-р Димитрия Карадимова
7. Галина Андреева - счетоводител

Комисия за проверка на задачите и класиране на участниците:

1. Проф. д-р Росен Николаев – председател
2. Доц. д-р Танка Милкова
3. Гл. ас. д-р Йордан Петков

СЪСТЕЗАТЕЛНА ТЕМА

За верен отговор на всяка задача с номер от 1 до 5 се присъждат 3 точки, на задача 6 трябва да се даде само отговор и ако той е верен, се оценява с 5 точки, а задача 7 е с подробно описание на решението и се оценява от 0 до 10 точки. Разрешено е ползването само на калкулатори.

Време за работа: 120 мин. Пожелаваме Ви успех!

Задача 1: Сумата от цените на четири стоки А, В, С и D е 1040 лв. Цената на стоката А е 70% от цената на стоката В. Цената на стоката С е $\frac{4}{3}$ от цената на стоката А и цената на стоката D е с 50 лв. по-малка от цената на стоката В. Цената на стоката С е:

A) 210 лв.; B) 250 лв.; C) 280 лв.; D) 300 лв.; E) 320 лв.

Задача 2: На 5-ти март цената на 1 кг. сирене е 8 лв., а на 1 л. олио е 2 лв. На 5-ти април цената на 1 кг. сирене е намаляла с 25% спрямо цената на 5-ти март, а цената на 1 л. олио се е увеличила с 50% спрямо цената на 5-ти март. С колко процента разликата между цените на сиренето и олиото на 5-ти март е по-висока от разликата между цените на сиренето и олиото на 5-ти април?

A) 25%; B) 50%; C) 75%; D) 100%; E) друг отговор.

Задача 3: Общият месечен доход на едно домакинство за м. февруари, 2022 г. е 2500 лв. От тази сума 30% са разходите за ток, вода и телефон, 40% са разходите за храна, 500 лв. са разходите за дрехи и други. Останалата сума се спестява. През м. октомври, 2022 г. месечният доход на домакинството се е увеличил с 10% спрямо този през м. февруари. Храната е поскъпнала с 20% спрямо м. февруари, разходите за ток, вода и телефон са се увеличили с 30% спрямо м. февруари, разходите за дрехи и други са се увеличили с 15% спрямо м. февруари. Каква сума е останала за спестяване на това домакинство през м. октомври, 2022 г.?

A) 200 лв.; B) 150 лв.; C) 50 лв.; D) 0 лв.; E) друг отговор.

Задача 4: Предприемач има възможност да инвестира в един от два възможни проекта. В първия може да инвестира 80000 лв. и след 2 год. ще получи 87000 лв. Във втория може да инвестира 50000 лв., като след една година ще получи 40000 лв. и след още една година ще получи 13000 лв. Разликата по абсолютна стойност между процентите на вътрешните норми на възвръщаемост в двата проекта е в интервала:

A) [0; 0,2); B) [0,2; 0,4); C) [0,4; 0,6); D) [2; 4); E) [4; 6].

Задача 5: Сума от 2000 лв. е поставена на безсрочен влог при просто олихвяване и лихвен процент 0,36%. След три месеца са изтеглени 200 лв. и след още четири месеца са внесени 500 лв. по сметката. След края на шестия месец от откриването на влога лихвеният процент е променен на 0,48%. След изтичане на една година от откриването на влога е извършено олихвяване и е изтеглена цялата налична сума, заедно с лихвите. Какъв е нейният размер?

А) 2300 лв.; В) 2312,2 лв.; С) 2308,74; D) 2208 лв.; E) 2408,74 лв.

Задача 6: При формиране на нетното трудово възнаграждение върху brutното трудово възнаграждение се удържат осигуровки и данък общ доход (ДОД) и така се получава чистата сума. Ако brutното възнаграждение е 3200 лв., 10% е ДОД и 17% са осигуровките, и приемем, че не се удържат осигуровки върху данъка и не се удържа данък върху осигуровките, то колко е чистата сума за получаване след удържане на ДОД и осигуровките?

Задача 7: Цената на един нов автомобил е 50000лв. При заплащане на лизинг условията са следните:

- 1) 20% от цената се заплаща веднага при сключване на договора.
- 2) 20% от цената се заплаща след 36 месеца от закупуването на автомобила.
- 3) 20% от цената се заплаща след 60 месеца от закупуването на автомобила.
- 4) Останалата сума, заедно с всички дължими лихви за всеки месец, се заплащат на 60 равни вноски в края на всеки месец след сключване на договора в продължение на 5 години.

Ако месечният сложно лихвен процент по лизинга е 0,21%, то да се намери размерът на постоянната вноска в цяло число лева.

Обяснения към темата

1. $p\%$ от K е $\frac{p}{100} \cdot K$.
2. Проста лихва за n периода върху сума K , при $p\%$ лихвен процент за един период е $L = K \cdot \frac{p}{100} \cdot n$.
3. Сума K за n периода, при $p\%$ лихвен процент за един период, нараства на $K_n = K \left(1 + \frac{p}{100} n \right)$ - при просто олихвяване,
 $K_n = K \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$ - при сложно олихвяване.
4. Брутно трудово възнаграждение = нетно (чисто) трудово възнаграждение + ДОД + осигуровки.

5. Ако стойността на една инвестиция е P_0 , а FV_1, FV_2, \dots, FV_n са суми в бъдещ паричен поток, то неизвестното r^* , което се получава от уравнението
$$\sum_{i=1}^n \frac{FV_i}{(1+r^*)^i} = P_0,$$
 се нарича вътрешна норма на възвръщаемост, а $p = 100 \cdot r^*$ е вътрешната норма на възвръщаемост, изразена в проценти.
6. Ако сума K е дължима след n периода при сложно олихвяване с $p\%$ за един период, то сегашната ѝ стойност е
$$\frac{K}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n},$$
 т.е. бъдещата сума се дисконтира.
7. Ако a_1, a_2, \dots, a_n са членове на геометрична прогресия с частно q , то сумата от членовете е
$$S = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6
С	D	D	С	С	2431,74 лв.

Задача 1: Отг. С)

Решение:

Нека цената на стоката В е $P_B = x$. Тогава $P_A = 0,7x$, $P_C = \frac{4}{3} \cdot 0,7x$, $P_D = x - 50$.

Следователно $x + 0,7x + \frac{4}{3} \cdot 0,7x + x - 50 = 1040 \Rightarrow x \left(1 + \frac{7}{10} + \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{10} + 1 \right) = 1090$

$\Rightarrow x(60 + 21 + 28) = 1090 \cdot 30 \Rightarrow x = 30 \cdot 1090 : 109 = 300$ лв.

Окончателно $P_C = \frac{4}{3} \cdot 0,7 \cdot 300 = 280$ лв.

Задача 2: Отг. D)

Решение:

На 5-ти март разликата в цените е $8 - 2 = 6$ лв. На 5-ти април цената на 1 кг. сирене е $8 \cdot 0,75 = 6$ лв., а на 1 л. олио е $2 \cdot 1,5 = 3$ лв., т.е. разликата в цените е $6 - 3 = 3$ лв.

Следователно:

$$\frac{6-3}{3} \cdot 100 = 100\%$$

Задача 3: Отг. D)

Решение:

Разходи	Февруари – доход 2500 лв.	Октомври – доход 2500.1,1=2750 лв.
Ток, вода, телефон	$0,3 \cdot 2500 = 750$ лв.	$1,3 \cdot 750 = 975$ лв.
Храна	$0,4 \cdot 2500 = 1000$ лв.	$1,2 \cdot 1000 = 1200$ лв.
Дрехи и други разходи	500 лв.	$1,15 \cdot 500 = 575$ лв.
Спестявания:	$2500 - (750 + 1000 + 500) = 250$ лв.	$2750 - (975 + 1200 + 575) = 0$ лв.

Задача 4: Отг. С)**Решение:**

Нека p_1 и p_2 са процентите на възвръщаемост на двата проекта. Следователно, от обясненията към темата в точка 5:

$$\frac{87}{\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)^2} = 80 \quad (1) \quad \text{и} \quad \frac{40}{1 + \frac{p_2}{100}} + \frac{13}{\left(1 + \frac{p_2}{100}\right)^2} = 50 \quad (2).$$

Полагаме $q_1 = \frac{1}{1 + \frac{p_1}{100}}$ и $q_2 = \frac{1}{1 + \frac{p_2}{100}}$.

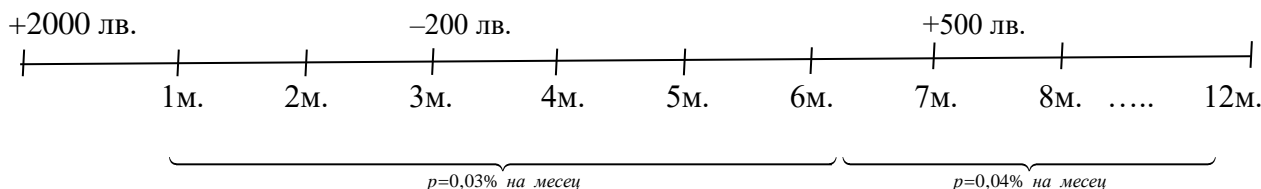
Тогава, от (1) следва $q_1^2 = \frac{80}{87} \Rightarrow q_1 = \sqrt{\frac{80}{87}} \Rightarrow 1 + \frac{p_1}{100} = \sqrt{\frac{87}{80}} \Rightarrow p_1 = \left(\sqrt{\frac{87}{80}} - 1\right) \cdot 100 \approx 4,28\%$.

От (2) следва $13q_2^2 + 40q_2 - 50 = 0 \Rightarrow q_2 = \frac{-20 + \sqrt{400 + 650}}{13} = \frac{\sqrt{1050} - 20}{13}$, т.е.

$$\frac{1}{1 + \frac{p_2}{100}} = \frac{\sqrt{1050} - 20}{13},$$

$$1 = \frac{\sqrt{1050} - 20}{13} + \frac{p_2}{100} \cdot \frac{\sqrt{1050} - 20}{13} \Rightarrow p_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{1050} - 20}{13}\right) \cdot 100 \cdot \frac{13}{\sqrt{1050} - 20} \approx 4,81\%$$

Тогава, $4,81\% - 4,28\% = 0,53\%$, $0,53 \in [0,4; 0,6)$.

Задача 5: Отг. С)**Решение:**

Основната сума по сметката в края на 12-тия месец е: $2000 - 200 + 500 = 2300$ лв.

Месечният лихвен процент до края на 6-тия месец е $p_1 = \frac{0,36}{12} = 0,03\%$, с от седмия

месец до края на годината е $p_2 = \frac{0,48}{12} = 0,04\%$.

Тогава, лихвите са:

$$L_3 = 2000 \cdot \frac{0,03}{100} \cdot 3 = 1,80 \text{ лв.}$$

$$L_6 = 1800 \cdot \frac{0,03}{100} \cdot 3 = 1,62 \text{ лв.}$$

$$L_7 = 1800 \cdot \frac{0,04}{100} \cdot 1 = 0,72 \text{ лв.}$$

$$L_{12} = 2300 \cdot \frac{0,04}{100} \cdot 5 = 4,60 \text{ лв.}$$

Общият размер на лихвите е $1,80+1,62+0,72+4,60=8,74$ лв.

Размерът на цялата изтеглена сума е $2300+8,74=2308,74$ лв.

Задача 6: Отг. 2431,74 лв.

Решение:

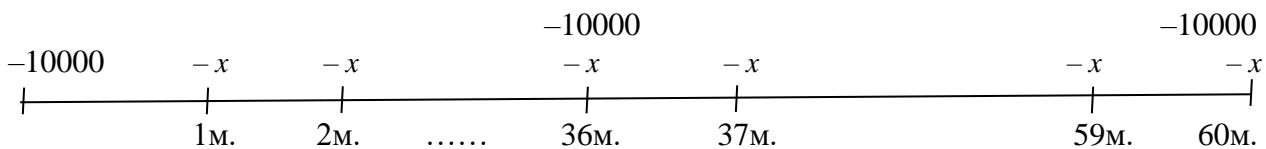
Нека размерът на осигуровките е x , а на ДОД е y . Тогава:

$$\begin{cases} y = \frac{10}{100}(3200 - x) \\ x = \frac{17}{100}(3200 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 320 - 0,1x \\ x = 544 - 0,17y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 320 - 54,4 + 0,017y \\ x = 544 - 0,17y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,983y = 265,6 \\ x = 544 - 0,17y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 270,19 \text{ лв.} \\ x = 498,07 \text{ лв.} \end{cases}$$

Тогава, чистата сума за получаване е: $3200 - 270,19 - 498,07 = 2431,74$ лв.

Задача 7: Отг. 389 лв.

Решение:



Лихвеният процент на месец е $0,21\%$ и нека $1 + \frac{0,21}{100} = 1,0021 = q$.

20% от 50000 лв. = 10000 лв., които се изплащат веднага при покупката на автомобила. Остават дължими 40000 лв.

Първи начин: Тогава $((40000q - x)q - x)q \dots - x - 10000)q - x)q \dots - x - 10000 = 0$, или, след разкриване на скобите:

$$40000q^{60} - xq^{59} - xq^{58} - \dots - xq - x - 10000q^{24} - 10000 = 0 \quad (*) \Leftrightarrow$$

$40000q^{60} - x(q^{59} + q^{58} + \dots + 1) - 10000q^{24} - 10000 = 0$ и за сумата в скобите, като използваме формулата за сума от членовете на геометрична прогресия (точка 7 от обясненията към темата), получаваме:

$$40000q^{60} - x \cdot \frac{q^{60} - 1}{q - 1} - 10000(q^{24} + 1) = 0 \Leftrightarrow 10000(4q^{60} - q^{24} - 1) = x \cdot \frac{q^{60} - 1}{q - 1} \Rightarrow$$

$$x = \frac{10000(q-1)(4q^{60} - q^{24} - 1)}{q^{60} - 1} \text{ и, като заместим } q \text{ с } 1,0021, \text{ се получава}$$

$$x = \frac{10000 \cdot 0,0021(4 \cdot 1,0021^{60} - 1,0021^{24} - 1)}{1,0021^{60} - 1} = 389,04 \Rightarrow 389 \text{ лв.}$$

Втори начин: Като използваме точка 6 от обясненията към темата и приемем, че $x, x, x, \dots, x+10000, x, x, \dots, x+10000$ са бъдещите дължими суми, то, след като ги дисконтираме, сумираме и приравним към първоначалната сума от 40000 лв., получаваме:

$$\frac{x}{q} + \frac{x}{q^2} + \dots + \frac{x+10000}{q^{36}} + \frac{x}{q^{37}} + \dots + \frac{x}{q^{59}} + \frac{x+10000}{q^{60}} = 40000.$$

След подвеждане под общ знаменател се получава уравнението (*), след което задачата се решава, както е показано при първия начин.