


**ФУНДАМЕНТАЛНАТА
ПОДГОТОВКА
ВЪВ ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ**

**Сборник с доклади
от международна научно-практическа
конференция**



**ФУНДАМЕНТАЛНАТА ПОДГОТОВКА ВЪВ ВИСШЕТО
ОБРАЗОВАНИЕ**

**THE ROLE OF FUNDAMENTAL PROGRAMS IN HIGHER
EDUCATION**

Сборник с доклади от международна научно-практическа
конференция

Conference proceeding

**ФУНДАМЕНТАЛНАТА ПОДГОТОВКА ВЪВ ВИСШЕТО
ОБРАЗОВАНИЕ**

Сборник с доклади от
международна научно-практическа конференция,
организирана от катедра „Статистика и приложна математика“
при Икономически университет - Варна

8 ноември 2024 г.

**THE ROLE OF FUNDAMENTAL PROGRAMS IN HIGHER
EDUCATION**

International Scientific-Practical Conference
Organized by department “Statistics and Applied Mathematics”,
University of Economics - Varna

8 November 2024

2024

Издателство „Наука и икономика“
Икономически университет – Варна

Публикуваните доклади не са редактирани и коригирани. Авторите носят пълна отговорност за тяхното съдържание и за грешки, допуснати по тяхна вина. Докладите са проверени за оригиналност.

Тази книга или нейните части не могат да бъдат възпроизведени или предавани под каквато и да е форма, или по какъвто и да е начин, електронен или механичен, и копирани без писменото разрешение на издателя.

The published papers have not been edited and corrected. Authors are responsible for the content of their papers and errors committed by their fault. Papers are checked for originality.

This book or its parts may not be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, and copied without the written permission of the publisher.

ISSN 2815-3863

ОРГАНИЗАЦИОНЕН КОМИТЕТ

Председател:

Доц. д-р Танка Милкова – ръководител катедра
„Статистика и приложна математика”

Членове:

Проф. д-р Росен Николаев
Доц. д-р Радан Мирянов
Доц. д-р Теодора Запрянова
Доц. д-р Маргарита Ламбова
Доц. д-р Деян Михайлов
Гл. ас. д-р Йордан Петков
Гл. ас. д-р Велина Йорданова
Гл. ас. д-р Димитрия Карадимова
Гл. ас. д-р Светлана Тодорова
Гл. ас. д-р Любомир Любенов
Гл. ас. д-р Ваня Стоянова
Гл. ас. д-р Славея Желязкова
Тижен Талиб

ORGANIZING COMMITTEE

Chair:

Assoc. Prof. Tanka Milkova, PhD – head of department “Statistics and Applied Mathematics”

Members:

Prof. Rosen Nikolaev, PhD
Assoc. Prof. Radan Miryanov, PhD
Assoc. Prof. Tanka Milkova, PhD
Assoc. Prof. Teodora Zapryanova, PhD
Assoc. Prof. Margarita Lambova, PhD
Assoc. Prof. Deyan Mihaylov, PhD
Chief Assist. Prof. Yordan Petkov, PhD
Chief Assist. Prof. Velina Yordanova, PhD
Chief Assist. Prof. Dimitria Karadimova, PhD
Chief Assist. Prof. Svetlana Todorova, PhD
Chief Assist. Prof. Lyubomir Lyubenov, PhD
Chief Assist. Prof. Vanya Stoyanova, PhD
Chief Assist. Prof. Slaveya Zhelyazkova, PhD
Tizhen Talib

НАУЧЕН СЪВЕТ

Председател:

Проф. д-р Росен Николаев

Членове:

Проф. д-р Веселин Хаджиев

Проф. д-р Владимир Сълов

Проф. д-р Юлиан Василев

Проф. д.н. Сава Гроздев

Проф. д-р Веселин Ненков

Доц. д-р Радан Мирянов

Доц. д-р Танка Милкова

Доц. д-р Маргарита Ламбова

Доц. д-р Теодора Запрянова

Доц. д-р Деян Михайлов

Проф. д.п.н. Мария Шабанова - Москва, Русия

Проф. Алекса Малчески - Скопие, Р.С.М.

Prof. Sasa Popovic - University of Montenegro

Prof. dr. Ajda Fosner - University of Primorska, Slovenia

Prof. Vijay Tandon - Universal Business School, India

Prof. Samo Bobek - University of Maribor, Slovenia

Assoc. Prof. Aleksandra Tošović-Stevanović - Faculty of Business Economics and
Entrepreneurship in Belgrade, Serbia

Lect. Bulent Duman - Balikesir University, Turkey

ADVISORY COUNCIL:

Chair:

Prof. Rosen Nikolaev, PhD

Members:

Prof. Veselin Hadzhiev, PhD

Prof. Vladimir Sulov, PhD

Prof. Yulian Vasilev, PhD

Prof. Sava Grozdev, DSc.

Prof. Veselin Nenkov, PhD

Assoc. Prof. Radan Miryanov, PhD

Assoc. Prof. Tanka Milkova, PhD

Assoc. Prof. Margarita Lambova, PhD

Assoc. Prof. Teodora Zapryanova, PhD

Assoc. Prof. Deyan Mihaylov, PhD

Prof. Maria Shabanova, D.Sc. - Moscow, Russia

Prof. Aleksa Malcheski – Skopje, Republic of North Macedonia

Prof. Sasa Popovic - University of Montenegro

Prof. dr. Ajda Fosner - University of Primorska, Slovenia

Prof. Vijay Tandon - Universal Business School, India

Prof. Samo Bobek - University of Maribor, Slovenia

Assoc. Prof. Aleksandra Tošović-Stevanović - Faculty of Business Economics and
Entrepreneurship in Belgrade, Serbia

Lect. Bulent Duman - Balikesir University, Turkey

СЪДЪРЖАНИЕ

- 1. Проф. д-р Росен Николаев, доц. д-р Танка Милкова,
доц. д-р Радан Мирянов (Икономически университет – Варна)**
ПРИЛОЖЕНИЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ
МЕТОДИ ЗА КОНСТРУИРАНЕ НА ДВУФАКТОРЕН
ИКОНОМИЧЕСКИ МОДЕЛ 11
- 2. Проф. д-р ик. н. Емил Христов**
МАТЕМАТИЧЕСКИ МЕТОДИ ЗА ЕДНОЗНАЧНИ (НЕУСЛОВНИ)
РЕШЕНИЯ НА АДИТИВНИ ФАКТОРНИ АНАЛИЗИ НА
ПРОМЕНТЕ НА ОБЕМНИ РЕЗУЛТАТИВНИ ВЕЛИЧИНИ
(ПРОДУКЦИИ) С ДВА ФАКТОРА В ИКОНОМИКАТА..... 18
- 3. Проф. д-р Сава Гроздев (Пловдивски университет „Паисий
Хилендарски”), проф. д-р Веселин Ненков (Висше
военноморско училище „Н. Й. Вапцаров”), доц. д-р Татяна
Маджарова (Висше военноморско училище „Н. Й. Вапцаров”)**
ОБРАТНА ФУНКЦИЯ И ОБРАТНИ
ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ФУНКЦИИ 38
- 4. Проф. д.п.н., Мария Шабанова (Северный (Арктический)
федеральный институт имени М.В.Ломоносова),
доц., к.п.н., Лариса Удовенко (Московский Педагогический
государственный университет, Православный Свято-
Тихоновский гуманитарный университет)**
МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ПРОБЛЕМЫ
ПРЕЕМСТВЕННОСТИ ШКОЛЬНОГО И ВУЗОВСКОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ..... 51
- 5. Проф. Александр Ястребов, д.п.н. (Ярославский гос.
педагогический университет им. К.Д. Ушинского)**
ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ИЗУЧЕНИИ НЕЕВКЛИДОВЫХ
ГЕОМЕТРИЙ В ПРОЦЕССЕ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЕЙ 61

- 6. Александр Луканкин (Российская государственная академия интеллектуальной собственности)**
ОБРАЗОВАНИЕ В XXI ВЕКЕ – ПУТИ РАЗВИТИЯ И РИСКИ..... 70
- 7. Доц. д-р Маргарита Ламбова (Икономически университет – Варна)**
КОМПЕТЕНТНОСТНИЯТ ОБРАЗОВАТЕЛЕН МОДЕЛ –
РЕВОЛЮЦИОНЕН СКОК ИЛИ СРУТВАНЕ В БЕЗДНАТА НА
БЕЗПАМЕТНОТО НЕВЕЖЕСТВО? 73
- 8. Доц. д-р Михал Стоянов (Икономически университет – Варна)**
ИЗСЛЕДВАНЕ НА ОСИГУРЕНОСТТА С ТЪРГОВСКА МРЕЖА ОТ
ОБЕКТИ ЗА ПРОДАЖБА НА ДРЕБНО НА ГОРИВА В БЪЛГАРИЯ 82
- 9. Доц. д-р Деян Михайлов (Икономически университет – Варна)**
ИЗПОЛЗВАНЕ НА АФИННИ ТРАНСФОРМАЦИИ В СРЕДАТА
НА MS EXCEL ЗА ПОВИШАВАНЕ НА МОТИВАЦИЯТА ЗА
ИЗУЧАВАНЕ НА ЕЛЕМЕНТИ ОТ ЛИНЕЙНАТА АЛГЕБРА..... 90
- 10. Гл. ас. д-р Йордан Петков, доц. д-р Радан Мирянов**
(Икономически университет – Варна)
ЕДНА ПРАКТИЧЕСКА ЗАДАЧА ПО АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ..... 97
- 11. Гл. ас. д-р Силвия Господинова (Икономически**
университет – Варна)
ПРЕДИМСТВА И НЕДОСТАТЪЦИ НА БЕТА И СИГМА
КОНВЕРГЕНТНИЯ АНАЛИЗ ПРИ ИЗСЛЕДВАНЕ НА
СТРУКТУРНАТА КОНВЕРГЕНЦИЯ НА ИКОНОМИКИТЕ 106
- 12. Гл. ас. д-р Ваня Стоянова (Икономически университет – Варна)**
„ЗАГУБЕНОТО ПОКОЛЕНИЕ“ В БЪЛГАРИЯ –
ИЗМЕНЕНИЕ И ПРОГНОЗА..... 114
- 13. Гл. ас. д-р Любомир Любенов (Икономически университет – Варна)**
ЦЕНАТА НА ПЕТРОЛА И ВЪНШНАТА ТЪРГОВИЯ НА
БЪЛГАРИЯ В КОНТЕКСТА НА ФУНДАМЕНТАЛНИТЕ
ИКОНОМИЧЕСКИ ИЗСЛЕДВАНИЯ 119

- 14. Гл. ас. д-р Светлана Тодорова (Икономически университет – Варна), Гл. ас. д-р Весела Димитрова (Университет за национално и световно стопанство – София)**
BIG DATA В ОБУЧЕНИЕТО ПО СТАТИСТИКА..... 126
- 15. Гл. ас. д-р Славей Желязкова (Икономически университет – Варна)**
ПРИЛОЖЕНИЕ НА ДИНАМИЧНОТО ВРЕМЕВО
ИЗКРИВЯВАНЕ ЗА АНАЛИЗ НА СХОДСТВОТО
ВЪВ ФОРМАТА НА ВРЕМЕВИ РЕДОВЕ 133
- 16. Гл. ас. д-р Велина Йорданова, Гл. ас. д-р Димитрия Карадимова (Икономически университет – Варна)**
СЪВРЕМЕННИ ПЕРСПЕКТИВИ, ВЪЗМОЖНОСТИ И
ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА НА ДИСТАНЦИОННОТО
ОБУЧЕНИЕ ВЪВ ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ 146
- 17. Гл. ас. д-р Маня Манева (Тракийски университет, Стара загора)**
ОТ ТЕОРЕТИЧНИ ЗНАНИЯ ДО ПРАКТИЧЕСКО ПРИЛОЖЕНИЕ:
ФИНАНСОВАТА ГРАМОТНОСТ В БЪЛГАРСКОТО УЧИЛИЩЕ 151
- 18. Ас. д-р инж. Жулиета Михайлова (Технически университет – Варна)**
ВЪЗМОЖНОСТИ ЗА ПРИЛАГАНЕ НА МОДЕЛА
НА МАТЕМАТИЧЕСКОТО ОПТИМИРАНЕ В
РАЗЛИЧНИТЕ СЕКТОРИ НА ИКОНОМИКАТА 161
- 19. Ас. д-р инж. Жулиета Михайлова (Технически университет – Варна)**
СЪЗДАВАНЕ НА ЛИНЕЙНИ МОДЕЛИ НА ИКОНОМИЧЕСКИ
ПРОЦЕСИ: МОДЕЛИРАНЕ НА РАЗХОДА НА ГОРИВО 167
- 20. Докт. Имрел Низам (Икономически университет – Варна)**
МЕТОДИ ЗА ОЦЕНКА НА РИСКА НА ИНВЕСТИЦИОНЕН
ПРОЕКТ ЗА ИЗГРАЖДАНЕ НА ФОТОВОЛТАИЧНА СИСТЕМА..... 172

CONTENT

- 1. Prof. Rosen Nikolaev, PhD, Assoc. Prof. Tanka Milkova, PhD,
Assoc. Prof. Radan Miryanov, PhD (University of Economics –
Varna)**
APPLICATION OF MATHEMATICAL METHODS FOR
CONSTRUCTING A TWO-FACTOR ECONOMIC MODEL.....11
- 2. Prof. Emil Hristov, DSc**
MATHEMATICAL METHODS FOR UNIQUE (UNCONDITIONAL)
SOLUTIONS OF ADDITIVE FACTOR ANALYSIS OF CHANGES
OF VOLUME OUTPUT VALUES (PRODUCT) WITH TWO
FACTORS IN ECONOMY 18
- 3. Prof. Sava Grozdev, DSc (Paisii Hilendarski University of
Plovdiv), Prof. Veselin Nenkov, PhD, (Nikola Vaptsarov Naval
Academy), Assoc. Prof. Tatyana Madzharova, PhD (Nikola
Vaptsarov Naval Academy)**
INVERSE FUNCTION AND INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS . 38
- 4. Full Prof. Maria Shabanova, DrSci (Northern (Arctic) Federal
University named after M.V.Lomonosov), Assoc. Prof. Larisa
Udovenko, PhD (Moscow Pedagogical State University, Private
educational institution of higher education Saint Tikhon's
Orthodox University for the Humanities)**
METHODOLOGICAL ASPECT OF THE PROBLEM OF CONTINUITY
OF SCHOOL AND UNIVERSITY MATHEMATICAL EDUCATION..... 51
- 5. Full Prof. Alexander Yastrebov, DrSci (Yaroslavl State
Pedagogical University named after K.D.Ushinski)**
ON EXPERIMENTAL STUDY OF NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES
WITHIN TRAINING TEACHERS 61

6. Alexander Lukankin (Russian State Academy of Intellectual Property)	
EDUCATION IN THE 21ST CENTURY –	
DEVELOPMENT PATHS AND RISKS.....	70
7. Assoc. Prof. Margarita Lambova, PhD (University of Economics – Varna)	
THE COMPETENCE EDUCATIONAL MODEL -	
A REVOLUTIONARY LEAP OR A CRASH INTO THE	
ABYSS OF MEMORYLESS IGNORANCE?	73
8. Assoc. Prof. Michal Stojanov, PhD (University of economics – Varna)	
STUDY ON THE AVAILABILITY OF A COMMERCIAL	
NETWORK OF RETAIL FUEL OUTLETS IN BULGARIA.....	82
9. Assoc. Prof. Deyan Mihaylov, PhD (University of economics – Varna)	
USING AFFINE TRANSFORMATIONS IN MS EXCEL TO IMPROVE	
MOTIVATION TO LEARN ELEMENTS OF LINEAR ALGEBRA.....	90
10. Chief Assist. Prof. Yordan Petkov, PhD, Assoc. Prof.	
Radan Miryanov, PhD (University of Economics – Varna)	
A PRACTICAL PROBLEM IN ANALYTIC GEOMETRY	97
11. Chief Assist. Prof. Silvia Gospodinova, PhD (University of Economics –	
Varna)	
ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF BETA AND SIGMA	
CONVERGENCE ANALYSIS IN THE STUDY OF STRUCTURAL	
CONVERGENCE OF ECONOMIES.....	106
12. Chief Assist. Prof. Vanya Stoyanova, PhD	
(University of Economics – Varna)	
“LOST GENERATION” IN BULGARIA –	
DEVELOPMENT AND FORECAST	114
13. Chief Assist. Prof. Lyubomir Lyubenow, PhD	
(University of economics – Varna)	
THE OIL PRICE AND THE EXTERNAL BULGARIA'S TRADE	
IN THE CONTEXT OF FUNDAMENTAL ECONOMIC RESEARCH.....	119

14. Chief Assist. Prof. Svetlana Todorova, PhD (University of Economics – Varna), Chief Assist. Prof. Vesela Dimitrova, PhD (University of National and World Economy)	
BIG DATA IN STATISTICS TEACHING	126
15. Chief Assist. Prof. Slaveya Zhelyazkova, PhD (University of Economics – Varna)	
APPLYING DYNAMIC TIME WARPING TO ANALYZE SHAPE SIMILARITIES IN TIME SERIES DATA	133
16. Chief Assist. Prof. Velina Yordanova, PhD, Chief Assist. Prof. Dimitriya Karadimova (University of Economics – Varna, Bulgaria)	
CONTEMPORARY PERSPECTIVES, OPPORTUNITIES AND CHALLENGES OF DISTANCE LEARNING IN HIGHER EDUCATION ...	146
17. Chief Assistant dr. Manya Maneva (Trakia University, Ztara Zagora)	
FROM THEORETICAL KNOWLEDGE TO PRACTICAL APPLICATION: FINANCIAL LITERACY IN THE BULGARIAN SCHOOL	151
18. Assist. eng. Julieta Mihaylova, PhD (Technical University - Varna)	
APPLICATION OF THE MATHEMATICAL OPTIMIZATION MODEL IN THE VARIOUS SECTORS OF THE ECONOMY	161
19. Assist. eng. Julieta Mihaylova, PhD (Technical University - Varna)	
CREATING LINEAR MODELS OF ECONOMIC PROCESSES: MODELLING FUEL CONSUMPTION	167
20. Imrel Nizam, PhD student (University of Economics – Varna)	
METHODS FOR ASSESSING THE RISK OF AN INVESTMENT PROJECT BUILT ON A PHOTOVOLTAIC SYSTEM.....	172

APPLICATION OF MATHEMATICAL METHODS FOR CONSTRUCTING A TWO-FACTOR ECONOMIC MODEL

Prof. Rosen Nikolaev, PhD

Varna University of Economics, Bulgaria

Assoc. Prof. Tanka Milkova, PhD

Varna University of Economics, Bulgaria

Assoc. Prof. Radan Miryanov, PhD

Varna University of Economics, Bulgaria

Abstract: *In the field of economic science and its manifestations, there is almost no creation of scientific knowledge without the participation of fundamental knowledge in mathematics. A number of branches of mathematics such as linear algebra, analytical geometry, financial mathematics, differential and integral calculus, probability theory, statistics, game theory, mass service theory, stock theory, risk theory and many others are widely used. The aim of this paper is to investigate a two-factor model by applying knowledge of differential calculus of two variables and the method of least squares.*

Keywords: *Mathematical methods; Two-factor economic model.*

JEL code: *C65*

ПРИЛОЖЕНИЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ МЕТОДИ ЗА КОНСТРУИРАНЕ НА ДВУФАКТОРЕН ИКОНОМИЧЕСКИ МОДЕЛ

Проф. д-р Росен Николаев

Икономически университет – Варна, България

Доц. д-р Танка Милкова

Икономически университет – Варна, България

Доц. д-р Радан Мирянов

Икономически университет – Варна, България

В областта на икономическата наука и нейните проявления почти няма създаване на научно знание без участие на фундаментални знания по математика. Широко приложение намират редица дялове от математиката като линейна алгебра, аналитична геометрия, финансова математика, диференциално и интегрално смятане, теория на вероятностите, статистика, теория на игрите, теория на масовото обслужване, теория на запасите, теория на риска и редица други (Николаев и др., 2021).

Целта в настоящия доклад е да се изследва един двуфакторен модел чрез прилагане на знания по диференциално смятане на две променливи и метода на най-малките квадрати (МНМК).

Количествата на продажбите от дадена стока зависят от много фактори: цената, цените на същата стока у конкурентите, инфлацията, реклама и маркетинг, качество на стоката и др. В условията на дуопол продажбите на даден продукт на

двама конкуренти, владеещи пазара зависят както от качеството на всеки от тях, така и от динамиката на цените, които определят.

В доклада първо ще бъде разгледан един пример, в който са зададени количествата на продажбите на двете конкурентни стоки А и В като функции на техните цени предлагани на пазара от един и същи търговец. Ще се има предвид, че двете стоки са взаимнозаменяеми и сходни.

Нека $Q_A = -5p_A + 3p_B + 3,4$ и $Q_B = 3p_A - 4p_B + 2,3$, където Q_A и Q_B са количествата продадени стоки от двата вида, а p_A и p_B са техните цени. Общият приход от продажбите и на двете стоки е $Q_A \cdot p_A + Q_B \cdot p_B = f(p_A, p_B)$, т.е.

$$f(p_A, p_B) = -5p_A^2 + 3p_A p_B + 3,4p_A + 3p_A p_B - 4p_B^2 + 2,3p_B,$$

или

$$f(p_A, p_B) = -5p_A^2 - 4p_B^2 + 6p_A p_B + 3,4p_A + 2,3p_B.$$

Целта на търговеца е да максимизира общия си приход, т.е. да установи при какви цени p_A и p_B , $f(p_A, p_B)$ ще има максимална стойност.

Това е една задача от екстремум на функция на две променливи, което е предмет на диференциалното смятане на повече от една променливи. Това изисква знания по този дял от математиката, които се предлагат във фундамента от плана на обучение на студентите икономисти. Тук няма да се представя теорията от съответната методика, а ще се предложи директно самото решение.

1. Частните производни от първи и втори ред на $f(p_A, p_B)$ спрямо всяка от променливите са:

$$\begin{aligned} f'_{p_A}(p_A, p_B) &= -10p_A + 6p_B + 3,4 \\ f'_{p_B}(p_A, p_B) &= -8p_B + 6p_A + 2,3 \\ f''_{p_A p_A}(p_A, p_B) &= -10 \\ f''_{p_A p_B}(p_A, p_B) &= f''_{p_B p_A}(p_A, p_B) = 6 \\ f''_{p_B p_B}(p_A, p_B) &= -8. \end{aligned}$$

Тъй като $f''_{p_A p_A} \cdot f''_{p_B p_B} - (f''_{p_A p_B})^2 = (-10)(-8) - 6^2 = 44 > 0$, то $f(p_A, p_B)$ ще има екстремум и тъй като $f''_{p_A p_A}(p_A, p_B) = -10 < 0$, то този екстремум е максимум. Този максимум се достига в двойката (p_A, p_B) , която е решение на системата като f'_{p_A} и f'_{p_B} се приравнят на нула, т.е.

$$\begin{cases} -10p_A + 6p_B + 3,4 = 0 \\ 6p_A - 8p_B + 2,3 = 0 \end{cases}$$

Тук са необходими знания за решаването на такива системи, които също се предлагат във фундамента. Системата е еквивалентна на

$$\begin{cases} -p_A + 0,6p_B = -3,4 \\ 6p_A - 8p_B = -2,3 \end{cases} \cdot 6 \quad \downarrow \Rightarrow \quad 3,6p_B - 8p_B = -2,04 - 2,3$$

или $p_B = \frac{4,34}{4,4} = 0,99$ и $p_A = 0,6 \cdot 0,99 + 0,34 = 0,93$.

Следователно при цена $p_A = 0,93$ лв. и $p_B = 0,99$ лв. приходът от продажбите им ще е максимален, т.е.

$$\begin{aligned} \max f(p_A, p_B) &= f(0,93;0,99) = \\ &= -5 \cdot 0,93^2 - 4 \cdot 0,99^2 + 6 \cdot 0,93 \cdot 0,99 + 3 \cdot 4 \cdot 0,93 + 2 \cdot 3 \cdot 0,99 = 2,718. \end{aligned}$$

Има една особеност, че с това решението на задачата не е приключило. Този екстремум е локален, т.е. ако p_A и p_B могат да приемат произволни реални стойности.

От една страна Q_A и Q_B трябва да бъдат неотрицателни, а от друга, нормално е да бъдат зададени минимални цени на двата вида стоки, т.е. допустимата област на точките (p_A, p_B) се формира от системата

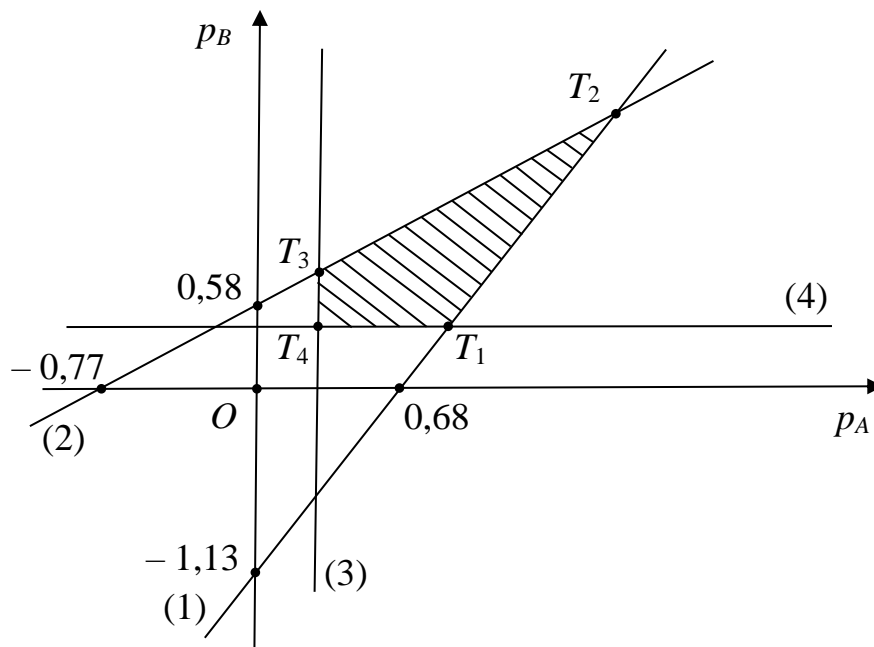
$$D: \begin{cases} Q_A \geq 0 \\ Q_B \geq 0 \\ p_A \geq p_A^* \\ p_B \geq p_B^* \end{cases}$$

където p_A^* и p_B^* са минимално допустимите цени на стоките А и В.

Нека в нашия случай $p_A^* = p_B^* = 0,50$ лв. Тогава

$$D: \begin{cases} -5p_A + 3p_B + 3,4 \geq 0 & (1) \\ 3p_A - 4p_B + 2,2 \geq 0 & (2) \\ p_A \geq 0,5 & (3) \\ p_B \geq 0,5 & (4). \end{cases}$$

Имайки предвид, че тези неравенства като уравнения са прави линии в равнината, а като неравенства са точки от дадена полуравнина, то графично D е изобразена на фиг. 1 (защрихованата част).



Фигура 1. Графично представяне на множеството D

Източник: разработка на авторите

Върховете на допустимата област са T_1, T_2, T_3, T_4 съответно с координати:

$$T_1(0,98;0,5), T_2(1,86;1,97), T_3(0,5;0,95), T_4(0,5;0,5).$$

Точката $(0,93;0,99)$, в която е локалният екстремум попада в допустимата област, която е затворено ограничено множество. Тъй като имаме единствен локален екстремум в затворено ограничено множество, то той се явява и глобален. На тази база вече можем да твърдим, че най-голямата стойност на общия приход е 2,718 и се постига в точката $(p_A, p_B) = (0,93;0,99)$.

Във втората част на доклада, ще разгледаме как на практика се получават функциите Q_A и Q_B .

Нека в исторически аспект са известни p_A, p_B, Q_A, Q_B (табл.1).

Таблица 1

Исторически данни за p_A, p_B, Q_A, Q_B

№	p_A	p_B	\hat{Q}_A	\hat{Q}_B
1	p_{A1}	p_{B1}	\hat{Q}_{A1}	\hat{Q}_{B1}
2	p_{A2}	p_{B2}	\hat{Q}_{A2}	\hat{Q}_{B2}
...
n	p_{An}	p_{Bn}	\hat{Q}_{An}	\hat{Q}_{Bn}

Източник: разработка на авторите

Нека например търсим зависимостта на Q_A от p_A и p_B (аналогично е за Q_B) във вида $Q_A = ap_A + bp_B + c$. За намиране на коефициентите a, b и c ще използваме принципа на метода на най-малките квадрати.

Отклоненията на търсения модел от реалните данни в таблицата са

$$Q_{Ai} - \hat{Q}_{Ai} = \delta_i, \quad i = 1 \div n.$$

$$\delta_i = ap_{Ai} + bp_{Bi} + c - \hat{Q}_{Ai}, \quad i = 1 \div n$$

и целта е

$$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \rightarrow \min,$$

т.е.

$$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (ap_{Ai} + bp_{Bi} + c - \hat{Q}_{Ai})^2 \rightarrow \min.$$

За тази цел се търси решението на системата:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_a = 2 \sum_{i=1}^n (ap_{Ai} + bp_{Bi} + c - \hat{Q}_{Ai}) \cdot p_{Ai} = 0 \\ f'_b = 2 \sum_{i=1}^n (ap_{Ai} + bp_{Bi} + c - \hat{Q}_{Ai}) \cdot p_{Bi} = 0 \\ f'_c = 2 \sum_{i=1}^n (ap_{Ai} + bp_{Bi} + c - \hat{Q}_{Ai}) = 0. \end{array} \right.$$

Така достигаме до системата:

$$\begin{cases}
 \left(\sum_{i=1}^n p_{Ai}^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^n p_{Ai}p_{Bi}\right)b + \left(\sum_{i=1}^n p_{Ai}\right)c = \sum_{i=1}^n p_{Ai}\hat{Q}_{Ai} \\
 \left(\sum_{i=1}^n p_{Ai}p_{Bi}\right)a + \left(\sum_{i=1}^n p_{Bi}^2\right)b + \left(\sum_{i=1}^n p_{Bi}\right)c = \sum_{i=1}^n p_{Bi}\hat{Q}_{Ai} \\
 \left(\sum_{i=1}^n p_{Ai}\right)a + \left(\sum_{i=1}^n p_{Bi}\right)b + nc = \sum_{i=1}^n \hat{Q}_{Ai}.
 \end{cases} \quad (3)$$

Приложението на изведения модел ще демонстрираме чрез следните примерни данни за цени и количества p_A , p_B , \hat{Q}_A , \hat{Q}_B за дванадесет периода (табл.2).

Таблица 2

Примерни данни за p_A , p_B , \hat{Q}_A , \hat{Q}_B

№	p_A	p_B	\hat{Q}_A	\hat{Q}_B
1	1,2	1,05	2,03	1,62
2	1,28	1,05	1,84	1,74
3	1,35	1,1	1,96	1,65
4	1,32	1,12	2,01	1,58
5	1,37	1,08	1,74	1,77
6	1,37	1,1	1,78	1,7
7	1,33	1,12	1,97	1,55
8	1,35	1,12	1,99	1,58
9	1,4	1,15	1,9	1,56
10	1,43	1,15	1,87	1,63
11	1,43	1,13	1,85	1,65
12	1,45	1,18	1,92	1,64

Източник: разработка на авторите

За да решим система (3) и да изведем търсения модел правим предварителни изчисления, които са представени в табл. 3.

Таблица 3

Примерни данни за p_A , p_B , \hat{Q}_A , \hat{Q}_B и предварителни изчисления за конструиране на модела

№	p_A	p_B	\hat{Q}_A	\hat{Q}_B	p_A^2	p_B^2	$p_A p_B$	$p_A \hat{Q}_A$	$p_A \hat{Q}_B$	$p_B \hat{Q}_A$	$p_B \hat{Q}_B$
1	1,2	1,05	2,03	1,62	1,44	1,1025	1,26	2,436	1,944	2,1315	1,701
2	1,28	1,05	1,84	1,74	1,6384	1,1025	1,344	2,3552	2,2272	1,932	1,827
3	1,35	1,1	1,96	1,65	1,8225	1,21	1,485	2,646	2,2275	2,156	1,815
4	1,32	1,12	2,01	1,58	1,7424	1,2544	1,4784	2,6532	2,0856	2,2512	1,7696
5	1,37	1,08	1,74	1,77	1,8769	1,1664	1,4796	2,3838	2,4249	1,8792	1,9116
6	1,37	1,1	1,78	1,7	1,8769	1,21	1,507	2,4386	2,329	1,958	1,87
7	1,33	1,12	1,97	1,55	1,7689	1,2544	1,4896	2,6201	2,0615	2,2064	1,736
8	1,35	1,12	1,99	1,58	1,8225	1,2544	1,512	2,6865	2,133	2,2288	1,7696

9	1,4	1,15	1,9	1,56	1,96	1,3225	1,61	2,66	2,184	2,185	1,794
10	1,43	1,15	1,87	1,63	2,0449	1,3225	1,6445	2,6741	2,3309	2,1505	1,8745
11	1,43	1,13	1,85	1,65	2,0449	1,2769	1,6159	2,6455	2,3595	2,0905	1,8645
12	1,45	1,18	1,92	1,64	2,1025	1,3924	1,711	2,784	2,378	2,2656	1,9352
Σ	16,28	13,35	22,86	19,67	22,1408	14,8689	18,137	30,983	26,6851	25,4347	21,868

Източник: разработка на авторите

При така направените изчисления система (3) за Q_A приема вида:

$$\begin{cases} 22,1408.a + 18,137.b + 16,28.c = 30,983 \\ 18,137.a + 14,8689.b + 13,35.c = 25,4347 \\ 16,28.a + 13,35.b + 12.c = 22,86 \end{cases}$$

За решаване на системата е използван онлайн продукт (<https://matrixcalc.org/bg/slu.html>) и резултатът е следният:

$$\begin{aligned} a &= -2,17, \\ b &= 3,42, \\ c &= 1,04. \end{aligned}$$

Следователно търсеният модел, който отразява зависимостта на количеството Q_A от цените p_A и p_B приема вида:

$$Q_A = -2,17p_A + 3,42p_B + 1,04.$$

Системата (3) за функцията $Q_B = d.p_B + l.p_A + k$ има вида:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n p_{Bi}^2 \right) d + \left(\sum_{i=1}^n p_{Ai} p_{Bi} \right) l + \left(\sum_{i=1}^n p_{Bi} \right) k = \sum_{i=1}^n p_{Bi} \hat{Q}_{Bi} \\ \left(\sum_{i=1}^n p_{Ai} p_{Bi} \right) d + \left(\sum_{i=1}^n p_{Ai}^2 \right) l + \left(\sum_{i=1}^n p_{Ai} \right) k = \sum_{i=1}^n p_{Ai} \hat{Q}_{Bi} \\ \left(\sum_{i=1}^n p_{Bi} \right) d + \left(\sum_{i=1}^n p_{Ai} \right) l + nk = \sum_{i=1}^n \hat{Q}_{Bi}. \end{cases} \quad (3')$$

или за конкретната задача:

$$\begin{cases} 14,8689.d + 18,137.l + 13,35.k = 21,868 \\ 18,137.d + 22,1408.l + 16,28.k = 26,6851 \\ 13,35.d + 16,28.l + 12.k = 19,67 \end{cases}$$

За решаване на системата отново е използван онлайн продукт (<https://matrixcalc.org/bg/slu.html>) и резултатът е:

$$\begin{aligned} d &= -2,9, \\ l &= 1,35, \\ k &= 3,03, \end{aligned}$$

и търсеният модел, който отразява зависимостта на количеството Q_B от цените p_A и p_B приема вида:

$$Q_B = -2,9p_B + 1,35p_A + 3,03.$$

Така се получават функциите на продажбите на двата вида стоки, които в началото въведохме фиктивно.

Като следваме подхода в предната задача, то за функцията на общия приход получаваме:

$$\begin{aligned} f(p_A, p_B) &= p_A \cdot Q_A + p_B \cdot Q_B = \\ &= -2,17 p_A^2 + 3,42 p_A p_B + 1,04 p_A - \\ &- 2,9 p_B^2 + 1,35 p_A p_B + 3,03 p_B = \\ &= -2,17 p_A^2 - 2,9 p_B^2 + 4,77 p_A p_B + 1,04 p_A + 3,03 p_B. \end{aligned}$$

Съответните частни производни са:

$$\begin{aligned} f'_{p_A}(p_A, p_B) &= -4,34 p_A + 4,77 p_B + 1,04, \\ f'_{p_B}(p_A, p_B) &= -5,8 p_B + 4,77 p_A + 3,03, \\ f''_{p_A p_A}(p_A, p_B) &= -4,34, \quad f''_{p_B p_B}(p_A, p_B) = -5,8, \quad f''_{p_A p_B}(p_A, p_B) = 4,77. \\ f''_{p_A p_A}(p_A, p_B) \cdot f''_{p_B p_B}(p_A, p_B) - (f''_{p_A p_B}(p_A, p_B))^2 &= \\ &= (-4,34) \cdot (-5,8) - (4,77)^2 = 2,419 > 0. \end{aligned}$$

Следователно функцията има екстремум, който е максимум, тъй като $f''_{p_A p_A}(p_A, p_B) = -4,34 < 0$.

Тъй като се използва същата процедура като в предходната задача, то оставяме на читателите, първо, сами да определят при кои цени на двата продукта се получава този екстремум и каква е неговата стойност. Второ, ако минималните цени са $p_A^* = 8,00$ лв. и $p_B^* = 7,00$ лв., да се начертае допустимата област и да се провери дали точката на локалния екстремум попада в нея и ако не попада, то какво следва да се извърши по-нататък.

Като заключение можем да направим извода, че в редица икономически задачи се налага прилагането на различен математически апарат, който се преподава при фундаменталната подготовка във висшите икономически училища. Неговото познаване, овладяване и използване е предпоставка за израстването на добри специалисти.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Nikolaev, R., D. Suruzhon, T. Stoyanov, T. Zapryanova, T. Milkova, R. Miryanov (2021). Prilozhna matematika. Varna: Nauka i ikonomika, ISBN 978-954-21-1060-6.

2. <https://matrixcalc.org/bg/slu.html> (accessed on 29.10.2024)

MATHEMATICAL METHODS FOR UNIQUE (UNCONDITIONAL) SOLUTIONS OF ADDITIVE FACTOR ANALYSIS OF CHANGES OF VOLUME OUTPUT VALUES (PRODUCT) WITH TWO FACTORS IN ECONOMY

Prof. Emil Hristov, DSc

Abstract: *The one-valued (unconditional) solutions of additive factor quantities with two factors in the economy are presented. The elementary factor dependence of the production of an individual commodity with the product of two factors was used, where is the price of the commodity (intensive factor), is its natural quantity (extensive factor). For the solution of the additive factor analysis, a simple geometric method is proposed with two rectangles, the areas of which represent the volumes and production of the commodity. The bases of the two rectangles represent the values of the extensive factor and , and the heights of the rectangles represent the values of the intensive factor from the base and reporting periods. True and accurate effects are obtained by multiplying each factor change (the difference between the factor's reporting and base value) by the lesser of the other factor's value from the base or reporting period. The smaller values are determined simply and easily with the suggested elementary but strict mathematical criteria, which are the inequalities between the reported and the base value of each factor. The single-valued solution and elementary mathematical criteria are summarized by the discrete odd function of the mathematical signum. With it, all additive factor analyzes from all areas of life are solved unequivocally.*

Keywords: *Mathematical methods; Factor analysis*

JEL code: *C1*

МАТЕМАТИЧЕСКИ МЕТОДИ ЗА ЕДНОЗНАЧНИ (НЕУСЛОВНИ) РЕШЕНИЯ НА АДТИВНИ ФАКТОРНИ АНАЛИЗИ НА ПРОМЕНИТЕ НА ОБЕМНИ РЕЗУЛТАТИВНИ ВЕЛИЧИНИ (ПРОДУКЦИИ) С ДВА ФАКТОРА В ИКОНОМИКАТА

Проф. д-р ик. н. Емил Христов

*Посвеждавам на математиците от
“Икономически университет – Варна”,
които разбират дискретния факторен анализ.*

Въведение

Адитивните факторни анализи (АФА) са първите и най-прости, но и най-необходими статистически факторни анализи за всички икономисти. С тях се разпределя **разликата** между две обемни резултативни величини (продукции), например в динамика от отчетен период (година) и базисен период (година), на части или **ефекти** според промените на две или повече, факторни величини.

За разлика от непрекъснатите величини в математиката, стойностите на променливите от двата периода (години) са **дискретни** (разделени или прекъснати във времето) величини. Обемни резултативни величини могат да бъдат продукции на страната, на отделен отрасъл, подотрасъл или фирма, на съвкупност от стоки и

дори продукцията само на една отделна стока. В друг, териториален разрез обемни резултативни величини (продукции) могат да бъдат на друга страна, район, област, община, град и на друго териториално или административно подразделение. Дискретни са променливите и по икономически признаци, например по сектори на икономиката, отрасли, подотрасли и други.

Дискретните адитивни факторни анализи са **единични**, ако са с два фактора, всеки от които подобно на обемната резултативна величина се характеризира само с една стойност за отчетния период (година) и само с една стойност за базисния период (година). Използва се определението **единични по аналогия с единичните индексни факторни анализи**, които използват единични факторни индекси. Ако обемната резултативна величина и двата фактора се характеризират с две или повече стойности за отчетния и базисния период, дискретните адитивни и индексни факторни анализи са **множествени**. За еднозначните (единствени) неусловни решения на единичните адитивни факторни анализи в икономиката предлагам **нов метод**, който изведох с помощта на теорията на вероятностите в демографската статистика за т.нар. **напречен демографски факторен анализ** на броя на умрелите по възраст и година на раждане. Използвана е **концепцията за интензивните и екстензивните фактори**, която произлиза от определението на **основното понятие и показател „вероятност за умирање q_x “ в теорията на вероятностите** (Сугарев, 1975). След това по аналогия с концепцията за интензивните и екстензивните фактори пренесох метода от демографската в икономическата статистика също за еднозначни (неусловни) решения на промените на обемни резултативни величини (продукции) в икономиката. Тъй като много от читателите икономисти може да не познават демографските факторни анализи и теорията на вероятностите, методът не е пренесен формално от демографската статистика в икономическата, а е изведен отново за нуждите на такива читатели икономисти.

Най-простият единичен адитивен факторен анализ с два фактора в икономиката е според **дискретната единична мултипликативна зависимост или функция $P = p \cdot q$** . В тази формула, P е **обемът** на общата продукция, например на една стока, p е **цената** на стоката (интензивен фактор), q е **натуралното количество** на стоката (екстензивен фактор). Единичният адитивен факторен анализ се извършва на **разликата** (прирастът или намалението) на общата продукция на стоката от отчетен период (година) $P_1 = p_1 \cdot q_1$ и базисен период (година) $P_0 = p_0 \cdot q_0$, или $\Delta P = P_1 - P_0 = p_1 \cdot q_1 - p_0 \cdot q_0$.

Такова е решението на адитивния факторен анализ на разликата ΔP , която се представя като **сума на ефекти** (прираст или намаление) на всеки фактор: на цената $\Delta p = (p_1 - p_0)$ и на натуралното количество на стоката $\Delta q = (q_1 - q_0)$. Всеки ефект се получава като **произведение** на всяка факторна промяна с **по-малката стойност на другия фактор** от базисната или от отчетната година. За улеснение на читателя, тази по-малка стойност се определя много лесно с въведени **елементарни математически критерии** (неравенствата между отчетната и базисната стойност на всеки фактор). С тези елементарни математически критерии всяка задача на АФА е **точно определена математическа задача** с едно единствено **еднозначно** (неусловно) решение.

Като нов метод за еднозначни решения, той се различава от различните подходи, концепции и методи за решения на адитивните факторни анализи във

висшето икономическо образование по статистика и в научно-приложните икономико-статистически изследвания извън образованието. Докладът е предназначен преди всичко за икономисти, но той не включва проблемите на инфлацията и методите за нейното измерване. Те са специални и изискват отделно обсъждане. Моето мнение е че независимо от нейното изключване, всички анализи трябва да бъдат извършвани и при наличие на инфлация, за да се оценява нейното влияние.

Другият много по-сложен и труден дискретен факторен анализ е индексният (ИФА). Неговото **принципно различие** с адитивния факторен анализ (АФА) е, че докато АФА започва с **разликите** между отчетните и базисните стойности на трите дискретни показателя, $\Delta P = P_1 - P_0$ на продукцията, $\Delta p = p_1 - p_0$ на цената и $\Delta q = (q_1 - q_0)$ на натуралното количество на стоката, ИФА започва със същите

показатели, но с техните **темпове** или отношения $\frac{P_1}{P_0}$, $\frac{p_1}{p_0}$ и $\frac{q_1}{q_0}$. Следователно

АФА и ИФА са **две форми** на един и същ дискретен факторен анализ. Решението на ИФА се основава на една много стара идея на покойния акад. Иван Стефанов – виден български икономист – финансист и статистик, за **адитивно решение на ИФА** (Стефанов и Тотев, 1960). По тази причина в настоящия доклад се представят **най-напред** еднозначните решения на АФА с примери според елементарните математически критерии при **едновременните промени** на двата фактора, $p_1 > p_0$ или $p_1 < p_0$ и $q_1 > q_0$ или $q_1 < q_0$. След това като се използват крайните резултати от АФА ще бъдат изведени в друга публикация **еднозначните (неусловни решения) на ИФА**.

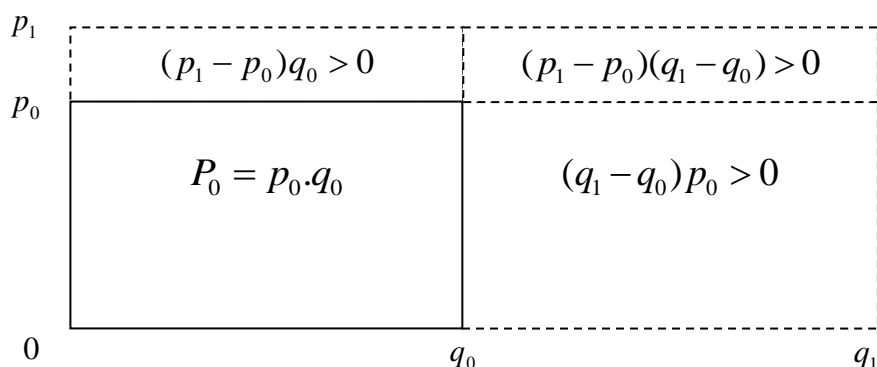
1. Извеждане на геометричен метод с елементарните математически критерии за единичните адитивни факторни анализи на обемни резултативни величини с два фактора в икономиката

Всяка обемна резултативна величина в икономиката, която се представя аналитично като произведение на два интензивен и екстензивен фактора, може да се представи и **геометрично с два правоъгълника**. Идеята за такова геометрично представяне произлиза от **геометричната вероятност за умиране** q_x , с която **броят на умрелите** в едногодишните възрастови интервали от x до $x+1$ години (обемни резултативни величини) се представят **геометрично с квадрати**, според теорията на вероятностите. Например обемът на **продукцията** на една стока P според единичната факторна мултипликативна зависимост $P = p \cdot q$, където p е **цената** на стоката, q е **нейното натурално количество**, се представя с **площта на правоъгълник** с основа q (екстензивният фактор) и височина p (интензивният фактор). Следователно според тази факторна зависимост, всяка натурална единица, например 1 кг. от общото натурално количество q на стоката, се характеризира с една и съща цена p . **Обемите** на продукцията на същата стока за базисен и отчетен период се представят геометрично с **два правоъгълника** $P_0 = p_0 \cdot q_0$ за базисния период и $P_1 = p_1 \cdot q_1$ за отчетния период. Те се нанасят на двумерна правоъгълна координатна система, като **първо** се нанася правоъгълникът за базисния период, а след това върху него правоъгълникът за отчетния период. Двата правоъгълника имат

общо нулево начало. На абсцисната ос на координатната система се нанасят основите на двата правоъгълника (стойностите на екстензивния фактор q_0 и q_1), а на ординатната ос се нанасят височините на двата правоъгълника (стойностите на интензивния фактор p_0 и p_1). По този начин двата правоъгълника образуват една фигура. С **разликата между площите** на двата правоъгълника $\Delta P = P_1 - P_0 = p_1 \cdot q_1 - p_0 \cdot q_0$, се представя **разликата между обемите** на общата продукция на стоката от отчетния и базисния период (увеличение или намаление) от **едновременните промени** на двата фактора $\Delta p = p_1 - p_0$ и $\Delta q = q_1 - q_0$. Правоъгълникът за базисния период може да бъде с произволна дължина на основата, която е за стойностите на екстензивния фактор q_0 и q_1 . Тя е по-голяма от височината на правоъгълника за стойностите p_0 и p_1 на интензивния фактор, които обикновено са по-малки числа. Необходимо е обаче промените на двата фактора Δq и Δp на фигурите да бъдат **пропорционални** на промените Δq и Δp с числата в задачата.

На следващите фигури от 1 до 4 са представени **геометрично** еднозначните (неусловни) решения на адитивните факторни анализи на промените в обема на общата продукция на една стока $\Delta P = P_1 - P_0$ според четирите възможни едновременни промени на нейната цена $\Delta p = p_1 - p_0$ и на нейното натурално количество $\Delta q = q_1 - q_0$. Представените фигури обаче са **условни**, защото за улеснение на читателя, на тях са означени възможните верни и точни ефекти като **резултат30и** от анализите.

1.1 При едновременни увеличения на цената $p_1 > p_0$ и на натуралното количество $q_1 > q_0$ (елементарните математически критерии), геометричното решение на увеличението на продукцията на стоката $\Delta P > 0$, е представено на фигура 1 със следните ефекти:



Фигура 1

$$0 < \Delta P = P_1 - P_0 = p_1 q_1 - p_0 q_0 = (p_1 - p_0) q_0 + (q_1 - q_0) p_0 + (p_1 - p_0)(q_1 - q_0) = \Delta P_p + \Delta P_q + \Delta P_{pq},$$

където $\Delta P = P_1 - P_0 = p_1 q_1 - p_0 q_0$ е разликата в площите на двата правоъгълника,

която представя увеличението на продукцията на стоката през отчетния спрямо базисния период. Тя се подразделя на следните **площи или ефекти** от увеличенията на двата фактора:

Двата **нетни** положителни ефекта или увеличения на продукцията са $\Delta P_p = (p_1 - p_0)q_0 > 0$, **само** от увеличението на цената на стоката $\Delta p = (p_1 - p_0) > 0$ и $\Delta P_q = (q_1 - q_0)p_0 > 0$, **само** от увеличението на натуралното количество на стоката $\Delta q = (q_1 - q_0) > 0$.

Посочените ефекти се определят с произведенията на двете факторни промени $(p_1 - p_0) > 0$ и $(q_1 - q_0) > 0$, със по-малките стойности на другите фактори q_0 и p_0 от базисния период! Тези стойности се намират от елементарните математически критерии или неравенствата между отчетните и базисните стойности на другия фактор $q_1 > q_0$ и $p_1 > p_0$.

Третият ефект на фигура 1 е **съвместният положителен ефект** (също увеличение на продукцията) с $\Delta P_{pq} = \Delta p \Delta q = (p_1 - p_0)(q_1 - q_0) > 0$ от съвместните едновременни увеличения на цената $\Delta p = (p_1 - p_0) > 0$ и на натуралното количество на стоката $\Delta q = (q_1 - q_0) > 0$.

Трите площи или ефекта на фигура 1 са отделени помежду си с пунктирани линии. Тяхната сума е точно **равна** на разликата в обема на продукцията: $0 < \Delta P = P_1 - P_0 = \Delta P_p + \Delta P_q + \Delta P_{pq}$.

С отношенията на трите абсолютни ефекта спрямо базисната стойност на продукцията P_0 се получават трите положителни **относителни ефекта** $\frac{\Delta P_p}{P_0} > 0$, $\frac{\Delta P_q}{P_0} > 0$ и $\frac{\Delta P_{pq}}{P_0} > 0$. Тяхната сума е точно **равна** на относителния

прираст на продукцията $\frac{\Delta P}{P_0} > 0$, или $\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_q}{P_0} + \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$

Относителните ефекти са крайни решения на АФА. Те са много важни, защото са **крайни резултати** и от ИФА, които ще бъдат представени в друга публикация.

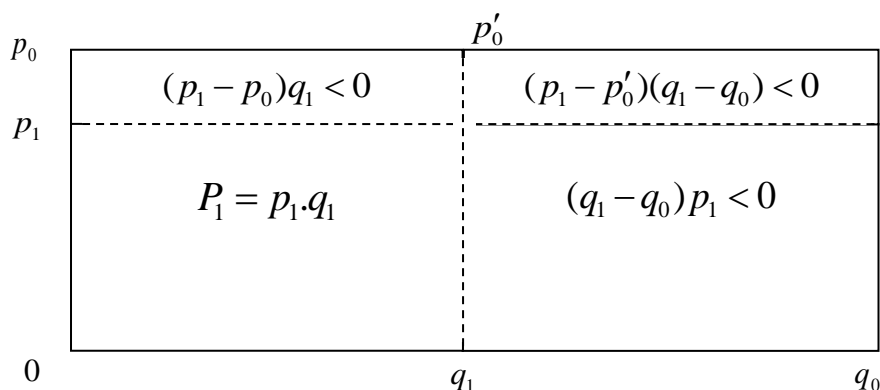
Предлагам пример на читателят с малки числа, удобен за изчисления, който е също условен, защото е от данни с големи числа за продукцията в евро и натурални количества в хиляди бройки:

$$p_0 = 50 \text{ хил. лв. и } p_1 = 59 \text{ хил. лв. } q_0 = 180 \text{ броя и } q_1 = 200 \text{ броя.}$$

$$P_0 = p_0 \cdot q_0 = 50 \cdot 180 = 9000 \text{ хил. лв. и } P_1 = p_1 \cdot q_1 = 59 \cdot 200 = 11800 \text{ хил. лв.}$$

1.2 При едновременни намаления на цената $p_1 < p_0$ и на натуралното количество $q_1 < q_0$ (елементарните математически критерии), геометричното решение на намалението на продукцията на стоката $\Delta P < 0$, е представено на

фигура 2 със следните ефекти:



Фигура 2

$$0 > \Delta P = P_1 - P_0 = p_1 q_1 - p_0 q_0 = -|p_1 - p_0'| q_1 - |q_1 - q_0| p_1 - \\ - |p_1 - p_0'| |q_1 - q_0| = -\Delta P_p - \Delta P_q - \Delta P_{pq},$$

Случаят с едновременните намаления на двата фактора е **обратен** на предходния случай с едновременните увеличения на факторите. С едни и същи данни площите или ефектите в случая с намаления на факторите са същите по абсолютна стойност площ или ефекти както в случая с увеличенията на факторите, но са с обратни (отрицателни) алгебрични знаци. Или при едни и същи данни но при разменени места на двата периода, двата случая са взаимнообратими.

Разликата в площите на двата правоъгълника на фигура 2 представя намалението на продукцията на стоката през отчетния спрямо базисния период. Тя се състои от следните площи или ефекти от намаленията на двата фактора:

Двата **нетни** отрицателни ефекта или намаления на продукцията са $-\Delta P_p = -|p_1 - p_0| q_1$, **само** от намалението на цената на стоката $\Delta p = (p_1 - p_0) < 0$ и $-\Delta P_q = -|q_1 - q_0| p_1$, **само** от намалението на натуралното количество на стоката $\Delta q = (q_1 - q_0) < 0$.

Тези ефекти се определят с произведенията на двете факторни промени $(p_1 - p_0) < 0$ и $(q_1 - q_0) < 0$, с по-малките стойности на другите фактори q_1 и p_1 от отчетния период! Същите стойности се намират с **елементарните математически критерии** или неравенствата между отчетните и базисните стойности на двата фактора $q_1 < q_0$ и $p_1 < p_0$.

Третият ефект на фигура 2 е **съвместният отрицателен ефект** (също намаление на продукцията) с $-\Delta P_{pq} = -(p_1 - p_0)(q_1 - q_0) < 0$ от едновременните съвместни намаления на цената $\Delta p = (p_1 - p_0) < 0$ и на натуралното количество на стоката $\Delta q = (q_1 - q_0) < 0$.

Трите отрицателни площи или ефекти на фигура 2 са отделени помежду си с пунктирани линии. Тяхната сума е точно **равна** на отрицателната разлика в обема на продукцията:

$$0 > \Delta P = P_1 - P_0 = -\Delta P_p - \Delta P_q - \Delta P_{pq}$$

С отношенията на трите отрицателни ефекта спрямо базисната стойност на продукцията P_0 се получават трите отрицателни **относителни ефекта** $\frac{\Delta P_p}{P_0} < 0, \frac{\Delta P_q}{P_0} < 0$ и $\frac{\Delta P_{pq}}{P_0} < 0$. Тяхната сума е точно **равна** на относителното намаление на продукцията, или

$$0 > \frac{\Delta P}{P_0} = -\frac{\Delta P_p}{P_0} - \frac{\Delta P_q}{P_0} - \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$$

Примерът за този случай е със следните данни:

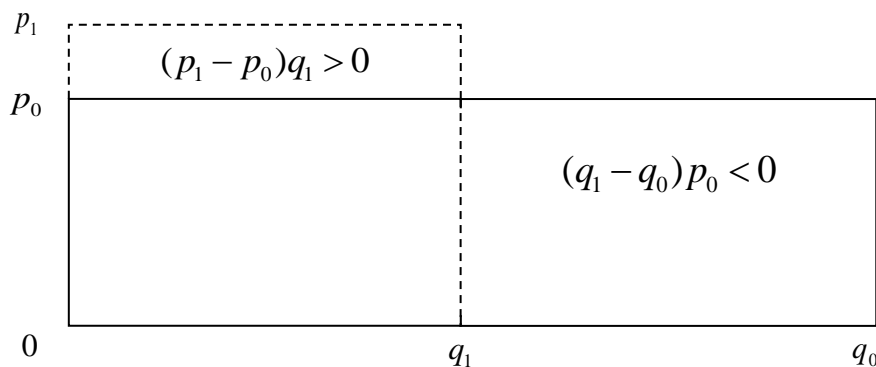
$$p_0 = 59 \text{ хил. лв. и } p_1 = 50 \text{ хил. лв. } q_0 = 200 \text{ броя и } q_1 = 180 \text{ броя.}$$

$$P_0 = p_0 \cdot q_0 = 59 \cdot 200 = 11800 \text{ хил. лв. и } P_1 = p_1 \cdot q_1 = 50 \cdot 180 = 9000 \text{ хил. лв.}$$

Този случай с едновременните намаления на двата фактора и с трите отрицателни ефекта не ги срещнах нито в нашата статистическа учебна и научна литература, нито в чуждата статистическа литература. Същият случай ми даде обаче **конкретния повод** да въведа елементарните математически критерии за избора на вярната двойка по-малки стойности на другия фактор за промените на двата фактора

Решенията на двата случая с увеличения на двата фактора на фигура 1 и намаления на двата фактора на фигура 2, са решения при **еднопосочни промени** на факторите.

1.3. При едновременни **разнопосочни промени** на двата фактора, с **увеличение** на цената $p_1 > p_0$ (интензивният фактор) и **намаление** на натуралното количество на стоката $q_1 < q_0$, (елементарните математически критерии), геометричното решение на промяната в обема на продукцията на стоката ΔP (увеличение или намаление), е представено на фигура 3 със следните ефекти:



Фигура 3

$$\Delta P = P_1 - P_0 = p_1 q_1 - p_0 q_0 = (p_1 - p_0) q_1 - |q_1 - q_0| p_0 = \Delta P_p - \Delta P_q,$$

където ΔP може да бъде $\Delta P > 0$ или $\Delta P < 0$.

Разликата $\Delta P = P_1 - P_0 = p_1 q_1 - p_0 q_0$, е на площите на двата правоъгълника, която може да представя **увеличение** на продукцията на стоката

през отчетния спрямо базисния период, ако $P_1 > P_0$, или **намаление** на продукцията на стоката, ако $P_1 < P_0$. Разликата $\Delta P = P_1 - P_0$ се подразделя на следните две площи или ефекти от посочените разнопосочни промени на двата фактора:

Нетен положителен ефект или увеличение на продукцията $\Delta P_p = (p_1 - p_0)q_1 > 0$, който е **само** от увеличението на цената на стоката $\Delta p = (p_1 - p_0) > 0$ и **нетен** отрицателен ефект или намаление на продукцията на стоката $\Delta P_q = -|q_1 - q_0|p_0$, който е **само** от намалението на натуралното количество на стоката $\Delta q = (q_1 - q_0) < 0$.

Първият ефект се определя с произведението на промяната на цената $\Delta p = (p_1 - p_0)$ с по-малката стойност на другия фактор q_1 (натуралното количество) от отчетния период! Вторият ефект се определя с произведението на факторната промяна на натуралното количество $\Delta q = (q_1 - q_0)$ също с по-малката стойност на другия фактор P_0 (цената) но от базисния период! Тези по-малки стойности се намират от неравенствата между отчетните и базисните стойности на двата фактора $q_1 < q_0$ и $P_1 > P_0$ (**елементарните математически критерии**).

В случая на разнопосочни промени на двата фактора **няма съвместен ефект**, защото мястото за него на фигура 3 е **празно**. Логически и икономически не е възможно при едновременно увеличение на единия фактор и намаление на другия фактор да има съвместен ефект през отчетния период!

Алгебричната сума на двата ефекта е точно **равна** на разликата в обема на продукцията:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = \Delta P_p - \Delta P_q$$

Тази разлика може да бъде положителна величина $\Delta P = (P_1 - P_0) > 0$ (увеличение на продукцията), ако положителния ефект ΔP_p е **по-голям** от отрицателния ефект ΔP_q по абсолютна стойност, или $\Delta P_p > |-\Delta P_q|$. И обратно, разликата $\Delta P = (P_1 - P_0) < 0$ е отрицателна величина (намаление на продукцията), ако положителният ефект е ΔP_p е **по-малък** от отрицателния ефект ΔP_q по абсолютна стойност, или $\Delta P_p < |-\Delta P_q|$.

С отношенията на двата нетни ефекта спрямо базисната стойност на продукцията P_0 се получават двата **относителни ефекта** $\frac{\Delta P_p}{P_0} > 0$, и $\frac{\Delta P_q}{P_0} < 0$. Тяхната алгебрична сума е точно **равна** на относителния прираст или намаление на продукцията:

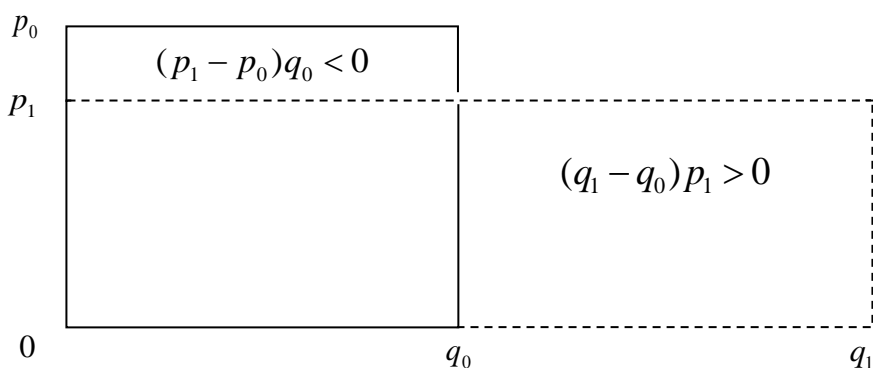
$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{\Delta P_p}{P_0} - \frac{\Delta P_q}{P_0}$$

Примерът за този случай е със следните данни:

$$p_0 = 53,5 \text{ хил. лв. и } p_1 = 65 \text{ хил. лв. } q_0 = 200 \text{ броя и } q_1 = 180 \text{ броя.}$$

$$P_0 = p_0 \cdot q_0 = 53,5 \cdot 200 = 10700 \text{ хил. лв. и } P_1 = p_1 \cdot q_1 = 65 \cdot 180 = 11700 \text{ хил. лв.}$$

1.4 Другият случай с едновременни **разнопосочни факторни промени** е с **намаление** на цената $p_1 < p_0$ и **увеличение** на натуралното количество на стоката $q_1 > q_0$ (елементарните математически критерии). Геометричното решение на промяната в обема на продукцията (увеличение или намаление) е представено на фигура 4 със следните ефекти:



Фигура 4

$$\Delta P = P_1 - P_0 = p_1 q_1 - p_0 q_0 = -|p_1 - p_0| q_0 + (q_1 - q_0) p_1 = -\Delta P_p + \Delta P_q,$$

където разликата $\Delta P = P_1 - P_0 = p_1 q_1 - p_0 q_0$ е с площите на двата правоъгълника. Тя може да представя **увеличение** на продукцията на стоката през отчетния спрямо базисния период, ако $P_1 > P_0$, или **намаление** на продукцията на стоката, ако $P_1 < P_0$.

Разликата $\Delta P = P_1 - P_0$ се подразделя на следните две площи или ефекти от посочените разнопосочни промени на двата фактора:

Нетният отрицателен ефект или намаление на продукцията $\Delta P_p = -|p_1 - p_0| q_0$, е **само** от намалението на цената на стоката $\Delta p = (p_1 - p_0) < 0$ и **нетният** положителен ефект или увеличение на продукцията $\Delta P_q = (q_1 - q_0) p_1 > 0$, който е **само** от увеличението на натуралното количество на стоката $\Delta q = (q_1 - q_0) > 0$.

Този случай на разнопосочните факторни промени е взаимнообратим с предходния случай на фигура 3, защото при едни и същи данни, но при разменени места за двата периода, се получават същите по абсолютна стойност ефекти, но с обратни алгебрични знаци.

Факторният множител на факторната промяна на цената $\Delta p = (p_1 - p_0) < 0$ е по-малката стойност на другия фактор q_0 (натуралното количество) от базисния период! Факторният множител на факторната промяна на натуралното количество $\Delta q = (q_1 - q_0) < 0$, е също с по-малката стойност на другия фактор p_1 (цената на стоката) от отчетния период! Тези по-малки стойности се намират от неравенствата между отчетните и базисните стойности на двата фактора $q_1 > q_0$ и $p_1 < p_0$ (**елементарните математически критерии**).

В този случай на разнопосочни факторни промени, както в предходния случай за тези промени на фигура 3, **няма съвместен ефект**, защото мястото за него на фигура 4 е **празно**. Причината е известна, защото логически и икономически е невъзможно при едновременно намаление на единния фактор и увеличение на другия фактор да има съвместен ефект.

Алгебричната сума на двата нетни ефекта на фигура 4 е точно **равна** на разликата в обема на продукцията:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = -\Delta P_p + \Delta P_q$$

Тази разлика може да бъде положителна величина $\Delta P = (P_1 - P_0) > 0$, ако положителният ефект $\Delta P_q > 0$ е **по-голям** от отрицателния ефект по абсолютна стойност $|\Delta P_p|$, или $\Delta P_q > |\Delta P_p|$. И обратно, разликата $\Delta P = (P_1 - P_0) < 0$ е отрицателна величина, ако отрицателният ефект по абсолютна стойност $|\Delta P_p|$ е **по-голям** от положителния ефект ΔP_q или $|\Delta P_p| > \Delta P_q$.

С отношенията на двата нетни ефекта спрямо базисната стойност на продукцията P_0 се получават двата **относителни ефекта** $\frac{\Delta P_p}{P_0} < 0$, и $\frac{\Delta P_q}{P_0} > 0$.

Тяхната алгебрична сума е също точно **равна** на относителния прираст или намаление на продукцията:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = -\frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_q}{P_0}$$

Примерът за този случай е със следните данни:

$$p_0 = 65 \text{ хил. лв. и } p_1 = 53,5 \text{ хил. лв. } q_0 = 180 \text{ броя и } q_1 = 200 \text{ броя.}$$

$$P_0 = p_0 \cdot q_0 = 65 \cdot 180 = 11700 \text{ хил. лв. и } P_1 = p_1 \cdot q_1 = 53,5 \cdot 200 = 10700 \text{ хил. лв.}$$

От всичките четири възможни решения на промяната на продукцията на една стока според промените са нейната цена $\Delta p = (p_1 - p_0)$ и на нейното натурално количество $\Delta q = (q_1 - q_0)$, могат да се направят следните изводи:

От еднопосочните промени на двата фактора p и q (едновременни увеличения или намаления) се получават **два нетни положителни или отрицателни ефекти** (интензивния и екстензивния, които са увеличения или

намаление на продукцията) и **положителен или отрицателен съвместен ефект** (увеличение или намаление на продукцията).

От разнопосочните промени на двата фактора се получават **само два нетни ефекта**:

– положителен ценови (интензивен) ефект. При $p_1 > p_0$ и отрицателен (екстензивен) ефект при $q_1 < q_0$ и обратно;

– отрицателен ценови (интензивен) ефект при $p_1 < p_0$ и положителен (екстензивен) ефект при $q_1 > q_0$

Нетните ефекти от четирите възможни промени на двата фактора се определят с произведенията на всяка факторна разлика $(p_1 - p_0)$ и $(q_1 - q_0)$ с по-малките стойности на другия фактор според **елементарните математически критерии**: с q_0 от базисния период при $q_1 > q_0$ или с q_1 от отчетния период при $q_1 < q_0$ и с p_0 от базисния период при $p_1 > p_0$ или с p_1 от отчетния период при $p_1 < p_0$.

Представените решения на единичния АФА с два фактора не се различават принципно от решенията във висшето икономическо образование по статистика. Ще обърна внимание все пак на две различия, които не променят моето съгласие с образованието. Първото е съществено различие за въведените елементарни, но строги математически критерии за еднозначните решения на АФА, които ги няма в образованието. Второто различие е за случая с едновременните намаления на двата фактора. Той е много рядък, но и много срещан за намаления на обемни резултативни величини, например на брутната добавена стойност V (БДС) от намаленията на БДС на един зает (интензивен фактор) и на броя на заетите (екстензивен фактор) при **големи финансово-икономически** кризи като световната през периода 2008-2009 г. (Стойкова-Къналиева, Найденов и Бозев, 2016) Никъде не срещнах обаче в това изследване, нито в учебната литература, формулата за вярното решение - $-|p_1 - p_0|q_1 - |q_1 - q_0|p_1 - |p_1 - p_0| \cdot |q_1 - q_0|$. Вместо нея, вероятно се използва формулата $-|p_1 - p_0|q_0 - |q_1 - q_0|p_0 - |p_1 - p_0| \cdot |q_1 - q_0|$. В тази формула участват по-голямите стойности q_0 и p_0 , вместо вярните по-малки стойности q_1 и p_1 . Действително и с по-голямите стойности q_0 и p_0 се получава също вярната и точна разлика ΔV , но **вярните и точни ефекти** се определят **само** с по-малките стойности q_1 и p_1 според елементарните математически критерии $p_1 < p_0$ и $q_1 < q_0$.

Ако нямам принципни различия с образованието за еднозначните (неусловни) решения на АФА на промените на обемни резултативни величини (продукции) от промените на интензивни и екстензивни фактори, появи се изненадващо един невероятен удар срещу този АФА. Той е публикуван в монография от ст.н.с. II степен (доцент) д-р Нина Янкова от бившия Икономически институт на БАН (Янкова, 2007). В тази монография първият и най-прост случай на лесния за решение АФА на увеличението на обемна резултативна величина (продукция S) от увеличенията на x (средната производителност на труда на един зает) и на y (броят

на заетите) през отчетен период спрямо базисен период, е обявен за **тавтология**¹! Това означава, че от увеличенията на двата фактора **нямало никакви ефекти (прирасти на продукцията)**! На с. 126 е представено решението на АФА, което се използва **в целия свят**:

$$\begin{aligned}\Delta S &= x_1 y_1 - x_0 y_0 = \Delta x y_0 + x_0 \Delta y + \Delta x \Delta y = \\ &= (x_1 - x_0) y_0 + x_0 (y_1 - y_0) + (x_1 - x_0)(y_1 - y_0)\end{aligned}$$

Както читателят може да види, това е вярното и точно решение на фигура 1 в моя доклад. Авторката на монографията обаче **унищожава ефектите** с разкриване на скобите на факторните промени, за да ес получат двойки условни обеми на продукции. Двата условни обема във всяка двойка са **равни по абсолютна стойност, но са с противоположни алгебрични знаци**. По този начин те взаимно се анулират и ефектите **изчезват**! Естествено, че след като са **отпаднали ефектите**, остава само разликата $\Delta S = x_1 y_1 - x_0 y_0$, която авторката обявява за **тавтология**! (с. 127) Нямам повече коментар. Само ще отбележа, че това е голям удар срещу висшето икономическо образование по статистика, защото не е само лично мнение, но ес името и авторитета на БАН! Само че монографията е без рецензенти и не се знае, кой носи отговорност за нея, дали БАН или някой друг освен авторката? Не зная дали е реагирало досега икономическото образование, но аз съм длъжен да го предупредя. Досега съм мълчал, защото не бях решил още еднозначно ИФА, който авторката на монографията е обявила също за **тавтология**!

2. Множествен адитивен факторен анализ на продукцията от съвкупности на стоки

Освен за АФА на промяната на продукцията на **една стока**, предлаганата методика може да се използва и за **множествени АФА** на продукцията на **съвкупности от еднородни и от разнородни стоки**. Еднородната съвкупност е крайно множество или брой на екземплярите на една стока (натуралното количество) **от точно определен вид**. Например такива еднородни само хранителни стоки от „потребителска кошница”, които се наблюдават от НСИ, са 46 на брой.

Еднородните стоки се различават по производствени цени на едро от различните производители, търговски цени на едро и цени на дребно за различно качество от различните търговци, както и от надценките за различните пазари. Необходимо е да се отбележи, че няма формални и точни критерии за определянето на една съвкупност на стоки като еднородна. В много случаи еднородните съвкупности са определят от НСИ според държавни и международни стандарти. Независимо от това, трябва да се знае точно състава на такава съвкупност, за да се прецени, дали тя е достатъчно еднородна според целта и задачата на анализа.

Освен еднородните съвкупности на стоките, много по-разпространени са **разнородните съвкупности на стоките**. Всяка такава съвкупност съдържа **най-малко две различни стоки**, независимо, че могат да са предназначени за задоволяването на някаква потребност от точно определен вид. Например **необходимите суровини и материали** за производството на определена стока образуват **разнородна съвкупност**. Типичен пример за разнородни съвкупности за населението са т.нар. „потребителски кошници” на НСИ от различни стоки и услуги, за които населението прави разходи за своята издръжка. Следователно всяка единична стока може да участва както в еднородна, така и в разнородна

съвкупност.

На тази основа предлагам множествен АФА на промяната в обема на продукцията от еднородна или от разнородна съвкупност на стоките. Този **множествен АФА** започва най-напред с **единичен АФА за всяка отделна i -та стока на съвкупността**. За тази цел се използват същите фигури от 1 до 4 за единичната стока в предходната точка 1. Необходимо е само **замяна** на означенията q_0 и q_1 за натуралните количества на единичната стока с означенията q_{i0} и q_{i1} за натуралните количества на всяка отделна i -та стока от съвкупността, както и **замяна** на означенията p_0 и p_1 за цените на единичната стока с означенията p_{i0} и p_{i1} за цената и натуралното количество на същата отделна i -та стока от съвкупността на стоките. Следователно се прилага също **геометричния метод на двата правоъгълника на фигурите от 1 до 4 за всяка отделна i -та стока** от съвкупността на стоките с **елементарните математически критерии** (неравенства) между отчетните и базисните стойности на цените $p_{i1} > p_{i0}$ или $p_{i1} < p_{i0}$ и на натуралните количества $q_{i1} > q_{i0}$ или $q_{i1} < q_{i0}$. От тези математически критерии **произлизат факторните разлики** $(p_{i1} - p_{i0}) > 0$ или $(p_{i1} - p_{i0}) < 0$ и $(q_{i1} - q_{i0}) > 0$ или $(q_{i1} - q_{i0}) < 0$, както и **по-малките стойности на другия фактор** от базисната или от отчетната година за определянето на **ефектите** от посочените факторни промени.

След определянето на ефектите от единичния АФА на промяната на продукцията на всяка отделна i -та стока на следващ етап се **сумират** нетните (ценови) ефекти със своите алгебрични знаци само от промените на цените на отделните стоки $\sum \Delta P p_i$, нетните ефекти със своите алгебрични знаци **само** от промените на натуралните количества на отделните стоки $\sum \Delta P q_i$, както и съвместните ефекти със своите алгебрични знаци $\sum \Delta P p_i q_i$ алгебричната сума на всички ефекти е **равна на сумата** на промените на продукциите на всички стоки от съвкупността или на промяната на продукцията от цялата съвкупност на стоките,
$$\Delta P = P_1 - P_0 = \sum \Delta P_i = \sum (P_{i1} - P_{i0}) = \sum \Delta P p_i + \sum \Delta P q_i + \sum P q_i p_i .$$

Получените ефекти от множествения АФА могат да бъдат анализирани в хоризонтален и във вертикален разрез. В хоризонтален разрез се отчита **приносът** на всяка i -та стока в промяната на своята продукция ΔP_i с трите или с двата ефекта и след това в промяната на продукцията от съвкупността на всички стоки $\sum \Delta P_i = \Delta P$. Във вертикален разрез се отчита също **приносът** на всяка i -та стока, но с всеки свой отделен ефект $\Delta P p_i$, $\Delta P q_i$, $\Delta P p_i q_i$ със своя алгебричен знак за образуването на съответния **алгебричен сумарен ефект** от всички стоки на съвкупността $\sum \Delta P p_i$, $\sum \Delta P q_i$, $\sum \Delta P p_i q_i$. Тъй като, сумарните ефекти са резултативни величини (салда) от положителни и отрицателни ефекти, предлагам множествения АФА да бъде с **всички единични АФА на отделните стоки**, за да може анализаторът да прави ясен и задълбочен анализ.

Множественият АФА е много важен, защото според предлаганата методика,

от решението на всеки единичен и множествен АФА се преминава в единичен и множествен ИФА. В този смисъл може да се реши и прословутата задача за множествените факторни индекси на цените на стоките и на физическия обем на продукцията (натуралните количества на стоките) на Ласпер и на Пааше (Радилов, 2000). Тук ще представя тези два условни множествени АФА, по-скоро като теоретично възможни, а на практика като редки случаи на анализи. С произведението на тези множествени индекси се получава резултативният индекс за продукцията:

$$I_v = I_{p(q_0)} \cdot I_{q(p_1)} \text{ където } I_v = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}, \text{ е резултативният индекс, известен като}$$

индекс при променлив състав

$$I_{q(p_1)} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \text{ е множественият факторен индекс на цените (при постоянен}$$

състав q_0) на Ласпейрес

$$I_{p(q_1)} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} \text{ е множественият факторен индекс на натуралните количества}$$

на стоките (при постоянен състав p_1) на Пааше

От посоченото индексно равенство, се преминава в **множествен АФА**:

$$\text{От } I_v = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} \text{ се преминава в АФА с разликите:}$$

$$\sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = V_1 - V_0 = \Delta V$$

$$\text{От } I_{p(q_0)} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \text{ се преминава в АФА с разликите:}$$

$$\sum p_1 q_0 - \sum p_0 q_0 = \sum (p_1 - p_0) q_0 = \Delta V_p$$

$$\text{От } I_{q(p_1)} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} \text{ се преминава в АФА с разликите:}$$

$$\sum p_1 q_1 - \sum p_1 q_0 = -\sum (q_1 - q_0) p_1 = \Delta V_q$$

Окончателно,

$$\Delta V = V_1 - V_0 = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = \sum (p_1 - p_0) q_0 - \sum (q_1 - q_0) p_1 = \Delta V_p - \Delta V_q$$

Относителните промени на продукцията са $\frac{\Delta V}{V_0} > 0$ или $\frac{\Delta V}{V_0} < 0$, а относителните

ефекти са $\frac{\Delta V_p}{V_0} > 0$ или $\frac{\Delta V_q}{V_0} < 0$.

Според елементарните математически критерии този множествен АФА е с **разнопосочни факторни промени: увеличения на цените на всички наблюдавани стоки $p_{i1} > p_{i0}$ и намаления на всички натурални количества на стоките**

$q_{i1} < q_{i0}$. Най-голямо приложение на този множествен АФА е при икономически кризи с нарастване на цените поради инфлация и намаление на натуралните количества на стоките. Проблемът е само, дали тези факторни промени засягат всички наблюдавани стоки?

Другият множествен ИФА е с множествения факторен индекс на цените (при постоянен състав q_1) на Пааше и с множествения факторен индекс на натуралните количества (при постоянен състав p_0) на Ласпейрес (Цонев, 1998)

$$I_v = I_{p(q1)} \cdot I_{q(p0)},$$

където $I_{p(q1)} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}$ и $I_{q(p0)} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}$

От това индексно равенство се преминава в множествения АФА:

От $I_v = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$, се преминава в АФА с разликите:

$$\sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = V_1 - V_0 = \Delta V$$

От $I_{p(q1)} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}$ се преминава в АФА с разликите:

$$\sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = \sum (p_1 - p_0) q_1 = -\Delta V_p$$

От $I_{q(p0)} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}$, се преминава в АФА с разликите:

$$\sum q_1 p_0 - \sum p_0 q_0 = \sum (q_1 - q_0) p_0 = \Delta V_q$$

Окончателно:

$$\Delta V = V_1 - V_0 = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = -\Delta V_p + \Delta V_q$$

Относителните промени на продукцията са $\frac{\Delta V}{V_0} > 0$ или $\frac{\Delta V}{V_0} < 0$, а

относителните ефекти са $\frac{\Delta V_p}{V_0} > 0$ или $\frac{\Delta V_q}{V_0} < 0$.

Според елементарните математически критерии този множествен АФА е **също с разнопосочни факторни промени: намаления на цените на всички наблюдавани стоки $p_{i1} < p_{i0}$ и увеличения на всички натурални количества на стоките $q_{i1} > q_{i0}$** . Най-голямото негово приложение обаче е с множествения

факторен индекс на цените на Пааше $I_{p(q1)} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}$. Този индекс е **дефлатор** на стойностните показатели за преминаване на цените от **текущи в съпоставими** по

формулата (Радилов, 2000): $\sum q_1 p_1 \cdot \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}$. За отделното предприятие, фирма и други подобни икономически субекти има **микродефлатори** по специална методика на НСИ.

Освен двата множествени АФА с **разнопосочни факторни промени на всички стоки**, с множествените факторни индекси на Ласпейрес и Пааше могат да се правят и множествени АФА с **еднопосочни факторни промени на всички стоки**. По мое мнение те имат по-скоро теоретичен смисъл при нормални икономически условия. При извънредни и влошени икономически условия обаче, те може да бъдат реални величини. Например при реална опасност от неизбежна война, населението ще се запасява с дълготрайни храни, лекарства и други най-необходимите стоки за своето оцеляване. Тогава ще има случаят с едновременни увеличения $p_1 > p_0$ и $q_1 > q_0$. Другият случай с едновременни намаления на цените $p_1 < p_0$ и на покупките $q_1 < q_0$ ще има при условия на фалит, особено на дребния бизнес, който ще се опитва да спасява каквото може.

В заключение, в следваща публикация ще покажа **еднозначните (неусловни) решения на множествения ИФА със същите окончателни ефекти** от множествените АФА

3. Единичен адитивен факторен анализ на продукцията от еднородна съвкупност на стоки

Според едно важно свойство на еднородните съвкупности на стоките, само те имат обосновани икономически средни цени \bar{p} и общи натурални количества на стоките Q в едни и същи натурални мерки. Средната цена и общото натурално количество са **сводни (обобщени) характеристики** на всяка еднородна съвкупност стоки.

Промяната на продукцията на всяка такава еднородна съвкупност на стоки от отчетен и базисен период може да се анализира с **единичен АФА** с подобни елементарни математически критерии. Необходимо е само да се **сменят** означенията на фигурите от 1 до 4. За **екстензивния фактор** (натуралните количества на единичната стока) q_0 и q_1 с означенията на общите натурални количества Q_0 и Q_1 , и означенията за **интензивния фактор** цените p_0 и p_1 на единичната стока с означенията за средните цени \bar{p}_0 и \bar{p}_1 . Ефектите се измерват с подобни формули както за ефектите от АФА на продукцията от единична стока:

3.1. При $\bar{p}_1 > \bar{p}_0$ и $Q_1 > Q_0$, виж фигура 1:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = \bar{p}_1 Q_1 - \bar{p}_0 Q_0 = (\bar{p}_1 - \bar{p}_0) Q_0 + (Q_1 - Q_0) \bar{p}_0 + (\bar{p}_1 - \bar{p}_0)(Q_1 - Q_0) = \Delta P_{\bar{p}} + \Delta P_Q + \Delta P_{\bar{p}Q},$$

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0} + \frac{\Delta P_Q}{P_0} + \frac{\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}$$

3.2. При $\bar{p}_1 < \bar{p}_0$ и $Q_1 < Q_0$, виж фигура 2:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = \bar{p}_1 Q_1 - \bar{p}_0 Q_0 = -\left|\bar{p}_1 - \bar{p}_0\right| Q_1 - \left|Q_1 - Q_0\right| \bar{p}_1 - \\ - \left|\bar{p}_1 - \bar{p}_0\right| \left|Q_1 - Q_0\right| = -\Delta P_p - \Delta P_Q - \Delta P_{pQ},$$

$$\frac{\Delta P}{P_0} = -\frac{\Delta P_p}{P_0} - \frac{\Delta P_Q}{P_0} - \frac{\Delta P_{pQ}}{P_0}$$

3.3. При $\bar{p}_1 > \bar{p}_0$ и $Q_1 < Q_0$, виж фигура 3:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = \bar{p}_1 Q_1 - \bar{p}_0 Q_0 = (\bar{p}_1 - \bar{p}_0) Q_1 - \left|Q_1 - Q_0\right| \bar{p}_0 = \Delta P_p - \Delta P_Q,$$

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{\Delta P_p}{P_0} - \frac{\Delta P_Q}{P_0}$$

3.4. При $\bar{p}_1 < \bar{p}_0$ и $Q_1 > Q_0$, виж фигура 4:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = \bar{p}_1 Q_1 - \bar{p}_0 Q_0 = -\left|\bar{p}_1 - \bar{p}_0\right| Q_0 + (Q_1 - Q_0) \bar{p}_1 = -\Delta P_p + \Delta P_Q,$$

$$\frac{\Delta P}{P_0} = -\frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_Q}{P_0}$$

4. Обобщение на решенията с геометричния метод и елементарните математически критерии с математическата дискретна функция на математическия сигнум

Както отбелязах в началото на доклада, създадох много отдавна геометричния метод с помощта на теорията на вероятностите за нуждите на т.нар. **напречен** демографски факторен анализ. С геометричния метод се извършва АФА на промените на броя на умрелите по единични възрасти M_x от промените на „вероятностите за умирање q_x ” (интензивните фактори) и на броя на населението на точните възрасти x години или „рисковите съвкупности за умирање” (екстензивните фактори). Тъй като икономистите-статистици в образованието и в икономическите научно-приложни изследвания не прилагат теорията на вероятностите за АФА както в демографската статистика, използвах геометричния метод в публикации само за графично представяне на резултатите (ефектите) от АФА, докато самият анализ извършва логически с индуктивната логика за четирите възможни решения с два фактора (Христов, 1978).

След много дълго време, едва през настоящия век стигнах до извода, че еднозначните решения с геометричния метод могат да бъдат обобщени с дискретна математическа функция (Христов, 2008). Едва по-късно разбрах нейното точно име **дискретна нечетна функция на математическия сигнум (ДНФМС)** и че тя се прилага в инженерно-техническите науки (Bachman, 1966; Kreyszig, 1993). С тази функция и четирите възможни решения на АФА в икономиката могат да се представят само с една формула, но задължително според мен, **с елементарните**

математически критерии. Формулата на ДФМС на АФА на продукцията на всяка единична стока от промените на нейната цена P и натурално количество Q е следната:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = (p_1 - p_0)q_{\min},$$

където q_{\min} е по-малката стойност на другия фактор (натуралното количество на стоката) от базисния или отчетния период, P_{\min} е също по-малката стойност на другия фактор (цената на стоката) от базисния или отчетния период. Тези условия за по-малката стойност на другия фактор се изпълняват единствено от въведените в АФА елементарни математически критерии.

h е параметър (показател) за **наличието или отсъствието** на съвместен ефект. Той взема три стойности 1, 0, -1. От нечетните стойности +1 и -1 произлиза името на дискретната функция като **нечетна**. Същите нечетни стойности показват **алгебричният знак** (математическият сигнум) на съвместния ефект като положителен или отрицателен.

Според елементарните математически критерии решенията на АФА са следните:

– при едновременни увеличения на двата фактора $p_1 > p_0$ и $q_1 > q_0$, $h = +1$ и показва **наличие** на положителен съвместен ефект. Решение с ДНФМС е следното:

$$\begin{aligned} \Delta P &= P_1 - P_0 = (p_1 - p_0)q_0 + (q_1 - q_0)p_0 + 1(p_1 - p_0)(q_1 - q_0) = \\ &= (p_1 - p_0)q_0 + (q_1 - q_0)p_0 + (p_1 - p_0)(q_1 - q_0) = \Delta P_p + \Delta P_q + \Delta P_{pq} \end{aligned}$$

Това решение **съвпада** с геометричното на фигура 1.

– при едновременни намаления на двата фактора $p_1 < p_0$ и $q_1 < q_0$, $h = -1$ и показва **наличие** на отрицателен съвместен ефект. Решението с ДНФМС е следното:

$$\begin{aligned} \Delta P &= P_1 - P_0 = (p_1 - p_0)q_1 + (q_1 - q_0)p_1 - 1(p_1 - p_0)(q_1 - q_0) = \\ &= -|p_1 - p_0|q_1 - |q_1 - q_0|p_1 - |p_1 - p_0||q_1 - q_0| = -\Delta P_p - \Delta P_q - \Delta P_{pq} \end{aligned}$$

Това решение **съвпада** с геометричното на фигура 2.

– при увеличение на цената $p_1 > p_0$ и намаление на натуралното количество на стоката $q_1 < q_0$, $h = 0$ и показва, че не може да има съвместен ефект. Решението с ДНФМС е следното:

$$\begin{aligned} \Delta P &= P_1 - P_0 = (p_1 - p_0)q_1 + (q_1 - q_0)p_0 + 0(p_1 - p_0)(q_1 - q_0) = \\ &= (p_1 - p_0)q_1 - |q_1 - q_0|p_0 = \Delta P_p - \Delta P_q \end{aligned}$$

Това решение **съвпада** с геометричното на фигура 3.

– при намаление на цената $p_1 < p_0$ и увеличение на натуралното количество на стоката $q_1 > q_0$, $h = 0$ и показва също отсъствие на съвместен ефект. Решението с ДНФМС е следното:

$$\begin{aligned} \Delta P &= P_1 - P_0 = (p_1 - p_0)q_0 + (q_1 - q_0)p_1 + 0(p_1 - p_0)(q_1 - q_0) = \\ &= -|p_1 - p_0|q_0 + (q_1 - q_0)p_1 = -\Delta P_p + \Delta P_q \end{aligned}$$

Това решение също **съвпада** с геометричното на фигура 4.

Със същата ДНФМС се решава **множествения АФА** на продукцията на съвкупност от стоки **чрез АФА на всяка отделна i -та стока** от съвкупността на стоките. За целта се използва ДНФМС за всяка отделна i -та стока:

$$\Delta P_i = P_{i1} - P_{i0} = (p_{i1} - p_{i0})q_{i\min} + (q_{i1} - q_{i0})p_{i\min} + h_i(p_{i1} - p_{i0})(q_{i1} - q_{i0})$$

където всички означения са известни.

Търсят се решенията с ДНФМС със следните **елементарни математически критерии и стойности на h_i**

$$p_{i1} > p_{i0}, q_{i1} > q_{i0} \text{ и } h_i = +1$$

$$p_{i1} < p_{i0}, q_{i1} < q_{i0} \text{ и } h_i = -1$$

$$p_{i1} > p_{i0}, q_{i1} < q_{i0} \text{ и } h_i = 0$$

$$p_{i1} < p_{i0}, q_{i1} > q_{i0} \text{ и } h_i = 0$$

Получените ефекти за всяка i -та стока се **сумират** хоризонтално и вертикално, както в точка 2 за множествения АФА на продукцията от всички стоки на съвкупността.

Завършвам АФА с ДНФМС на продукцията от **еднородна съвкупност на стоки със средна цена \bar{p} и общо натурално количество на всички стоки Q** . Формулата на ДНФМС за този единичен АФА е следната:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = (\bar{p}_1 - \bar{p}_0)Q_{\min} + (Q_1 - Q_0)\bar{p}_{\min} + h(\bar{p}_1 - \bar{p}_0)(Q_1 - Q_0),$$

където Q_{\min} е **по-малката стойност** от базисния или отчетния период и \bar{p}_{\min} е също **по-малката стойност** от базисния или отчетния период. Според елементарните математически критерии, $h = +1, 0, -1$ Мисля, че читателят вече може сам да решава този АФА с ДНФМС.

Завършвам изложението с извода за **смисъла и необходимостта** от елементарните математически критерии. Те са първите показатели за евентуално **наличие на инфлация**. От тях се извежда **необходимостта** множествените АФА и ИФА да се извършват най-напред с АФА и ИФА на **отделните стоки** във всяка съвкупност на стоки. Елементарните математически критерии обаче не са критерии срещу подмяната на необходимите стоки със заместители с по-ниско качество и дори с вредни за здравето влияния. За оценяване на качеството на стоките носят отговорност други институции на държавата, а не математиката, икономическата статистика и НСИ.

Най-накрая, ще завърша с обещанието за еднозначните (неусловни) решения на ИФА в следваща публикация. По този начин ще реализирам идеята на покойния акад. Иван Стефанов за адитивно решение на ИФА.

БЕЛЕЖКИ

1. Означенията на продукцията и на двата фактора са на проф. Кирил Гатев в учебника Въведение в статистиката, 1995 г., с. 362.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Bachman, G., L. Narici (1966) *Functional analyses*. N. Y., Academic Press.
2. Gatev, K. (1995) *Vavedenie v statistikata*. Sofia, LIA.
3. Kreyszig, E. (1993) *Advanced Engineering Mathematics*. N. Y., John Willey,

4. Radilov, D. (2000) *Ikonomicheska statistika*. Varna, Ikonomicheski universitet - Varna.
5. Stefanov, Iv. i A. Yu. Totev (1960) *Teoria na statistikata*. Sofia, Nauka i izkustvo.
6. Sugarev, Z. (1975) *Demografska statistika*. Sofia, Nauka i izkustvo.
7. Stoykova-Kanalieva, A., A. Naydenov i V. Bozev (2016) *Statisticheskoto sravnitelno izsledvane na strukturite, strukturnite razlichia i strukturnata dinamika na osnovni makroikonomicheski pokazатели (brutna dobavena stoynost) na stranite ot Evropeyskia sayuz prez perioda 2000-2014 g.* Sofia, UNSS.
8. Hristov, E. (1978) Prirastat na produktsia spored promenite vav vlozhenoto kolichestvo trud i proizvoditelnostta na truda. *Statistika*, kn. 5.
9. Hristov, E. (2008) Edno dostatachno uslovie za ednoznachni reshenia na faktorni promeni na stoynostni (absolyutni rezultativni velichini). *Statistika*, kn. 3.
10. Tsonev, V. (1998) Teoriyata na indeksite i neynata statisticheska alternativa. *Statistika*, kn. 1.
11. Yankova, N. (2007) *Statisticheskoto izsledvane na strukturni izmenenia*. Sofia, Ikonomicheski institut na BAN, Akad. izdatelstvo „Prof. Marin Drinov”.

INVERSE FUNCTION AND INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

Professor Sava Grozdev, DSc

Faculty of Mathematics and Informatics, Paisii Hilendarski University of Plovdiv, Bulgaria

Professor Veselin Nenkov, PhD

Faculty of Engineering, Nikola Vaptsarov Naval Academy

Associate Professor Tatyana Madzharova, PhD

Faculty of Engineering, Nikola Vaptsarov Naval Academy

Abstract: *The concept of inverse function is one of the most difficult for students to understand. On the other hand, the introduction of inverse trigonometric functions further complicates the understanding of inverse functions. Therefore, here we have tried to show one way of introducing the concept of an inverse function. At the same time, special attention was paid to obtaining the inverse trigonometric functions.*

Keywords: *Inverse function, Inverse trigonometric functions*

JEL code: *C0*

ОБРАТНА ФУНКЦИЯ И ОБРАТНИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ФУНКЦИИ

Професор д-р Сава Гроздев

Факултет по математика и информатика, Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”, България

Професор д-р Веселин Ненков

Факултет Инженерен, Висше военноморско училище „Н. Й. Вапцаров”, България

Доцент д-р Татяна Маджарова

Факултет Инженерен, Висше военноморско училище „Н. Й. Вапцаров”, България

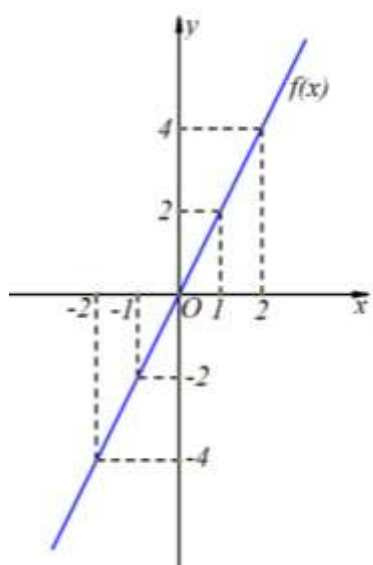
Въведение. Едно от най-трудните за разбиране от студентите е понятието обратна функция. От друга страна въвеждането на обратните тригонометрични функции допълнително усложнява разбирането на обратните функции. Затова тук сме се опитали да покажем един начин за въвеждане в понятието обратна функция. Същевременно е обърнато по-специално внимание на получаването на обратните тригонометрични функции.

1. Обратна функция. Да разгледаме няколко стойности на функцията $f(x) = 2x$, подредени в таблица 1. Графиката на тази функция е показана на фиг. 1. Ако разменим местата на двата реда в тази таблица, получаваме таблица 2, която дефинира друга функция $g(y)$. Графиката на тази функция е показана на фиг. 2. Следователно, когато на стойностите y на функцията $f(x) = 2x$ съпоставим стойностите на x , от които тези y са получени, се дефинира друга функция

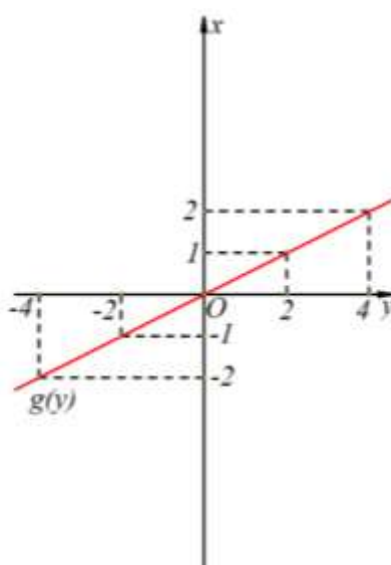
$g(y) = \frac{y}{2}$. Ако в последната функция заменим y с x , получаваме функцията $\frac{x}{2}$, която се означава с $f^{-1}(x)$, т.е. $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$. Функцията $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ наричаме обратна на $f(x) = 2x$. Графиките на двете функции са прави линии. Ако начертаем тези графики спрямо една координатно система, забелязваме, че тези прави са симетрични спрямо ъглополовящата на първи-трети квадрант.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x$	-4	-2	0	2	4
Таблица 1					

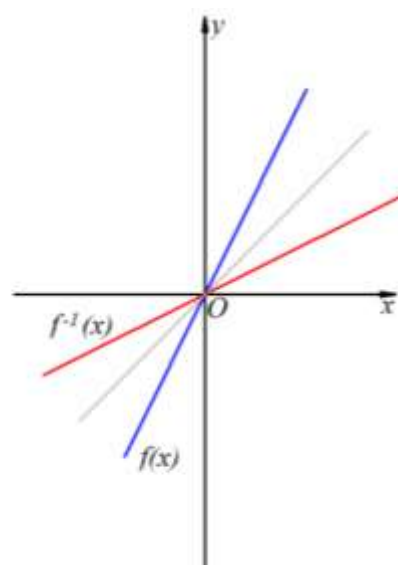
y	-4	-2	0	2	4
$x = \frac{y}{2}$	-2	-1	0	1	2
Таблица 2					



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

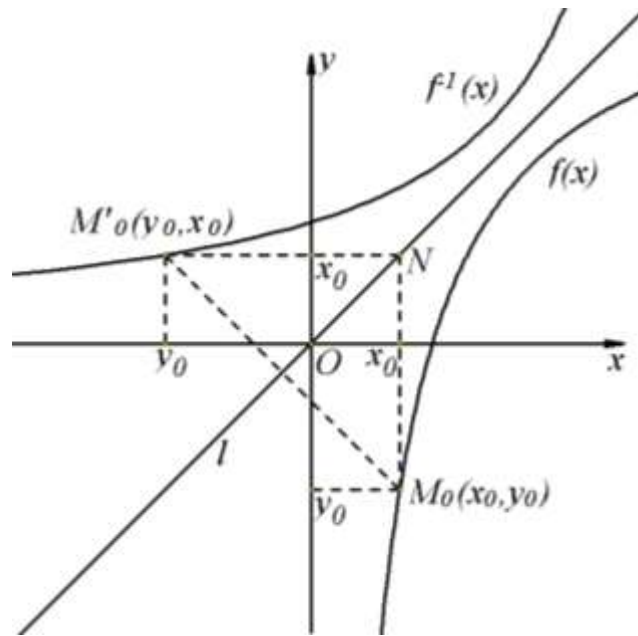
Тези наблюдения можем да обобщим при разглеждането на други функции.

Нека на всяко x от множеството X чрез функцията f е съпоставено точно едно $y = f(x)$ от множеството Y . Тогава на всяко y от Y чрез функция g може да се съпостави единственото x от X , от което се е получило y , т.е. $g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$. В този случай g се означава с f^{-1} и се нарича *обратна на f* . Следователно дефиниционната област на f^{-1} е множеството Y , а областта ѝ от стойности е X . Ясно е, че от своя страна функцията f е обратна на f^{-1} . Затова двете функции се наричат взаимно обратни.

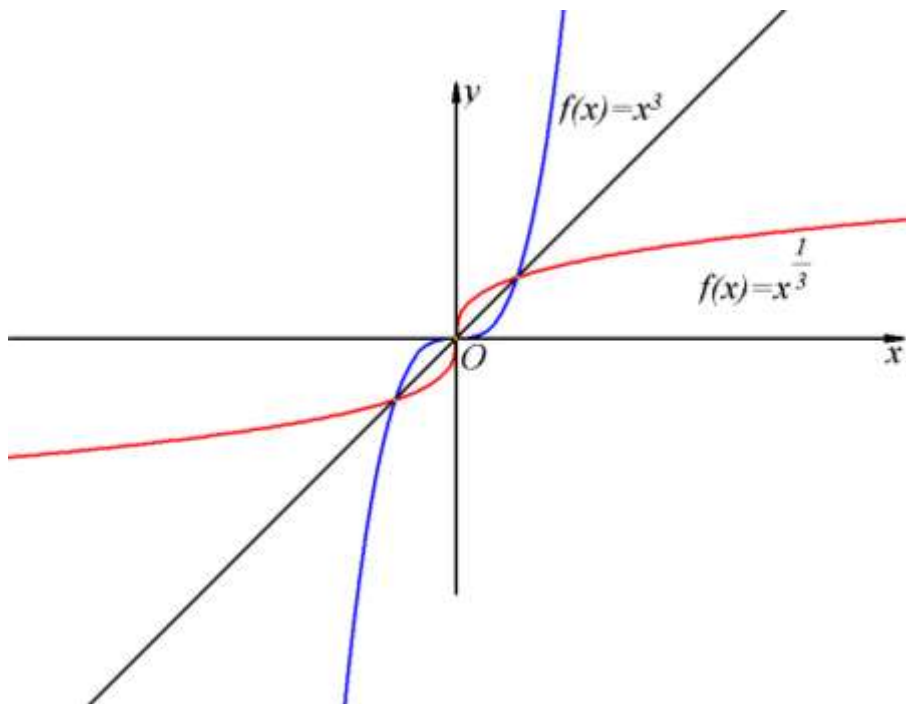
От дефиницията на обратна функция следват свойствата:

$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad x \in Y \quad (1)$$

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in X. \quad (2)$$

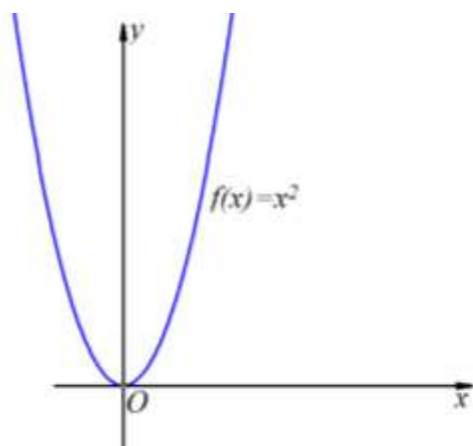


Фиг. 4

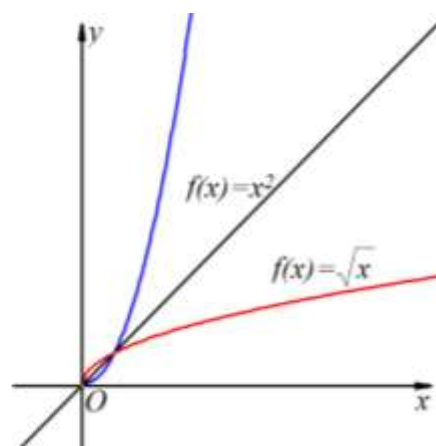


Фиг. 5

Пример 2. Функцията $y = x^2$ е дефинирана при $x \in (-\infty, +\infty)$, но както се вижда от графиката ѝ, показана на фиг. 6, всяка точка от графиката се получава при две различни стойности на аргумента x . Затова търсенето на нейната обратна трябва да се извърши при свиване на дефиниционното ѝ множество до $x \in [0, +\infty)$. В такъв случай обратната функция е $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ и графиките на двете функции изглеждат, както е показано на фиг. 7.

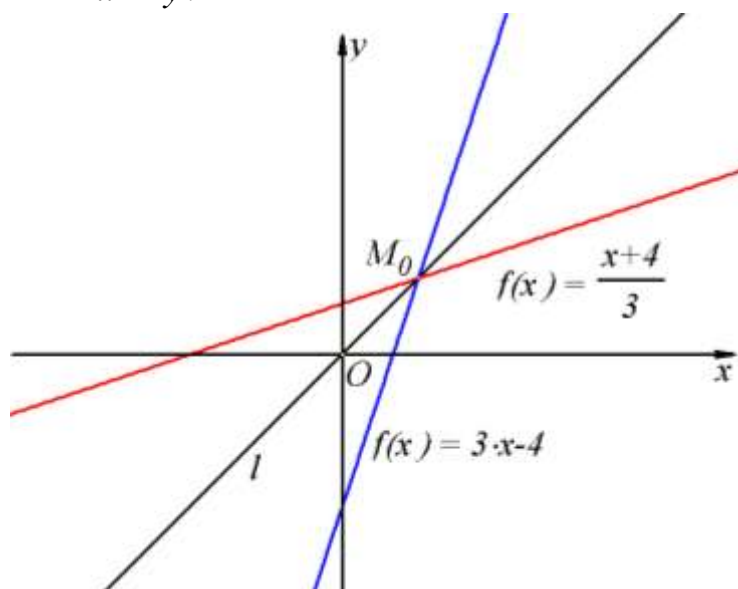


Фиг. 6



Фиг. 7

Всъщност намирането на обратната на някоя функция означава да се реши уравнението $y = f(x)$ по отношение на x и да се получи функция на y . След това се разменят местата на x и y .



Фиг. 8

Пример 3. Да се намери обратната на линейната функция $y = 3x - 4$.

Решение. Решаваме уравнението $y = 3x - 4$ по отношение на x и получаваме $x = \frac{y+4}{3}$. Сега извършваме смяната $x \leftrightarrow y$ и получаваме $y = \frac{x+4}{3}$. Графиките на двете функции са прави, които се пресичат в точка $M_0(2,2)$ от ъглополовящата l на първи и трети квадрант (Фиг. 8).

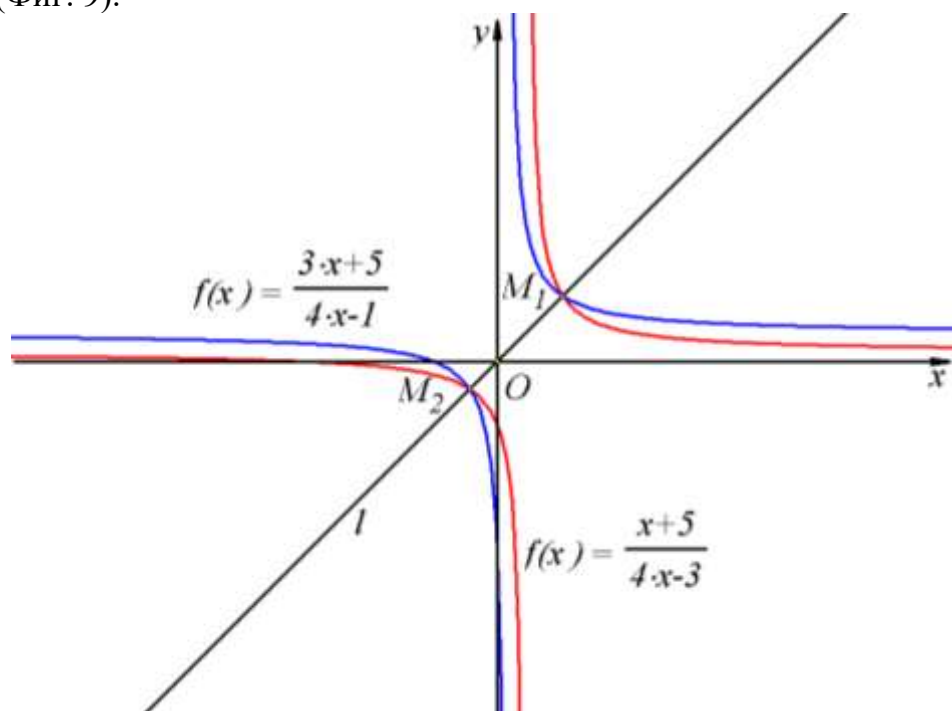
Пример 4. Да се намери обратната на дробно-линейната функция $y = \frac{3x+5}{4x-1}$.

Решение. Решаваме уравнението $y = \frac{3x+5}{4x-1}$ по отношение на x в следната последователност:

$$y = \frac{3x+5}{4x-1} \Rightarrow (4x-1)y = 3x+5 \Rightarrow 4yx - y = 3x+5 \Rightarrow 4yx - 3x = y+5 \Rightarrow$$

$$(4y-3)x = y+5 \Rightarrow x = \frac{y+5}{4y-3} \Rightarrow y = \frac{x+5}{4x-3}.$$

Графиките на двете функции са хиперболи, които се пресичат в точките $M_1\left(\frac{1+\sqrt{6}}{2}, \frac{1+\sqrt{6}}{2}\right)$ и $M_2\left(\frac{1-\sqrt{6}}{2}, \frac{1-\sqrt{6}}{2}\right)$ от ъглополовящата l на първи и трети квадрант (Фиг. 9).



Фиг. 9

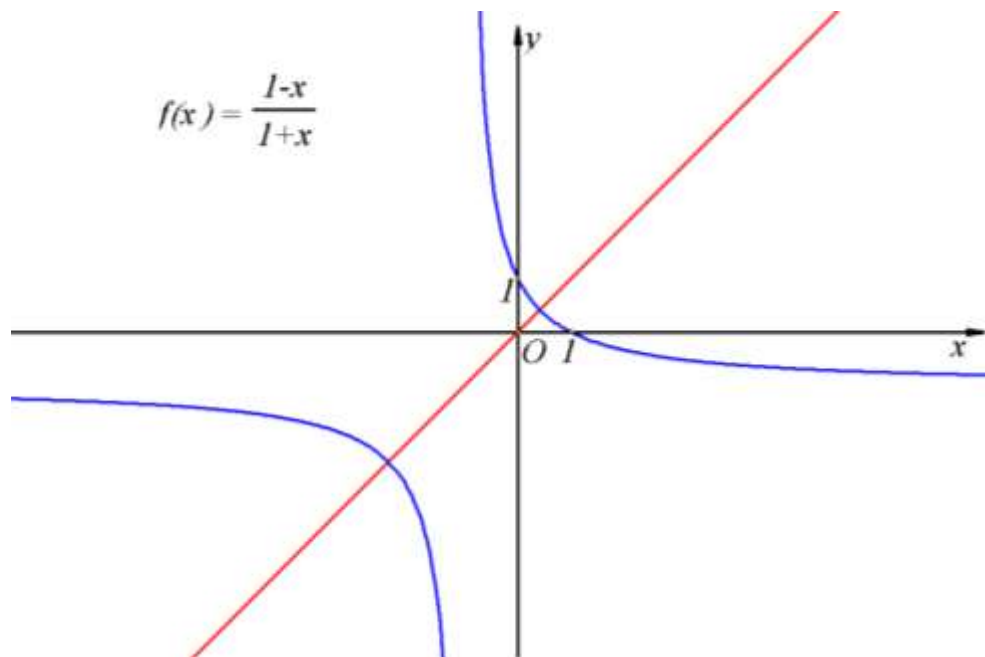
Пример 5. Да се намери обратната на дробно-линейната функция $y = \frac{1-x}{1+x}$.

Решение. Смяната $x \leftrightarrow y$ можем да извършим още в началото и така да получим $x = \frac{1-y}{1+y}$. Решаваме уравнението $x = \frac{1-y}{1+y}$ по отношение на y в следната последователност (както в предишния пример):

$$x = \frac{1-y}{1+y} \Rightarrow (1+y)x = 1-y \Rightarrow x + xy = 1-y \Rightarrow xy + y = 1-x \Rightarrow (x+1)y = 1-x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1-x}{1+x}.$$

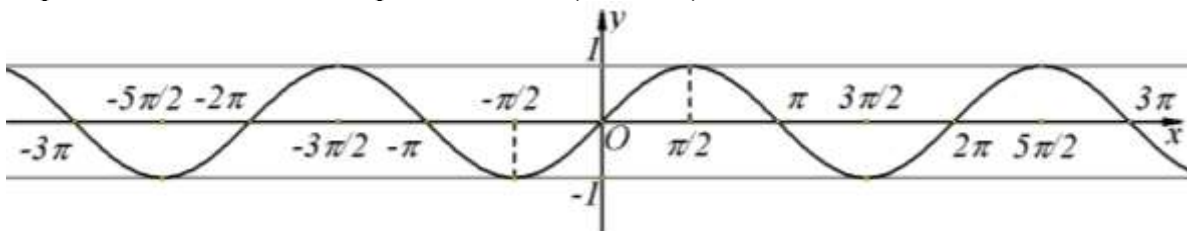
Получената функция $y = \frac{1-x}{1+x}$ съвпада с първоначалната, т.е. функцията е обратна сама на себе си. Затова графиката ѝ е симетрична спрямо ъглополовящата на първи-трети квадрант (Фиг. 10).



Фиг. 10

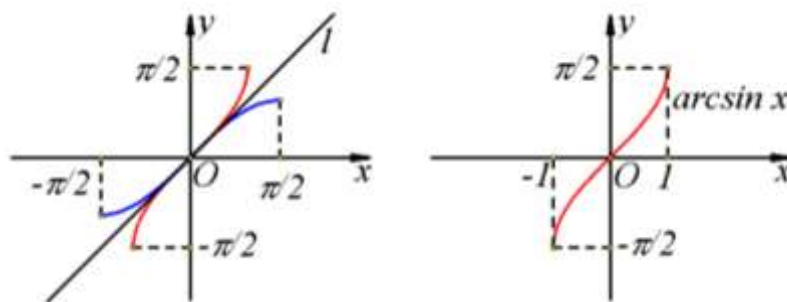
2. Тригонометрични и обратни тригонометрични функции.

2.1. Синус и аркуссинус. Функцията $f(x) = \sin x$ е дефинирана при $x \in (-\infty, +\infty)$, а областта от стойностите ѝ е $y \in [-1, 1]$. Тя е ограничена, нечетна и периодична с основен период $T = 2\pi$ (Фиг. 11).



Фиг. 11

Обратната на $f(x) = \sin x$ не може да се определи при $x \in (-\infty, +\infty)$, тъй като функцията синус приема всяка своя стойност безкраен брой пъти. Затова е необходимо да се свие дефиниционният ѝ интервал, така че в него тя да приема всяка своя стойност точно по един път. Един такъв интервал е $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, в който $\sin x$ приема всичките си стойности от интервала $[-1, 1]$ само по един път (Фиг. 11). Затова обратната на функцията $y = \sin x$ дефинираме, така че, когато $x \in [-1, 1]$, тя да получава онази стойност $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, за която $\sin y = x$ (Фиг. 12). Тази обратна функция се означава с $f(x) = \arcsin x$ и се нарича *аркуссинус* (Фиг. 12).



Фиг. 12

Пример 6. Да се пресметнат стойностите на:

- а) $\arcsin \frac{1}{2}$; б) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. а) Тъй като $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, то $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

б) Тъй като $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

в) Тъй като $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

От свойствата (1) и (2) на взаимно обратните функции следват равенствата:

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1, 1]; \quad (3)$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (4)$$

От графиката на фиг. 12 се вижда, че функцията $f(x) = \arcsin x$ е растяща, ограничена и симетрична спрямо координатното начало, т.е. тя е нечетна. Следователно е изпълнено равенството

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x. \quad (5)$$

Равенството (5) можем да използваме за пресмятане на стойностите на $f(x) = \arcsin x$, когато $x < 0$.

Пример 7. Да се пресметнат стойностите на:

- а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

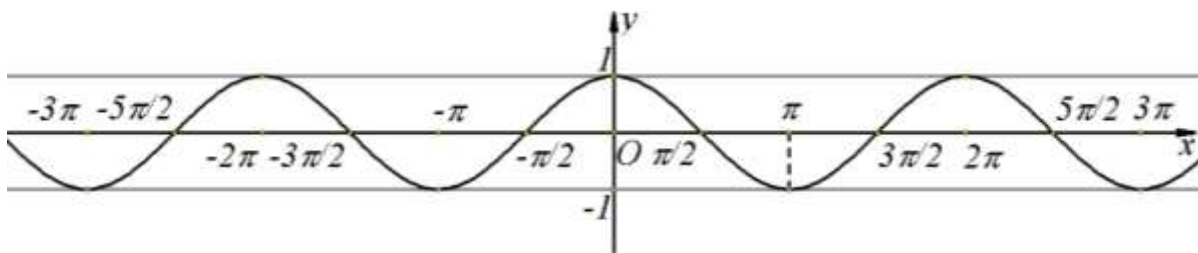
Решение. Като използваме резултатите от пример 6 получаваме съответно:

$$а) \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6};$$

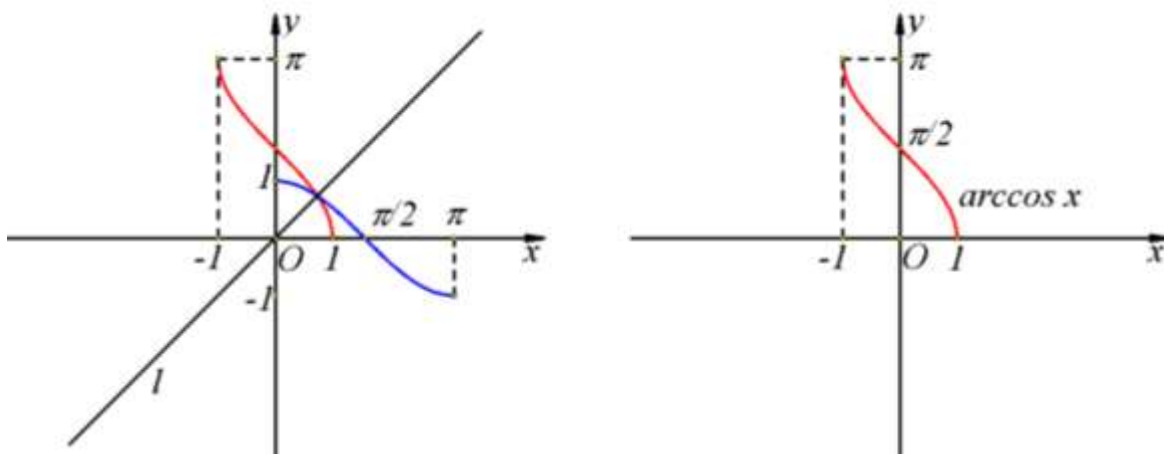
$$б) \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3};$$

$$в) \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}.$$

2.2. Косинус и аркускосинус. Функцията $y = \cos x$ е дефинирана при $x \in (-\infty, +\infty)$, а областта от стойностите ѝ е $y \in [-1, 1]$. Тя е ограничена, четна и периодична с основен период $T = 2\pi$ (Фиг. 13).



Фиг. 13



Фиг. 14

Обратната на $f(x) = \cos x$ не може да се определи при $x \in (-\infty, +\infty)$, тъй като функцията косинус приема всяка своя стойност безкраен брой пъти. Затова е необходимо да се свие дефиниционният ѝ интервал, така че в него тя да приема всяка своя стойност точно по един път. Един такъв интервал е $[0, \pi]$, в който $\cos x$ приема всичките си стойности от интервала $[-1, 1]$ само по един път (Фиг. 13). Затова обратната на функцията $y = \cos x$ дефинираме, така че, когато $x \in [-1, 1]$, тя да получава онази стойност $y \in [0, \pi]$, за която $\cos y = x$ (Фиг. 14). Тази обратна функция се означава с $f(x) = \arccos x$ и се нарича *аркускосинус* (Фиг. 14).

Пример 8. Да се пресметнат стойностите на:

- а) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arccos \frac{1}{2}$; в) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. а) Тъй като $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

б) Тъй като $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

в) Тъй като $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

От свойствата (1) и (2) на взаимно обратните функции следват равенствата:

$$\cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1, 1] \quad (6)$$

$$\arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0, \pi]. \quad (7)$$

От графиката на фиг. 14 се вижда, че функцията $f(x) = \arccos x$ е намаляваща, ограничена и симетрична спрямо точката $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Затова е изпълнено равенството

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x. \quad (8)$$

Равенството (8) можем да използваме за пресмятане на стойностите на $f(x) = \arccos x$, когато $x < 0$.

Пример 9. Да се пресметнат стойностите на:

а) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение. Като използваме резултатите от пример 8 получаваме съответно:

а) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$;

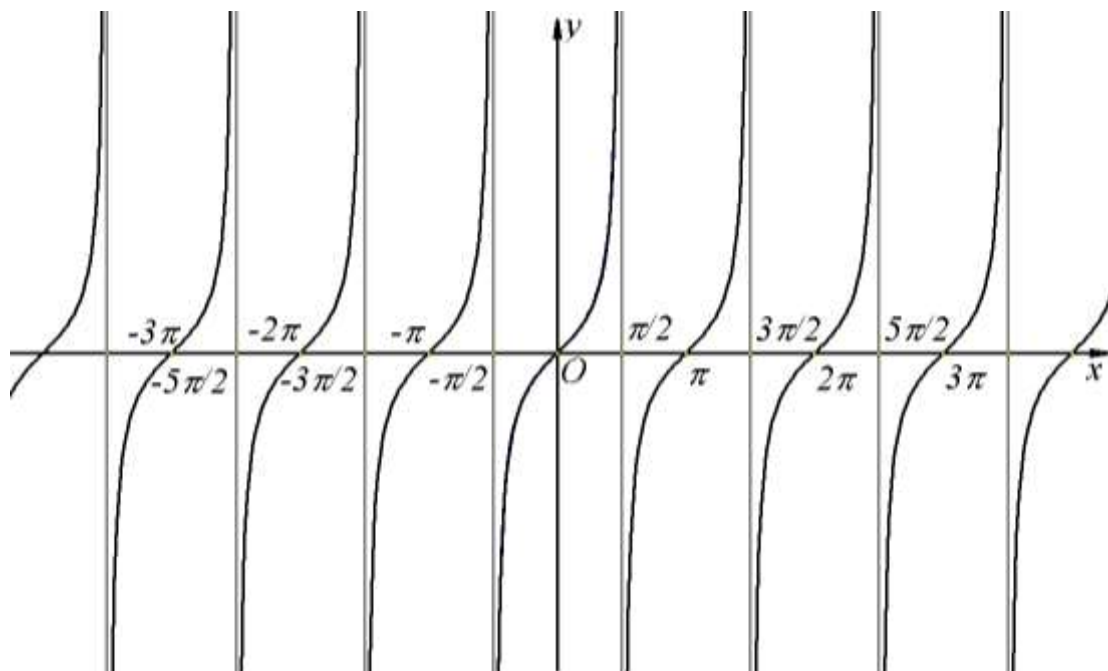
б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$;

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

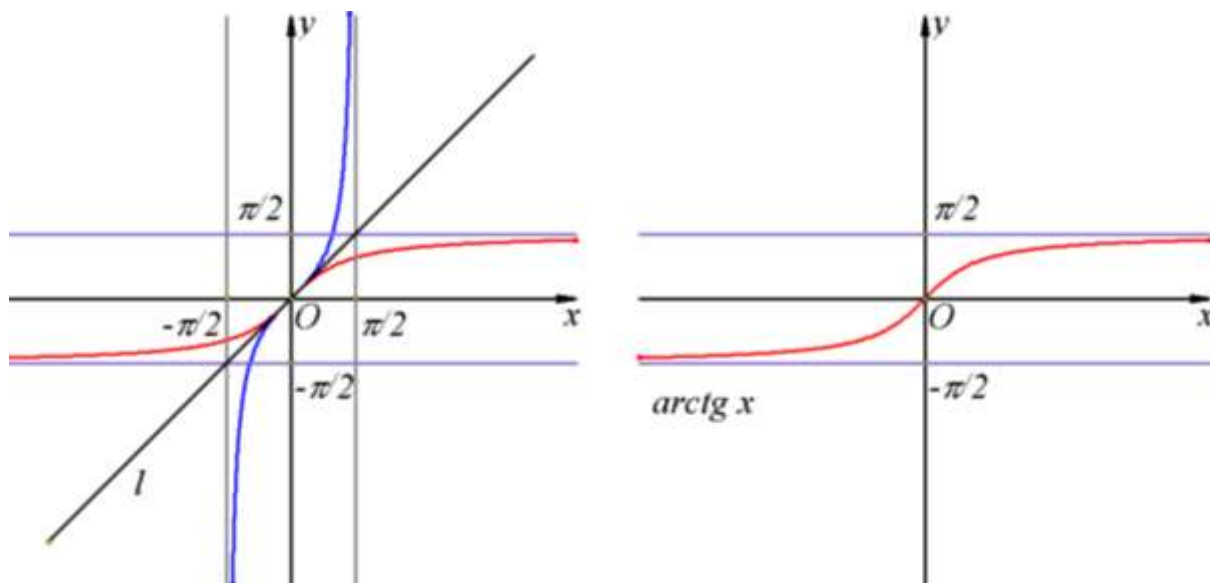
2.3. Тангенс и аркустангенс. Функцията $y = \operatorname{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$ е дефинирана при

$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$, а областта от стойностите ѝ е $y \in (-\infty, +\infty)$. Тя е нечетна, растяща и периодична с основен период $T = \pi$ (Фиг. 15).

Обратната на $f(x) = \operatorname{tg}x$ не може да се определи при $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$, тъй като функцията тангенс приема всяка своя стойност безкраен брой пъти. Затова е необходимо да се свие дефиниционното ѝ множество, така че в него тя да приема всяка своя стойност точно по един път. Един такъв интервал е $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в който $\operatorname{tg}x$ приема всичките си стойности от реалната права $(-\infty, +\infty)$ само по един път (Фиг. 15). Затова обратната на функцията $y = \operatorname{tg}x$ дефинираме, така че, когато $x \in (-\infty, +\infty)$, тя да получава онази стойност $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, за която $\operatorname{tgy} = x$ (Фиг. 16). Тази обратна функция се означава с $f(x) = \operatorname{arctg}x$ и се нарича *аркустангенс* (Фиг. 16).



Фиг. 15



Фиг. 16

Пример 10. Да се пресметнат стойностите на:

а) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

в) $\operatorname{arctg} 1$.

Решение. а) Тъй като $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, то $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$.

б) Тъй като $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, то $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

в) Тъй като $tg \frac{\pi}{4} = 1$, то $arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

От свойствата (1) и (2) на взаимно обратните функции следват равенствата:

$$tg(arctg x) = x, \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (9)$$

$$arctg(tg x) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (10)$$

От графиката на фиг. 16 се вижда, че функцията $f(x) = arctg x$ е растяща, ограничена и симетрична спрямо координатното начало, т.е. тя е нечетна. Следователно е изпълнено равенството

$$arctg(-x) = -arctg x. \quad (11)$$

Равенството (11) можем да използваме за пресмятане на стойностите на $f(x) = arctg x$, когато $x < 0$.

Пример 11. Да се пресметнат стойностите на:

а) $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; б) $arctg(-\sqrt{3})$; в) $arctg(-1)$.

Решение. Като използваме резултатите от пример 10 получаваме съответно:

а) $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$;

б) $arctg(-\sqrt{3}) = -arctg \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$;

в) $arctg(-1) = -arctg 1 = -\frac{\pi}{4}$.

2.4. Котангенс и аркускотангенс. Функцията $y = ctg x = \frac{\cos x}{\sin x}$ е дефинирана при $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$, а областта от стойностите ѝ е $y \in (-\infty, +\infty)$. Тя е нечетна, намаляваща и периодична с основен период $T = \pi$ (Фиг. 17).

Обратната на $f(x) = ctg x$ не може да се определи при $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$, тъй като функцията котангенс приема всяка своя стойност безкраен брой пъти. Затова е необходимо да се свие дефиниционното ѝ множество, така че в него тя да приема всяка своя стойност точно по един път. Един такъв интервал е $(0, \pi)$, в който $ctg x$ приема всичките си стойности от реалната права $(-\infty, +\infty)$ само по един път (Фиг. 17). Затова обратната на функцията $y = ctg x$ дефинираме, така че, когато $x \in (-\infty, +\infty)$, тя да получава онази стойност $y \in (0, \pi)$, за която $ctg y = x$ (Фиг. 18). Тази обратна функция се означава с $f(x) = arcctg x$ и се нарича *аркускотангенс* (Фиг. 18).

От графиката на фиг. 18 се вижда, че функцията $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ е намаляваща, ограничена и симетрична спрямо точката $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Затова е изпълнено равенството

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x. \quad (14)$$

Равенството (14) можем да използваме за пресмятане на стойностите на $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, когато $x < 0$.

Пример 13. Да се пресметнат стойностите на:

а) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$; б) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; в) $\operatorname{arcctg}(-1)$.

Решение. Като използваме резултатите от пример 12 получаваме съответно:

а) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$;

б) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$;

в) $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Chimev, K. (1971). *Obratni trigonometrični funkcii*. Sofia: Tehnika.
2. Gurskiy, I. (1968). *Funktsii i postroenie grafikov*. Moskva, Prosveshtenie.
3. Manolov, S., Deneva, A., Genov, A., Shopolov, N. (1977). *Matematika. Chast 2*. Sofia, Tehnika.
4. Markushevich, A., Markushevich, L. (1980). *Uvod v teoria na analitichnite funkcii*. Sofia, Nauka i izkustvo.
5. Novoselov, S. (1957). *Obratnye trigonometricheskie funkcii*. Moskva, Sovetskaya nauka.
6. Stewart, J. (2015). *Calculus, Eighth edition*. Boston, USA: Cengage Learning.
7. Waner, S., Costenoble, S. (2023) *Finite Mathematics and Applied Calculus, Eighth edition*. Boston, USA: Cengage Learning.

METHODOLOGICAL ASPECT OF THE PROBLEM OF CONTINUITY OF SCHOOL AND UNIVERSITY MATHEMATICAL EDUCATION

Full Professor Maria Shabanova, DrSci

Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov, RUSSIA

Associate professor Larisa Udovenko, PhD

Moscow Pedagogical State University, Private educational institution of higher education Saint Tikhon's Orthodox University for the Humanities, RUSSIA

Abstract: *The unresolved problem of continuity of school and university mathematical education is one of the reasons for the expulsion of students from the first courses of those areas of training that provide for the continuation of mathematical education. The complexity of solving this problem is related to its complex nature: the difference in the requirements for the level of mathematics of graduates of secondary schools and university students, the rupture of meaningful links between school and university mathematics courses, the change in the form of the organization of the educational process. The article highlights and reveals another aspect of this problem – the methodological one. The authors present the theoretical foundations and an example of creating methodological conditions that facilitate the student's transition from one form of educational cognition to another.*

Keywords: *Athematical education at the university; The problem of continuity; Methodological aspect*

JEL code: C00

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ПРОБЛЕМЫ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ ШКОЛЬНОГО И ВУЗОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Профессор, д.п.н., Мария Шабанова

Северный (Арктический) федеральный институт имени М.В.Ломоносова, Россия

Доцент, к.п.н., Лариса Удовенко

*Московский Педагогический государственный университет,
Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Россия*

Проблема преемственности школьного и вузовского математического образования с философской точки зрения представляет собой нарушение диалектического закона «отрицания отрицания» в системе «школа- вуз».

Изучению сущности этой проблемы посвящены многочисленные экспериментальные исследования, проводимые по инициативе математических кафедр вузов, а также в рамках индивидуальных исследований при подготовке докторских и кандидатских диссертаций.

Исследователями выделяются несколько аспектов данной проблемы:

– разница в требованиях к уровням математической подготовки выпускников средних общеобразовательных школ и к студентам первого курса, где для первых требования задаются ФГОС СОО (Министерство образования и науки Российской Федерации, 2022), а для вторых определяются содержанием вузовских

математических курсов;

– различия в способах организации учебного процесса в школе и в вузе: переход от классно-урочной системы проведения учебных занятий к лекционно-семинарской, резкое повышение доли самостоятельной учебной работы, снижение контроля за результатами учебного труда и др.;

– разрыв содержательных связей между вузовским и школьным курсами математики.

Устранение этих разрывов в системе российского математического образования осуществляется за счет: отказа от проведения выпускных и вступительных экзаменов по математике соответственно в школе и в вузе и заменой их Единым государственным экзаменом по математике профильного уровня (с 2004 года по настоящее время); развития практики использования лекционно-семинарской системы на старшей ступени общего образования с приглашением для чтения научно-популярных лекций вузовских преподавателей математики, включением в программу подготовки учащихся профильных классов спецкурсов, реализуемых на базе университетов – партнеров; пропедевтического изучения в школе элементов высшей математики (с 1960 года (Марнянский, 1964: 3) в школьный курс математики включены элементы математического анализа, с 2004 года в обязательный минимум программ по математике включены элементы теории вероятностей, комбинаторики и математической статистики (Министерство образования и науки Российской Федерации, 2017: 66).

Помимо вышеперечисленных аспектов преемственности школьного и вузовского математического образования важно учесть и методологический аспект, который обращает нас к проблеме методологической преемственности.

Под проблемой методологической преемственности школьного и вузовского математического образования мы будем понимать отсутствие методических условий, способствующих постепенному («безболезненному») замещению одной формы учебного познания, свойственной школьному изучению математики, другой формой познания, предъявляемой вузом.

Для процесса изучения математики в основной и старшей общеобразовательной школе характерна *метаэмпирическая форма учебного познания с элементами дедукции*, характеризуемая частичной аксиоматизацией, преобладанием понятий модельной природы, а для базовых вузовских курсов математики – *квазиэмпирическая форма*, характеризуемая глобальной аксиоматизацией, многоуровневыми математическими абстракциями, изоморфными и гомоморфными связями изучаемых математических теорий.

В исследовании Т. Куна (2003) подробно описан процесс перехода от одной формы научного познания к другой. Для обозначения связанной с этим проблемы Т. Кун ввел понятие парадигмального кризиса, понимая под парадигмой научного знания систему устойчивых, стабильных, понятных всем специалистам данной научной области и принятых ими знаний, которые служат теоретической и идейной основой научных исследований, а также систему образцов решения научных проблем.

Носителем парадигмальных знаний, по его мнению, является научное сообщество – объединение ученых, разрабатывающих сходные проблемы. Появление научных знаний, результатов исследований, выходящих за рамки парадигмальных ожиданий, порождают, в терминологии Т. Куна, *аномальные*

ситуации или просто аномалии.

Заметим, что по мнению Т. Куна «Изучение парадигм является тем, что главным образом и подготавливает студента к членству в том или ином научном сообществе» (Кун, 2003: 29).

Примерный перечень аномальных учебных ситуаций, которые подлежат разбору для облегчения студентам перехода от метаэмпирической формы познания с элементами дедукции в школе к квазиэмпирической форме познания в вузе представлены в таблице 1.

Таблица 1

Примерный перечень учебных аномальных ситуаций

Аномальные учебные ситуации	Реакции неподготовленных студентов на появление аномальных учебных ситуаций
I. Аномальные учебные ситуации, вызванные нарушением непосредственной связи математического знания с реальностью	
1.1. Обнаружение относительной независимости истинностной оценки математических утверждений от их смыслового значения	Отказ от оценки истинностного значения высказываний через истинностную оценку атомарных высказываний и использование определений логических понятий. Подмена оценкой истинностного значения через осмысление содержания высказываний. Невозможность осмысления содержания высказывания приводит к отказу от выполнения задания или к действиям наугад. Отказ от использования тех научных данных об истинностном значении высказываний, которые не подтверждаются оценкой их смыслового значения
1.2. Необходимость обоснования существования математических объектов, удовлетворяющих определению математического понятия	Трудности вскрытия причин софизмов, основанных на противоречивости данных. Опускание теорем о существовании при воспроизведении теории, а также отказ от их использования в качестве теоретической базы решения задач. Подмена доказательства существования математических объектов обоснованием существования их реальных прообразов
1.3. Обнаружение несоответствия результатов логического познания результатам эмпирического познания	Использование в качестве теоретической базы рассуждений знаний (правил), полученных в результате чувственного восприятия действительности, даже при наличии противоречащих им научных фактов (альтернативных правил)
1.4. Необходимость проведения логических рассуждений о математических понятиях, не подкреплённых чувственным образом	Подмена дедуктивных рассуждений об объектах, не имеющих чувственного образа, индуктивными (подмена доказательства примерами ситуаций). Потеря ориентировки (направления) в процессе осуществления логических рассуждений с

	участием математических объектов, которые не подкреплены чувственным образом
1.5. Необходимость варьирования образа математического объекта: класс эквивалентности или его представитель	Невозможность проведения рассуждений, требующих отказа от восприятия класса эквивалентности как конкретного овеществленного объекта. Отказ от распространения на математические объекты понятий, требующих его осмысления как класса эквивалентности
1.6. Необходимость варьирования критериев успешности решения задачи в зависимости от внешних условий ее постановки. (Потенциально и актуально разрешимые задачи; условная, позиционная, метрическая разрешимость и т.п.)	Использование в качестве критериев успешности математической деятельности учительских требований, закрепленных в опыте. Невозможность изменения критериев успешности при изменении условий осуществления деятельности. Отказ от использования результатов математической деятельности, не соответствующих субъективным критериям успешности
II. Аномальные учебные ситуации, вызванные иерархизацией предметных областей математической науки	
2.1. Необходимость переосмысления ранее известных математических понятий с точки зрения новых, более общих понятий	Подмена содержательного описания свойства абстрактного математического понятия свойствами его содержательных моделей. Полный перенос свойств содержательных моделей абстрактного понятия на само это понятие. Переход от рассуждений об абстрактных понятиях к рассуждениям об его содержательных моделях
2.2. Обнаружение возможности сопоставления содержательно далеких математических понятий	Трудности иллюстрации абстрактных математических понятий содержательными моделями, относящимися к различным математическим теориям. Невозможность выделения свойств, с точки зрения которых содержательно далекие математические понятия являются сопоставимыми. Отказ от отождествления содержательно далеких математических понятий в рамках абстрактной математической теории
2.3. Возможность самоприменимости математических понятий	Трудность определения содержательного смысла высказываний, связанных с самоприменимостью понятий. Отказ от использования математических утверждений, основанных или являющихся результатом самоприменимости понятий

III. Аномальные учебные ситуации, связанные с выявлением логической структуры математических утверждений и математической теории	
3.1. Необходимость изменения логической структуры математических утверждений в процессе их обоснования, использования, а также получения на их основе новых утверждений	Трудность выделения логической структуры сложных высказываний и предикатов. Отказ от использования методов, основанных на изменении логической структуры высказываний. Отказ от опоры на те утверждения, логическая структура которых не соответствует цели использования без попыток внесения изменений в их логическую структуру
3.2. Обнаружение факта зависимости истинностного значения утверждения от его логической структуры	Неумение осуществлять оценку области истинности и области задания сложного предиката по знанию области истинности и области задания его атомов
IV. Аномальные учебные ситуации, связанные с интеграцией понятийного аппарата математической науки	
4.1. Необходимость варьирования образа (трактовки) математического понятия в зависимости от ситуации использования	Трудности при осуществлении деятельности, связанной с комплексным использованием нескольких образов (трактовок) одного математического объекта (понятия). Невозможность адаптации образа (трактовки) математического объекта (понятия) к условиям оперирования с ним
4.2. Обнаружение нетождественности языковой (символьной) формы математического объекта самому объекту	Трудности, связанные с изменением формы описания (способа задания) математического объекта. Невозможность проведения рассуждений о математическом объекте, заданном в форме, для которой не установлены необходимые правила оперирования. Трудности распознавания в математических объектах понятий, заданных в вырожденной форме. Восприятие одних и тех же математических понятий, обозначенных разными терминами или символами, как различных, не связанных понятий

Практика показывает, что далеко не все студенты могут сами найти выход из этих ситуаций, поскольку их разрешение требует принятия новых методологических установок на основе рефлексивного анализа довольно большого количества познавательных актов.

Нами установлено, что при проектировании методических условий, помогающих студенту найти выход из аномальной ситуации, необходимо исходить из структуры элементарного акта методологической преемственности, представленной рисунками 1, 2 и 3.

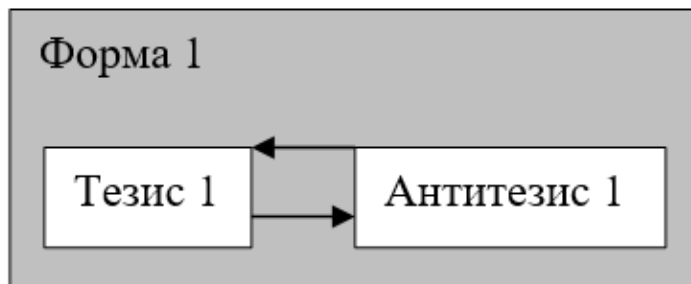


Рис.1. Возникновение аномальной ситуации (неразрешимого противоречия между парадигмальным ожиданием и научным фактом) в рамках действующей формы познания

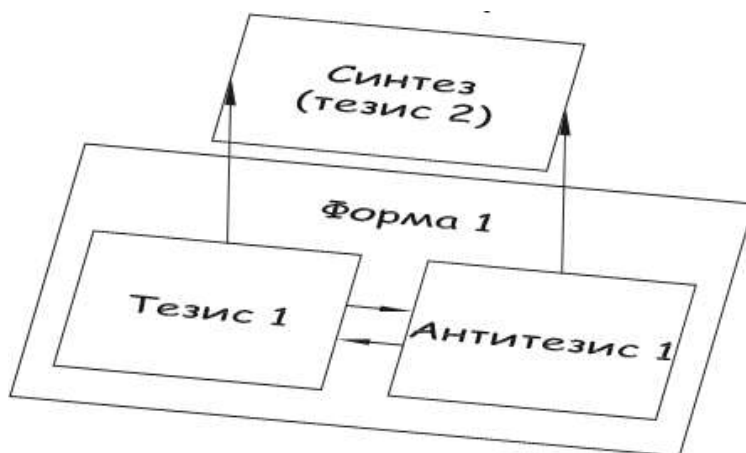


Рис. 2. Разрешение противоречия, лежащего в основе аномальной ситуации, за счет выхода за пределы этой формы познания

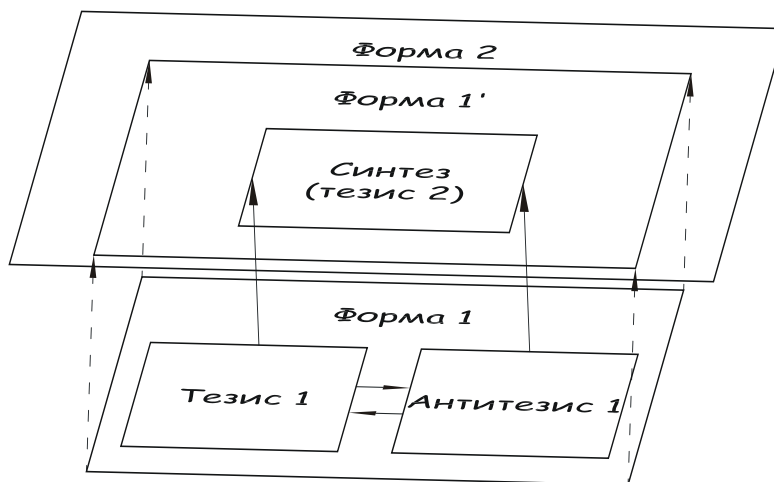


Рис. 3. Проецирование старой формы познания на новую

Рассмотрим в качестве примера методических условий, помогающих студенту найти выход из аномальной ситуации, серию задач на применение *теоремы о предельном переходе*.

Пусть даны три функции: $y = \varphi(x)$; $y = f(x)$ и $y = g(x)$ такие, что для всех $x > x_0$ справедливо неравенство $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$.

$$\text{Если } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = a, \text{ то } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = a. \quad (1)$$

Эта теорема может быть сформулирована и для $x \rightarrow -\infty$, и для $x \rightarrow x_0$.

В России и Болгарии данную теорему часто называют теоремой «о двух милиционерах».

Задача 1 (нормальная ситуация). Найдите пределы функций с использованием теоремы о предельном переходе:

а) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \sin^3 x)$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 5} - \sqrt{x^2 + 2})$.

Задача 2 (аномальная ситуация). Пусть положительная функция f возрастает на $[0; +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$. Докажите, пользуясь теоремой о предельном переходе, что

для любого $c > 0$ справедливо $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$.

Главным отличием задачи 1 от задачи 2 является разное представление функции. Задание функций формулами в задаче 1 соответствует метаэмпирической форме познания с элементами дедукции, которая сформирована у студентов первого курса при изучении математики на ступени основного и среднего общего образования. Формулы позволяют создать чувственный образ рассматриваемых функций, подкрепить и проверить правильность рассуждений, опираясь на графические представления рассматриваемых зависимостей, знания свойств элементарных функций, правила тождественных преобразований. Если не стоит специальная задача исследования свойств функции для построения её графика, допустимо обращение в подобных ситуациях к помощи графических калькуляторов (например, к Desmos или GeoGebra).

Графики функций из задачи 1 представлены на рисунках 4 и 5.

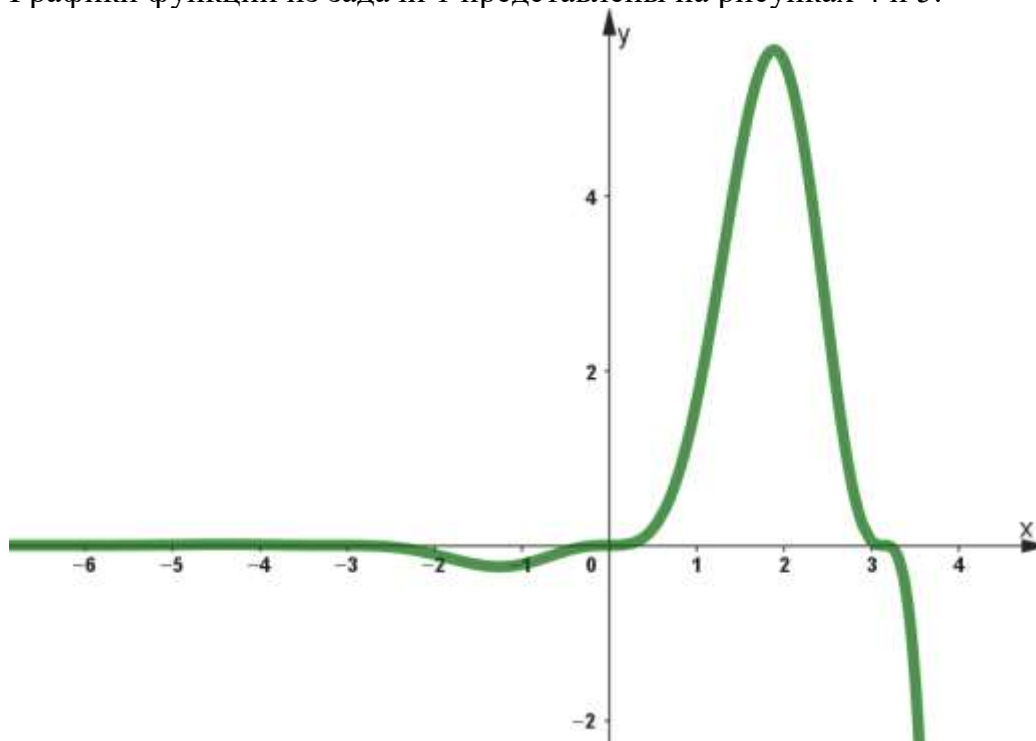


Рис. 4. График функции $y = e^x \cdot \sin^3 x$

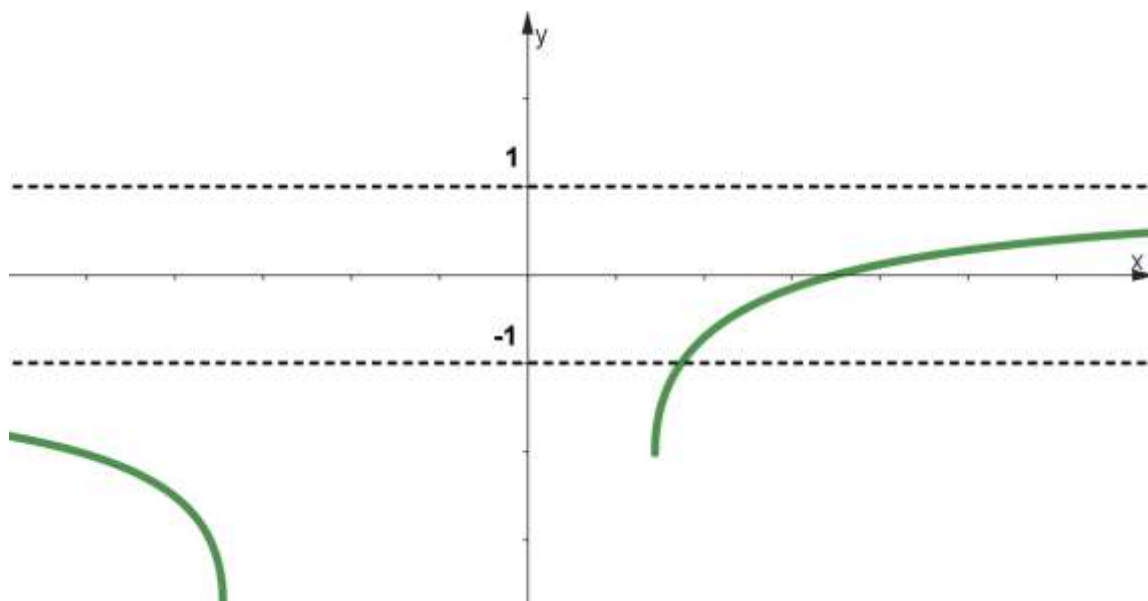


Рис. 4. График функции $y = \sqrt{x^2 + 2x - 5} - \sqrt{x^2 + 2}$

Решение задачи 1а в части подбора «сжимающих» функций полностью опирается на знания, полученные студентами при изучении математики в школе. Им известно, что $-1 \leq \sin x \leq 1$, $y = t^3$ – определенная на множестве действительных чисел возрастающая функция, следовательно, $-1 \leq \sin^3 x \leq 1$. Функция $y = e^x$ принимает только положительные значения, следовательно, $-e^x \leq e^x \cdot \sin^3 x \leq e^x$. Знания свойств показательной функции $y = e^x$ и правил преобразования графиков функций дают возможность получить вывод о том, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$.

Тогда по теореме о предельном переходе $0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \sin^3 x \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ можно сделать вывод: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \sin^3 x = 0$.

Решение задачи 1 б, как правило, сразу же начинается с попытки избавиться от иррациональности, что приводит к такому результату:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 5} - \sqrt{x^2 + 2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-5}+\sqrt{x^2+2}}$$

Поиск ограничений для получившейся функции требует от студентов не только знания свойств элементарных функций, но и умения провести сравнение и оценку значений этих функций. Этому учат в школе. Однако в данном случае необходимо создать «чувственный образ» функции при задаваемых значениях аргумента

$x = +\infty$, что в некотором смысле даёт основу для формирования у студентов *квазиэмпирической* формы познания. Итак, проведем оценку полученной функции

$$f(x) = \frac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-5}+\sqrt{x^2+2}} \text{ слева и справа при } x = +\infty.$$

Оценка слева:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 5 > x^2 \text{ (для } x \rightarrow +\infty) &\Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 5} > x; \\ x^2 + 2 > x^2 &\Rightarrow \sqrt{x^2 + 2} > x. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \left. \begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x - 5} > x \\ \sqrt{x^2 + 2} > x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 5} + \sqrt{x^2 + 2} > 2x.$$

$$\text{Учитывая } 2x - 7 < 2x, \text{ можно говорить о том, что } \frac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-5}+\sqrt{x^2+2}} < 1.$$

Оценка справа. Сначала оценим знаменатель:

$$x^2 + 2x - 5 = x^2 + 2x + 1 - 6 = (x + 1)^2 - 6 < (x + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 5} < x + 1;$$

$$x^2 + 2 < x^2 + 2x + 1 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2} < x + 1.$$

Тогда
$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 2x - 5} < x + 1 \\ \sqrt{x^2 + 2} < x + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 5} + \sqrt{x^2 + 2} < 2x + 2.$$

Опираясь на умения сравнивать значения обыкновенных дробей получаем

$$\frac{\sqrt{x^2 + 2x - 5} + \sqrt{x^2 + 2}}{2x - 7} > \frac{2x - 7}{2x + 2} = \frac{2x + 2 - 9}{2x + 2} = 1 - \frac{9}{2x + 2}$$

и переходим к рассмотрению неравенства
$$\frac{2x-7}{2x+2} < \frac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-5}+\sqrt{x^2+2}} < 1.$$

Сделать окончательный вывод позволяет теорема о предельном переходе:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{9}{2x+2}\right) < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-5}+\sqrt{x^2+2}} < \lim_{x \rightarrow +\infty} 1;$$

$$1 < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-5}+\sqrt{x^2+2}} < 1.$$

Получаем
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 5} - \sqrt{x^2 + 2}) = 1.$$

Отсутствие в формулировке задачи 2 данных о формуле, задающей функцию $y = f(x)$, является аномальной ситуацией для студентов, так как придется действовать в отсутствии чувственного образа.

Чаще всего, студенты оказываются ограниченными рамками действующей формы познания. Испытывая потребность в установлении конкретной функции – «чувственного образа», они пытаются сконструировать пример функции, удовлетворяющей условиям задачи, и затем использовать его для доказательства. Предлагаем им предоставить такую возможность. Вскоре они сами откажутся от этой идеи по одному или обоим соображениям: 1) попытки сконструировать функцию оказались неудачными; 2) доказательство, проведенное для сконструированной функции, является всего лишь доказательством частного случая, и не гарантирует справедливости утверждения для всех функций, удовлетворяющих условию задачи.

Остановка деятельности является условием выхода за пределы, задаваемые действующей формой познания. Помощь преподавателя оказывается самой действенной именно в этот момент. Первое, что нужно сделать, помочь студентам осознать причины возникших затруднений. Предложить им сконцентрировать внимание на поиске ограничивающих функций для её аргумента.

Так как $c > 0$, то для любого его значения найдется $k \in \mathbb{Z}$ такое, что справедливо двойное неравенство: $2^k \leq c < 2^{k+1}$. Так как мы рассматриваем только $x > 0$, то справедливо $2^k x \leq cx < 2^{k+1} x$.

В силу возрастания $f(x)$ имеем: $f(2^k x) \leq f(cx) \leq f(2^{k+1} x)$.

Из условия $f(x) > 0$:
$$\frac{f(2^k x)}{f(x)} \leq \frac{f(cx)}{f(x)} \leq \frac{f(2^{k+1} x)}{f(x)}.$$

По теореме о предельном переходе (1) получаем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2^k x)}{f(x)} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2^{k+1} x)}{f(x)}. \quad (2)$$

Найдем
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2^k x)}{f(x)} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2^{k+1} x)}{f(x)}.$$

Для этого представим
$$\frac{f(2^k x)}{f(x)}$$
 в виде:

$$\frac{f(2^k x)}{f(x)} = \frac{f(2^k x)}{f(x)} \cdot \frac{f(2^{k-1} x)}{f(2^{k-1} x)} = \frac{f(2^{k-1} x)}{f(x)} \cdot \frac{f(2^{k-2} x)}{f(2^{k-2} x)} = \dots = \frac{f(2^2 x)}{f(x)} \cdot \frac{f(2x)}{f(2x)} = \frac{f(2x)}{f(x)}$$

Аналогично, $\frac{f(2^{k+1}x)}{f(x)} = \frac{f(2x)}{f(x)}$. Тогда, $\frac{f(2^{k+1}x)}{f(x)} = \frac{f(2^k x)}{f(x)} = \frac{f(2x)}{f(x)}$.

Учитывая условие задачи $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2^k x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2^{k+1}x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$.

С учетом (2) получаем: $1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2^k x)}{f(x)} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2^{k+1}x)}{f(x)} = 1$.

Итак, в заданных условиях имеем $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$, что и требовалось доказать.

После приведённого доказательства полезно вновь вернуться к конструированию конкретной функции, удовлетворяющей условиям задачи. Например, это может быть функция $f(x) = \ln^2 x$ или более широкий класс функций $f(x) = \ln^\alpha x$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Для комплексного решения проблем, связанных с переходом к новой форме познания, характерной для базовых вузовских курсов математики, в учебные планы вузов часто включают подготовительный курс «Введение в математику». В программу данного курса (Шабанова и др., 2008) входят логические и теоретико-множественные основы математики, элементарные функции одной действительной переменной, элементы теории равносильности уравнений и неравенств. Здесь, в частности, имеется большая подборка задач, которая готовит начинающих студентов к встрече с аномальными ситуациями, подобными рассмотренной.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Министерство образования Российской Федерации (2017) Федеральные компоненты государственного стандарта общего образования // Приказ Министерства образования Российской Федерации от 05.03.2004 г. № 1087 ред. от 07.06.2017 г.) «Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования», 286 с.: <https://gos-ooo-2004-g.pdf> (my1.ru).

2. Марьянский, И.А. (1964) *Элементы математического анализа в школьном курсе математики: пособие для учителя*. Москва: Просвещение, 144 с.

3. Кун, Т. (2003) *Структура научных революций* [Руский яз.], Сост. В. Ю. Кuznetsov; Пер. с англ. И. З. Naletova и др. Москва, AST, 606 с.

4. Министерство образования Российской Федерации (2022) О внесении изменений в федеральные государственные образовательные стандарты среднего общего образования, утвержденных приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 г. № 413 // Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 12.08.2022 г. № 732: <https://edsoo.ru/normativnye-dokumenty/>

5. Shabanova, M.V., Kotova, S.N., Popov, I.N., Bezumova, O.L. (2008) *Vvedenie v matematiku: uchebnoe posobie*. Arhangel'sk, Pomorskiy universitet, 203 s.

ON EXPERIMENTAL STUDY OF NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES WITHIN TRAINING TEACHERS

Full Professor Alexander Yastrebov, DrSci

Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D.Ushinski, RUSSIA

Abstract. *A set of computer instruments, created by the author within dynamic geometry system GeoGebra, is described. Some special methods of using these instruments are proposed. The instruments help students to create dynamic drawings within the model by Cayley–Klein for discovering some theorems of Lobachevskian geometry.*

Keywords: *Dynamic geometry system; Experimental study; Instrument; Lobachevskian geometry; Model by Cayley–Klein.*

JEL code: C00

ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ИЗУЧЕНИИ НЕЕВКЛИДОВЫХ ГЕОМЕТРИЙ В ПРОЦЕССЕ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЕЙ

Профессор Александр Ястребов, доктор педагогических наук

Ярославский гос. педагогический университет им. К.Д. Ушинского, РОССИЯ

Одна из традиций подготовки учителей математики в России состоит в том, что ее геометрическому компоненту уделяется серьезное внимание. Об этом говорит тот факт, что курс геометрии изучается в течение четырех лет. Об этом же говорит один из элементов планирования курса – целый семестр посвящен изучению оснований геометрии. В нем подробно рассматривается аксиоматический метод построения математической теории, особенности применения этого метода в геометрии, несколько аксиоматик евклидовой геометрии, некоторые примеры неевклидовых геометрий. Среди примеров неевклидовых геометрий особое место занимает геометрия Лобачевского, и причин тому две: особая роль этой геометрии в развитии математики и исторический факт ее изобретения в России. В настоящей статье пойдет речь об изучении геометрии Лобачевского экспериментальным методом.

Известно, что создание евклидовой геометрии, равно как и ее последующее изучение, неразрывно связано с чертежами. Студенту доступны канонические циркуль и линейка, двусторонняя линейка, угольник, шаблон прямого угла, масштабная линейка, транспортир... Панель инструментов системы динамической математики (СДМ) GeoGebra содержит 71 инструмент и предусматривает возможность создания новых инструментов. Такое богатство позволяет студенту проводить разнотипные эксперименты с математическими объектами с целью обнаружения неизвестных ему свойств, проверки возникающих гипотез и т.д.

Парадоксально, но с переходом к геометрии Лобачевского ситуация радикально меняется! Чертежные инструменты исчезают, новые факты возникают как результат чисто умственных, логических действий, а чертежи становятся условными. Достаточно вспомнить каноническое изображение четырехугольника Саккери, на котором две его стороны изображаются в виде отрезков прямой, а две другие стороны – в виде искривленных линий (рис. 0). Автор не встречал в литературе никаких указаний на природу этих кривых.

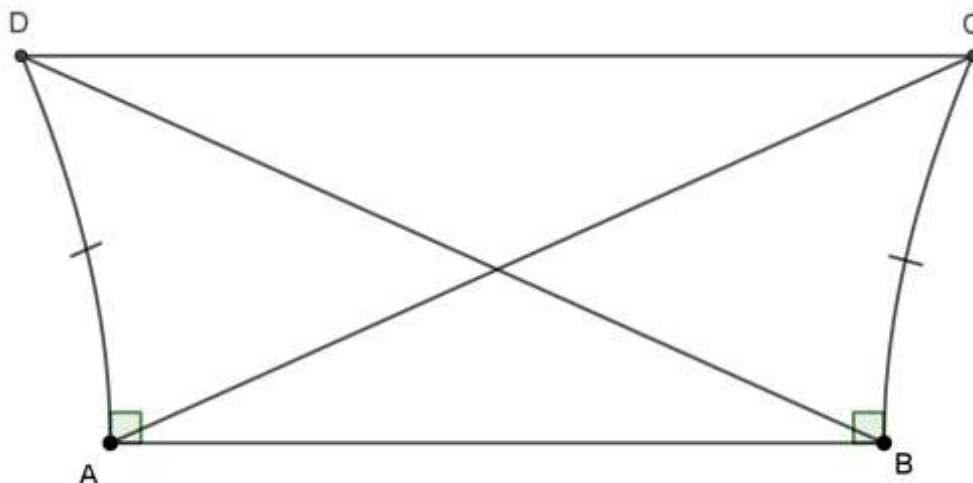


Рис. 0. Четырехугольник Саккери

Их нет ни в классической и полной монографии (Каган, 1956), ни в официальном двухтомном учебнике для педагогических вузов (Базылев, 1975), ни в подробнейшей книге для учащихся (Атанасян, 2001). В результате «никому» неизвестно, будут ли эти стороны фрагментами экспонент, или синусоид, или окружностей, или гипербол...

В этих условиях была предпринята попытка создания системы инструментов для СДМ GeoGebra, которая позволила бы проводить основные построения на модели Кэли–Клейна геометрии Лобачевского. Математические свойства этих инструментов обсуждались в работах (Ястребов и Кошелева, 2019; Ястребов, 2020). В данной статье мы сосредоточимся на описании той методики их использования, которая была применена автором в процессе преподавания курса геометрии.

Перечень инструментов является естественным, неизбежным и потому банальным. Прежде всего, это инструменты, предназначенные для построения основных объектов геометрии: *Прямая, Луч, Отрезок*. Кроме того, это инструменты, связанные с параллельностью прямых: *Параллельная прямая* и *Луч, параллельный данному*. Четыре следующих инструмента связаны с перпендикулярностью: *Перпендикуляр к прямой, Перпендикуляр к лучу, Перпендикуляр к отрезку, Серединный перпендикуляр*. Два инструмента связаны с идеей срединности: *Середина, Биссектриса*. Наконец, два инструмента связаны с измерениями: *Расстояние, Мера угла*.

Стартовые знания студента о геометрии Лобачевского сознательно могут быть сделаны весьма ограниченными. Во-первых, это краткий очерк истории ее возникновения. Во-вторых, это всего лишь одно, базовое соглашение: точки геометрии Лобачевского – это все точки открытого круга радиуса 1. Остальные объекты студенту предстоит построить (а свойства объектов выявить) в процессе использования перечисленных инструментов.

Окружность изучаемого круга для краткости будем называть абсолютом.

Предложим серию заданий, каждое из которых будет сопровождаться двумя пассажирами: обсуждением и рефлексией. Первый из них посвящен математическому решению, а второй – психологическому воздействию на студента самого процесса решения.

Задание 1. Каков геометрический смысл точки на абсолюте?

Обсуждение. Парадоксально, но ответ на вопрос вытекает из правила чтения ... географических карт. Если не оговорено противное, то верхняя граница прямоугольной карты соответствует направлению на север, правая граница – на восток и т.д. (рис. 1).

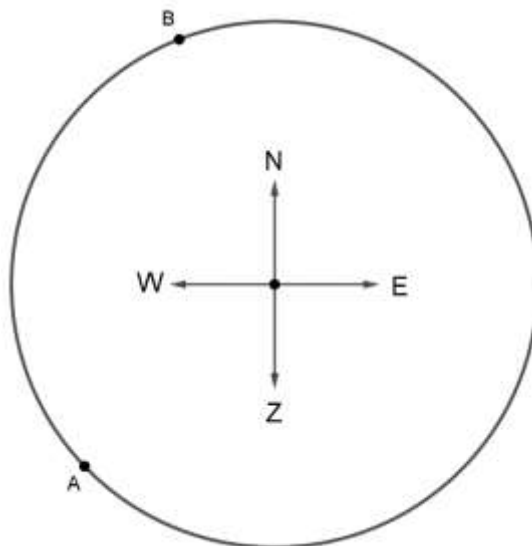


Рис. 1. Чтение географических карт

Если наблюдатель в центре абсолюта смотрит на север, то он увидит самую верхнюю точку абсолюта, если смотрит на восток, то увидит самую правую его точку, и т.д. Обратное, если наблюдатель находится в точке А и хочет увидеть центр абсолюта, то он должен смотреть на северо-восток, а если находится в точке В, то он должен смотреть на юго-юго-восток. (Таков нечасто используемый географический термин.) Итак, точка на абсолюте – это *направление* в геометрии Лобачевского.

Рефлексия. В процессе выполнения данного задания студент учится теоретизировать. При этом значимость теоретических рассуждений не поддается точной оценке в момент их выполнения. Как следствие, от студента требуется способность откладывать получение удовольствия от осознания истинности полученных им результатов, а эта способность, как следует из психологических исследований, коррелирует с разными типами достижений, в том числе академической успеваемостью, экономическим состоянием и уровнем здоровья.

Задание 2. Как выглядит прямая на модели Кэли–Клейна?

Обсуждение. Выбрав инструмент *Прямая*, студент активирует абсолют и ставит две точки внутри круга. В результате получается фигура, изображенная на рис. 2. На первый взгляд, это хорда, и такой ответ дает абсолютное большинство учащихся. Парадоксально, но такой ответ является неточным, потому что хорда – это отрезок, соединяющий две точки на окружности, а в нашем случае точки на окружности не принадлежат геометрии Лобачевского. Итак, прямая выглядит как *открытая хорда*.

Рефлексия. Студент учится точному употреблению терминов, которое, как известно, важно как в научной деятельности, так и в социальной жизни.

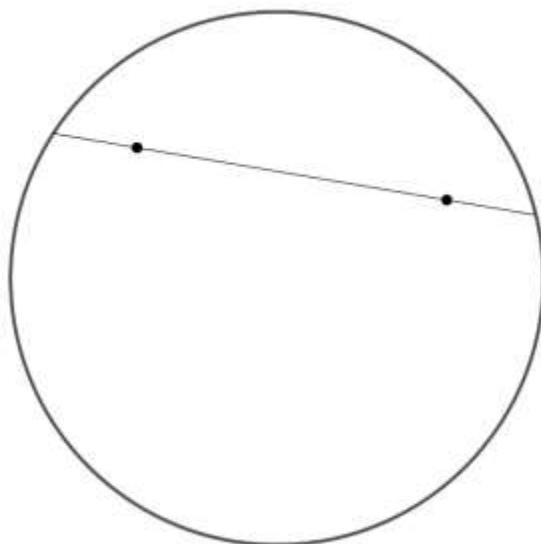


Рис. 2. Прямая

Задание 3. Как выглядят луч и отрезок на модели Кэли–Клейна?

Обсуждение. Выбрав инструмент *Луч*, студент активирует абсолют и ставит две точки внутри круга, а затем проделывает те же самые действия с инструментом *Отрезок*. В результате получаются фигуры, изображенные на рис. 3.

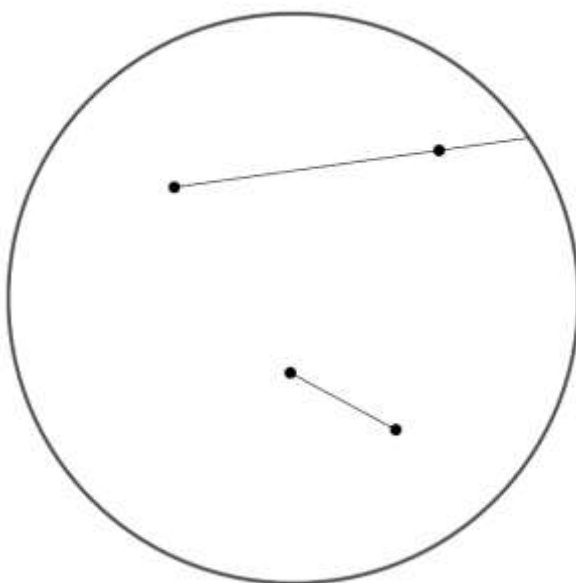


Рис. 3. Луч и отрезок

Оказывается, что эти фигуры имеют в точности тот же смысл, что и геометрии Евклида. Например, отрезок оказывается состоящим из тех точек прямой, которые лежат между двумя точками этой прямой.

Рефлексия. *Обнаруженное сходство с евклидовой геометрией дает определенную надежду на возможность использования привычной геометрической интуиции. Насколько обоснована эта надежда, покажет будущее.*

Задание 4. Как выглядят параллельные прямые на модели Кэли–Клейна?

Обсуждение. Сначала с помощью инструмента *Прямая* строим прямую AB на модели Кэли–Клейна. Затем выбираем инструмент *Параллельная прямая*, активируем абсолют, отмечаем точки B и A , а также точку C вне ее. В результате

возникает рис. 4.

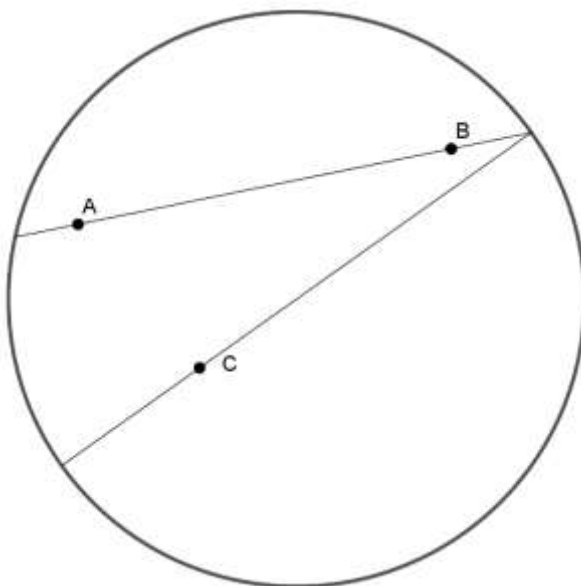


Рис. 4. Параллельные прямые

Полученный рисунок находится в кричащем противоречии с нашей интуицией, сформированной в рамках евклидовой геометрии. К счастью, логический анализ показывает, что никакого противоречия нет. Действительно, две полученные прямые, во-первых, не имеют общих точек и, во-вторых, имеют общее направление. Естественно считать их параллельными.

Рефлексия. Студент обнаруживает эффективность логического анализа, поскольку именно он позволяет снять обнаруженное противоречие. В культурологическом плане студент учится оценивать целесообразность вводимых терминов. Другими словами, он учится «придумывать» названия, адекватные сути явлений.

Рис. 4 явно асимметричен. Действительно, прямая имеет два «равноправных» направления, а построенная прямая «приближается» только к одному из них. Сделанное наблюдение приводит в следующей задаче.

Задание 5. В чем причина асимметрии предыдущего чертежа? Как ее устранить?

Обсуждение. Перечитывая описание построения рис. 4, мы обнаруживаем последовательность точек (B, A, C) . При этом положение точки C на третьей позиции определено ее особым статусом, а вот положение точек A и B является произвольным. Проведем построения предыдущей задачи применительно к другому порядку точек, а именно (A, B, C) . В результате мы получим рис. 5. На нем видны два вертикальных угла, сильно отличающихся друг от друга. Действительно, прямые пучка с центром в точке C делятся на два класса: одни прямые пересекают изначальную прямую AB , а другие не имеют с ней ни общих точек, ни общих направлений.

Рефлексия. В этом задании (всего лишь пятом по счету!) студент самостоятельно обнаружил два феномена, относящихся к самой сути геометрии Лобачевского: наличие двух прямых, проходящих через одну точку и параллельных третьей прямой; наличие еще одного случая взаимного расположения прямых, который не встречается в евклидовой геометрии.

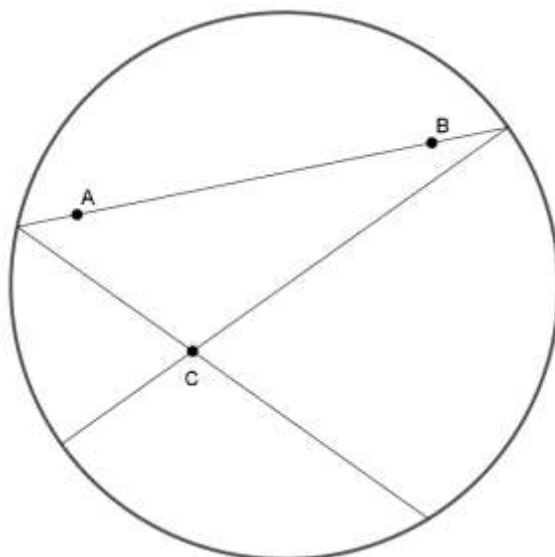


Рис. 5. Две параллели к одной прямой

Задание 6. Как назвать третий случай взаимного расположения двух прямых?

Обсуждение. С одной стороны, такие прямые *естественно назвать* параллельными, потому что они не имеют общих точек. С другой стороны, их *нельзя назвать* параллельными, потому что они не имеют общих направлений. Возможны искусственные грамматические конструкции, например, псевдопараллельные, слабо параллельные, сверхпараллельные и т.п. Ни одна из них не раскрывает сути феномена, поэтому в данный момент ответить на вопрос задачи затруднительно. Временно мы будем использовать термин «псевдопараллельные» прямые, помещая его в кавычки.

Рефлексия. Студент снова сталкивается с феноменом «отложенного удовольствия», потому что в данный момент он не располагает достаточной информацией для введения разумного термина.

Задание 7. Как выглядят взаимно перпендикулярные прямые на модели Кэли–Клейна?

Обсуждение. Как обычно, построим прямую AB , а также несколько точек внутри круга. Выбрав инструмент **Перпендикулярная прямая**, активируем абсолют, отметим точки A и B и какую-либо из ранее построенных точек. Получим фигуру, изображенную на рис. 6.

Бросается в глаза, что «новые перпендикуляры» выглядят по-разному: одни похожи на привычные перпендикуляры, а другие выглядят как наклонные. Попытаемся понять, в чем то общее свойство построенных линий, которое объединяет их под общим именем «перпендикуляры». Второе наблюдение помогает в этом, поскольку все построенные прямые «смотрят в одну сторону».

Продлив их за пределы абсолюта, студент обнаруживает, что все они пересекаются в одной точке (рис. 7).

Проведя из этой точки касательные к окружности, студент видит, что они проходят через концы изначальной хорды. Так возникает алгоритм построения перпендикуляров к прямой на модели Кэли–Клейна.

Рефлексия. В процессе решения этой достаточно объемной задачи студент учится наблюдать, экспериментировать, давать геометрическую трактовку

результатам эксперимента. Значимый результат!

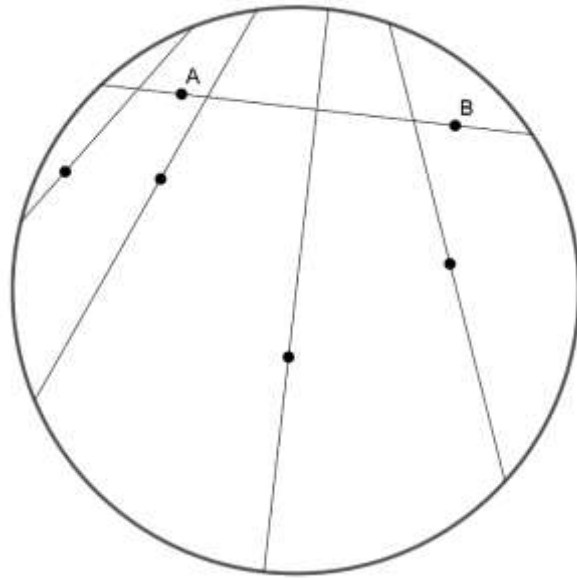


Рис. 6. Разные перпендикуляры к прямой

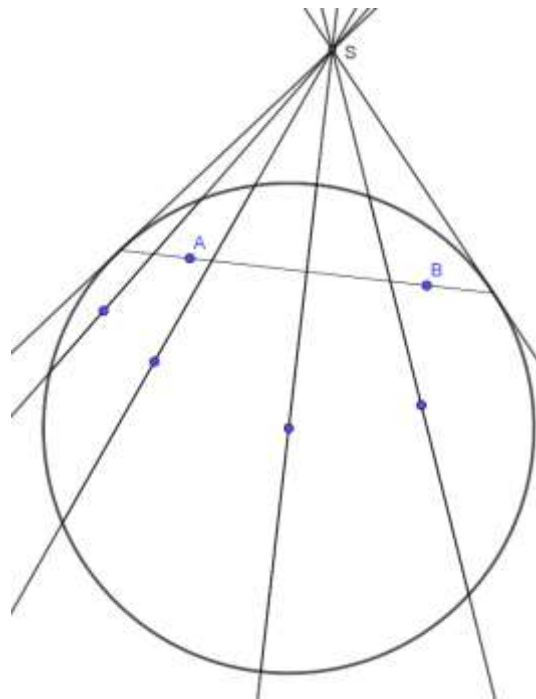


Рис. 7. Алгоритм построения перпендикуляров

Задание 8. К каждой из двух «псевдопараллельных» прямых проводят все перпендикуляры. Существуют ли общие элементы у этих двух множеств?

Обсуждение. Несмотря на расплывчатость формулировки, решение предыдущей задачи позволяет легко найти ответ. Для каждой хорды нужно провести две касательные через ее концы, получив тем самым точку их пересечения, а затем соединить две точки пересечения (рис. 8). Так студент самостоятельно получает новую для него теорему.

Теорема 1. Две «псевдопараллельные» прямые имеют общий перпендикуляр, притом единственный.

Рефлексия. Самостоятельное получение субъективно новой теоремы в

непривычной геометрии является ценным математическим результатом, который приобретает особую значимость благодаря его влиянию на личность студента.

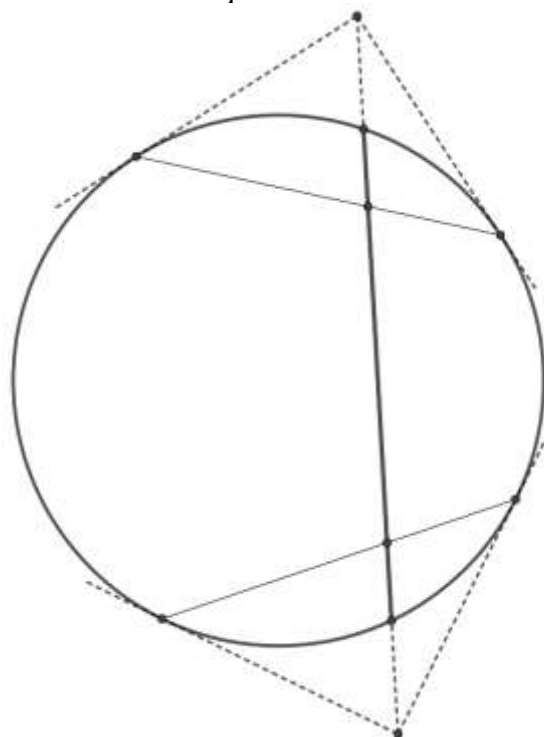


Рис. 8. Общий перпендикуляр

Задание 9. Сравните длину отрезка общего перпендикуляра к двум «псевдопараллельным» прямым и длину любого другого отрезка, соединяющего две точки этих прямых.

Обсуждение. Совсем нетрудно организовать эксперимент по сравнению длин двух отрезков. Для этого нужно сделать следующее.

- 1) Поставить точку X на одной из двух прямых.
- 2) Через точку X провести перпендикуляр XU ко второй прямой с помощью нового инструмента **Перпендикулярная прямая** (рис. 9).
- 3) С помощью нового инструмента **Расстояние** измерить длину общего перпендикуляра и длину отрезка XU , а затем сравнить их.

Сравнение неизбежно приведет студента к следующей теореме.

Теорема 2. Общий перпендикуляр к «псевдопараллельным» прямым является кратчайшим среди отрезков с концами на этих прямых.

Другими словами, по мере удаления отрезка XU от общего перпендикуляра, причем в любую сторону, его длина растет! Так у нас появляются достаточные основания для того, чтобы ввести естественное имя для двух «псевдопараллельных» прямых, которое адекватно сути феномена, – *расходящиеся прямые*.

Рефлексия. Еще раз студент получил новую теорему, и это важно. Важно также, что процесс присвоения адекватного названия оказался не произвольным, а потребовал предварительного математического исследования.

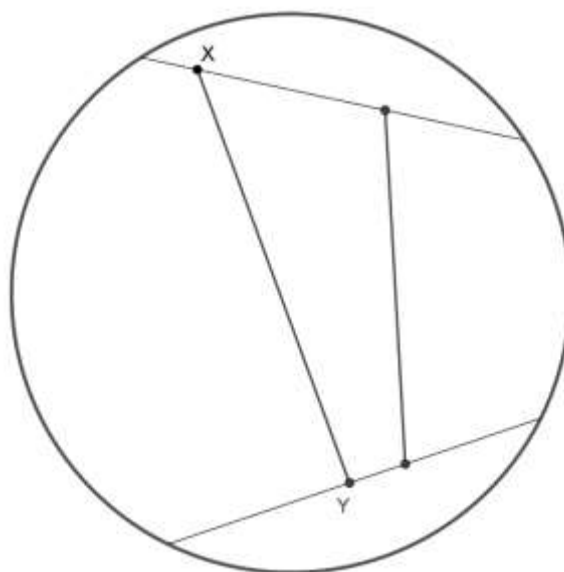


Рис. 9. Расходимость «псевдопараллельных»

Из всего сказанного можно сделать следующие **выводы**.

1) Предложенные компьютерные инструменты позволяют студенту самостоятельно построить существенную часть геометрии Лобачевского.

2) Процесс самостоятельного построения геометрии способствует формированию у «строителя» умений математика-исследователя, влияя при этом на саму личность студента.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Atanasyan, L. S. (2001) *Geometria Lobachevskogo: Kn. dlya uchashtihsya*. Moskva: Prosveshtenie, 336 s.

2. Bazilev, V. T. i dr. (1975) *Geometria II. Ucheb. posobie dlya studentov fiz-mat. fak-tov ped. in-tov*. Moskva: Prosveshtenie, 367 s.

3. Kagan, V. F. (1956) *Osnovaniya geometrii. Uchenie ob obosnovanii geometrii v hode ee istoricheskogo razvitiya. Chastyi vtoraya*. Moskva: Gosudarstvennoe izdatelystvo tehniko-teoreticheskoy literatury, 344 s.

4. Yastrebov, A. V., Kosheleva, L. Yu. (2019) Chertezhnye instrumenty dlya geometrii Lobachevskogo: modely Kэli–Kleyna. *Matematicheskoe obrazovanie v tsifrovom obshtestve: materialy XXXVIII Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavateley matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskikh vuzov (26–28 sentyabrya 2019 g.)*. Samara: SF GAOU VO MGPU, с. 314–317.

5. Yastrebov, A. V. (2019) Osvoenie geometrii Lobachevskogo posredstvom kompyuternykh eksperimentov na modeli Keli–Kleyna. *Geometria i geometricheskoe obrazovanie, Sbornik trudov IV Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Geometria i geometricheskoe obrazovanie v sovremennoy sredney i visshey shkole» (k 80-letiyu E. V. Potoskueva) 29–30 noyabrya 2019 goda*. Tolyatti: Izdatelystvo TGU, с. 78–83.

EDUCATION IN THE 21ST CENTURY – DEVELOPMENT PATHS AND RISKS

Alexander Gennadievich Lukankin
Russian State Academy of Intellectual Property

Abstract: *The article presents the authors' point of view on the role and place of fundamental natural mathematical knowledge in modern society. The main idea is the need to review the tasks facing the education system. It is concluded that the creation of moral guidelines, the formation of systemic thinking and knowledge should become priorities.*

Keywords: *Education system; System thinking*

JEL code: *I20*

ОБРАЗОВАНИЕ В XXI ВЕКЕ – ПУТИ РАЗВИТИЯ И РИСКИ

Александр Геннадьевич Луканкин
Российская государственная академия интеллектуальной собственности

Трансформация системы общего и профессионального образования, последовавшая после смены политических режимов в СССР и Болгарии, привела к утрате многих, уже достигнутых ранее, позитивных завоеваний. Одной из причин этого можно считать отсутствие четко сформулированной задачи системы образования. Ранее эта задача формулировалась как воспитание гармонической развитой личности – творца. Одним из постсоветских министров образования была поставлена другая задача: воспитание квалифицированного потребителя. При этом, не указывалось кто и где будет создавать продукты, которые ему надо потреблять. Сегодня очень много говорят о различных инструментах (например, цифровизация), но не обсуждают какую задачу при помощи этих инструментов предстоит решать. Задача определяет выбор инструмента, а не наоборот. В отрыве от задачи инструмент не может быть хорошим или плохим. Он может быть нужным или не нужным для решения конкретной задачи. Возможно ли сегодня создать качественную систему образования, отвечающую современным условиям?

Перед современной школой вновь должна быть поставлена задача не только дать определенный объем знаний, но и подготовить обучающихся к их будущей практической деятельности. Ранее эту задачу советская и болгарская школы решали путем осуществления идеи политехнического образования. Предполагалось, что получив в общеобразовательной школе хорошую политехническую подготовку, учащиеся смогут ориентироваться в любом производстве, овладеть техникой, передовыми методами труда, сумеют реализовать принцип единства теории и практики в профессиональной деятельности.

Основная задача предметов естественно-математического цикла в общеобразовательной школе, на наш взгляд, – привести обучающегося к определенному мировоззрению, соответствующему современному состоянию естественных наук.

Нам представляется, что основными приоритетами системы образования в XXI веке должны быть (Кречетов, 2012):

- 1) нравственность;

- 2) развитие мышления;
- 3) знания.

Нравственность – понятие относительное. Но сегодня порядка 70% населения России в той или иной степени отождествляют себя с Православием. Нравственные нормы основных мировых религий очень близки друг к другу. Даже «Моральный кодекс строителя коммунизма» по сути своей повторял христианские ценности. Поэтому решение этой проблемы возможно. Если человек будет обладать знаниями, но у него отсутствуют нравственные ориентиры, то он может представлять реальную угрозу для общества.

Сегодня педагоги и психологи много говорят об оптимизации процесса обучения. В качестве важных факторов, необходимых для этого, отмечают эмоциональную стабильность, положительную самооценку, уверенность в себе, коммуникативную успешность, умение взаимодействовать с одноклассниками и учителями. В результате гораздо больше внимания уделяется не интеллектуальному развитию, а эмоционально-коммуникативной сфере. Поэтому Л.А. Ясюкова (2005) в качестве основного направления психолого-педагогической работы в школе выделяет развитие мышления ребенка, а не становление его личности, системы коммуникаций и эмоциональных контактов. По мнению автора, большинство из кажущегося многообразия интеллектуальных задач, возникающих перед школьниками в процессе обучения, может быть решено с помощью развития *понятийного мышления*.

Л.А. Ясюковой выделены следующие операции понятийного мышления (ПМ):

- 1) Умение выделять существенное, главное (интуитивный компонент ПМ).
- 2) Умение выделять объективные причинно-следственные связи (логический компонент ПМ).
- 3) Умение обобщать, систематизировать информацию (понятийная категоризация).

Сформировать понятийное мышление можно только систематически изучая основы естественных наук. Каждая наука имеет свою систему фундаментальных (и, в силу этого, интуитивно понимаемых, не имеющих строгих определений) понятий, на которой выстраивается иерархия понятий более высокого уровня. В каждой науке эта система имеет свою специфику. Только изучив разные подходы, можно сформировать понятийное мышление. Из естественно-математических дисциплин должна быть отобрана доступная детям сумма знаний и обобщений, включающая лишь самое существенное, то, что позволит подвести учащихся к пониманию основных закономерностей развития окружающего мира, дать им знание основ наук. В процессе изучения учащиеся углубляют и расширяют представления о реальности окружающего их мира, беспрестанно меняющегося и находящегося в непрерывном движении, учатся находить закономерные связи между явлениями. Где нет науки, нет понятийного мышления.

Сегодня для многих обучающихся понятия сигнал, информация и знания стали тождественными. Увы, на данный момент, не существует общепризнанных определений этих понятий. Хотя на конкретных примерах различия можно объяснить легко. Если к вам обращаются на языке, который вы не знаете, сигнал есть, информации нет. Другой пример: турист из России в Варне спросил у местного жителя: «Как пройти к экономическому университету?» Получил ответ: «Направо». Если этот ответ не сопровождался жестом руки, то имеет смысл уточнить на каком

языке – русском или болгарском – этот ответ был дан. Есть старая шутка: скажи человеку, что на небе 1582356 звезды и он поверит. Но напиши на заборе «Окрашено», он обязательно потрогает пальцем и измажется. Информация была. Человек на доступном ему языке прочитал надпись. Но знание возникло только тогда, когда эта информация была сопоставлена с личным жизненным опытом.

Знания могут быть энциклопедическими и системные. Первые представляют собой набор понятий расположенных в алфавитном порядке и слабо связанные друг с другом. Они хорошо подходят для решения кроссвордов, участия в викторинах, сдачи ЕГЭ. Пример – индийский фильм «Миллионер из трущоб». Но для успешности в профессиональной деятельности нужны системные знания. Системности в изучении в общеобразовательной школе окружающего мира можно добиться через синхронизацию программ и межпредметные связи, а не через метапредметность, представляющую собой возврат к программам ГУСа 20-х годов.

Под системностью следует понимать:

1) Структурированность – окружающий мир представляется учащимся как единое целое, где все предметы и явления органически связаны друг с другом, зависят друг от друга, обуславливают друг друга.

2) Взаимосвязь составляющих частей – только установление взаимности подсистем и условий их существования дает возможность понять происходящие в природе явления, дает возможность человеку направленно изменять природу, не разрушая её.

3) Подчиненность организации всей системы определенной цели – состояние непрерывного движения и изменения, непрерывного обновления и развития.

От состояния системы образования сегодня зависит какой будет страна завтра. Подросток, будучи включенными в систему образования, должен думать не о легком времяпрепровождении, а развитием новых собственных возможностей. Только когда человек станет человеку другом, а не волком, станет созидателем, а не потребителем, станет хозяином своей судьбы — у него (а вместе с ним и у страны) появится шанс на будущее.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Krechetov V., protoierey (2012) Hristianstvo – eto zhizny: intervyuy 2004 – 2008 godov. *Vospominania*, Moskva: «MBTs prp. Serafima Sorovskogo», 288 s.

2. Yasyukova L.A. (2005) *Zakonomernosti razvitia ponyatiynogo mishlenia i ego roly v obuchenii*. SPb.: IMATON, 256 s.

THE COMPETENCE EDUCATIONAL MODEL - A REVOLUTIONARY LEAP OR A CRASH INTO THE ABYSS OF MEMORYLESS IGNORANCE?

Assoc. Prof. Margarita Lambova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: Reasoning and evidence are presented in support of the thesis that the competency education approach, based on a controversial definition of the term "competence", by shifting the focus from personal development to meeting the needs of the global economy by adaptive, unified and culturally disconnected human resources, is not only one of the main reasons for the collapse of education, but it is partly incompatible with democratic values, as it does not create prerequisites for the formation of critically thinking individuals who are free and capable of self-determined management of their lives based on their own world, knowledge, attitudes and preferences.

Keywords: Collapse of education; Competency-based education (CBE); PISA; Democratic values; OECD.

JEL code: A20, O15, O29

КОМПЕТЕНТНОСТНИЯТ ОБРАЗОВАТЕЛЕН МОДЕЛ – РЕВОЛЮЦИОНЕН СКОК ИЛИ СРУТВАНЕ В БЕЗДНАТА НА БЕЗПАМЕТНОТО НЕВЕЖЕСТВО?

Доц. д-р Маргарита Ламбова
Икономически университет – Варна, България

Въведение

Бягството от фундаменталните знания, осигуряващи предпоставките за развитието на логиката и самостоятелния и критичен мисловен процес, според мен е една от основните причини за срива както на училищното, така и на висшето образование не само в България, но и в останалите европейски държави, които следват препоръките на ЕП и Съвета на ЕС, свързани с така наречената компетентностна концепция за развитие и осъществяване на образователния процес. Твърдението ми със сигурност звучи еретично на фона на амбициозната цел, която си поставя тази концепция, а именно създаването на компетентности за решаването на реални проблеми.

Целта на разсъжденията е обосновка на тезата, че компетентностният образователен подход не само е една от основните причини за срива образованието, но отчасти е несъвместим с демократичните ценности, тъй като в центъра му не стои развитието на личността, а единствено интересите на глобализираната икономика, свързани с формирането на унифицирани, адаптивни, откъснати от културната среда човешки ресурси със стереотипен мисловен процес.

Изложението не претендира за изчерпателност на разсъжденията по разглеждания проблем, акцентира се върху по мое мнение най-смущаващите моменти, свързани с налагането на новата образователна парадигма.

1.Произход на новата образователна парадигма – естествен процес или „лабораторен експеримент“ с неясни последици?

На първо място тук би следвало да бъде поставен въпросът: Кое предизвика налагането на унифицирания компетентностен модел като нова парадигма, помитаща вековни традиции в образованието, обвързани с културното наследство на нациите? Дали това са преди всичко динамично променящите се дадености в глобализацията се свят, закономерно следствие на които е научно обоснованото преосмисляне на устоите, целите и същността на образователния процес или съществува и друг фактор, който форсира подмяната на парадигмите с цел обслужване на определени интереси?

Тъй като в Европа компетентностният модел навлиза на базата на препоръки на ЕП и Съвета на ЕС (съответно от 2006г. и 2018г.), е логично да се предположи, че той е проект на видни експерти в областта на образованието и педагогиката, сътворен на базата на сериозна научна обосновка и преминал през широк обществен дискурс, преди да бъде одобрен за реализация, но реалността е съвсем друга.

Компетентностната концепция се основава на понятието компетентност, със смислово съдържание, позоваващо се на дадената от когнитивния психолог Weinert (2001) дефиниция, според която под компетентност следва да се разбират „когнитивните способности и умения, които са на разположение на индивидите или могат да бъдат усвоени от тях, за да решават определени проблеми, както и свързаната с тях мотивационна, волева и социална готовност и способности, за да могат да използват решенията на проблемите успешно и отговорно в променливи ситуации.“ Дефиницията е изключително спорна, тъй като образованието не би следвало да се свежда единствено до усвояване на когнитивни умения с цел практическо приложение и решаване на проблеми. Тя изключва образователния фундамент, обхващащ знания за логиката, смисъла и значението на познанието, върху които би следвало да се надстройват уменията за решаването на реални проблеми.

Въпреки че самият Weinert е признавал, че дефиницията му е спорна и не е в състояние да предизвика научен консенсус, Организацията за икономическо сътрудничество и развитие (ОИСР) се е позовала точно на нея при конструирането на стандарти за тестовете си PISA, игнорирайки учебните планове и културното наследство, които измерват глобално унифицирани приложни умения, необходими в едно бъдеще, за което ОИСР твърди, че познава (Krautz, 2015). На това място би следвало да възникне въпросът за ролята на тази организация при налагането на новата образователна парадигма, при положение че основната ѝ цел според член 1 на Конвенцията на ОИСР (Convention OECD) е подкрепата на политики, във фокуса на които стоят интересите на глобализираната икономика, а не човекът като личност, на която трябва да бъдат осигурени предпоставките да се развива свободно според своите способности и лични предпочитания. Това означава, че традиционното образование, от което се очаква да осигури тези предпоставки, не само че не влиза в обсега на мерките, то може да се разглежда като препятствие пред процес, който е в състояние да формира унифициран, откъснат от националните устои хуманен капитал, притежаващ качества, позволяващи да бъде използван безпроблемно навсякъде по света. Логично е организация, в центъра на интересите на която стои глобалната икономика, да възприема човека преди всичко като ресурс, който се очаква да бъде максимално продуктивен, а не като личност, която е способна и свободна сама да моделира и управлява живота си. Логично е също така да се предположи, че демократичните общества би трябвало да се противопоставят

на налагането на образователна парадигма, чийто център е изместен от личностното развитие към потребностите на икономиката от хуманен капитал, в които културното наследство, моралът, свободата на мисълта не само че не играят никаква роля, но в много случаи възпрепятстват безпроблемното му функциониране.

Закономерно възниква въпросът защо демократичните държави безропотно преобразуват образователния процес според вижданията на ОИСР, като по този начин обричат на осакатяване личностното развитие на своите граждани? Причините са комплексни, тук ще бъде обърнато внимание на една от основните и това са тестовете PISA, правилата и критериите на които се създават от ОИСР, „която според собственото си виждане от шестдесетте години на миналия век играе централна роля при осигуряването на индикатори за измерване на образователни резултати, като по този начин има намерение не само да оценява образователната политика, но и да допринася за нейното изграждане.“(Gurría, 2011). В партньорски оценки като PISA ОИСР вижда „най-ефикасния път за упражняване на влияние върху поведението на суверенни държави“ (OECD, 2004). Правото на подобно влияние тук ще оставим без коментар. PISA и компетентностната ориентация следват неолиберална парадигма, въведена в ОИСР от представители на "Chicago School" в началото на 60-те години, според която: „Днес се разбира от само себе си, че образованието също принадлежи към икономическия комплекс, че е също толкова необходимо да се подготвят хората за икономиката, колкото е необходимо да се подготвят материални блага и машини. Образователната система сега стои редом с магистралите, стоманодобивните заводи и фабриките за изкуствени торове.“ (Gehmacher, 1966).

Следователно образованието се възприема като икономическа инвестиция в човека, училищата стоят редом до стоманолейрни и заводи за изкуствени торове, произвеждайки адаптирано функциониращ хуманен капитал, като при това производство учителите са фактор на производството, а учениците суровината. Това изключително прагматично виждане до голяма степен дехуманизира образованието, защото какъвто и да е капиталът, дали човешки, интелектуален или материален, той има значение само от гледна точка на неговата продуктивност в икономиката. Според визията на ОИСР трябва да бъдат наложени нови образователни стандарти, които отменят всички традиционни представи за образование. Фокусът се измества от цялостното личностно развитие към създаването на подходящи за икономиката човешки ресурси, като под прогрес явно се разбира единствено икономическият растеж, откъснат от духовното развитие на човека. Не се предвижда образованието да създава условия за свободно, отговорно и самоопределено управление на воля, нагласи, желания. Целта на образованието по-скоро е „създаването на умения за непрекъснато адаптиране“ (Graupe & Krautz, 2014).

Вглеждайки се внимателно в тази напълно ориентирана към създаването на хуманен капитал концепция за образователния процес, би следвало да стигнем до заключението, че тя противоречи на демократичните ценности, които предполагат свободно, отговорно и самоопределено развитие на личността, зачитане на културното многообразие, свобода на мисълта, на мненията и нагласите в рамките на установеното по демократичен път законодателство. Следователно такава концепция едва ли би имала шанс да бъде възприета положително от обществото, ако беше възникнала в рамките на определена държава и преминала през

нормалното за демокрацията обществено обсъждане. Почти повсеместното в глобален аспект налагане на тази нова парадигма става възможно благодарение на „троянски кон“, работещ в полза на ОИСР и нейната визия за образование – това са тестовете PISA, конструирани на базата на субективни критерии съобразно гореизложените представи за образователния процес. Още при първия тест PISA2000, имащ за цел оценяването и сравнението на компетентностите и уменията на ученици от 30 държави, непокрито се признава, че стандартите не се ориентират според образователните традиции, конституцията и политиката на оценяваните страни, а се основават на концепция, която следва да бъде възприета като единна норма (Graupe & Krautz, 2014). От друга страна само на базата на образователен процес, който е съобразен с тези стандарти, е възможно постигането на резултати, разкроени и съшити по този шаблон. Не е възможно постигането на високи резултати, при положение че образователните стандарти от една страна и стандартите при оценяване от друга, са създадени на базата на различни логически концепции. Както едните, така и другите са плод на субективно възприятие, следователно не може да се очаква съизмеримост и съответствие. По този начин ОИСР успява да постигне невъобразимото на пръв поглед – задавайки критериите за оценяване (измерване) на резултатите, успява да промени правилата на играта, заобикаляйки обществения дискурс, като е подпомогната от широкия медиен отзвук по отношение на тестовете PISA, най-вероятно и от числовата слепота на обществото, без да се наложи сериозно да се конфронтира с въпроси за същността на критериите и за проверката на тяхната целесъобразност.

Когато става въпрос за измервания, обществото обикновено не се интересува от процеса на производство на информацията, а само от крайния резултат, зададен с помощта на числа. Така наречените компетентности представляват качествени свойства, за които не съществуват независими от субективната преценка числови съотношения в обективната действителност, те са косвено измерими с помощта на конструирани индикатори. За измерване на дадено косвено наблюдаемо свойство, каквато е компетентността, могат да послужат теоретични модели, които го дефинират по различен начин, използваните индикатори, чрез които се операционализира моделът, съответно ще осигуряват различно качество на проекцията, като не е възможно сравнението на измерванията, получени чрез тях. Индикаторите са продукт на субективна преценка на този, който ги създава, като те отразяват неговото възприятие за изучаваното свойство. Доколко получените въз основа на подобни измервания резултати позволяват правдиво отражение на реално съществуващите дадености, зависи в голяма степен от възприетия теоретичен модел. Ако последният е спорен заради недостатъчната му научна обосновка, какъвто е случаят с дефиницията за компетентност, на базата на която е изградена компетентностната образователна концепция, тогава стои под въпрос, дали измерителните инструменти действително мерят това, което трябва да се измерва. Резултатите от образователен процес, който се основава на теоретичен модел, различен от този, формиращ стандартите на ОИСР, е нелогично да бъдат тествани чрез PISA, тъй като би имало пълно разминаване между емпиричните дадености и тяхната числова проекция, което не означава автоматично, че съответната образователна концепция е лоша и формира некомпетентни индивиди. Когато измерителните инструменти не са съобразени с логическата концепция на даден образователен процес, те функционират като криво огледало и резултатите от

измерването са изкривено отражение на действителните знания и умения, които предоставя той.

Несъответствието между функциониращите преди въвеждането на тестовите PISA образователни стандарти, различни в отделните държави, и унифицирания, откъснат от традиции и културно наследство стандарт на ОИСР, закономерно води до образ в кривото огледало на PISA, който предизвиква шок и ужас в държави, дотогава имащи самочувствието, че предоставят качествено образование. Интересно е, че преобладаващо причините за лошите резултати обществото не търси в качеството на огледалото (измерителните инструменти), като приема на доверие, че то е идеално и отразява достоверно емпиричните дадености. Вместо да търси недостатъци на огледалото и да се опита да го смени с друго, по-подходящо за отразяване на знанията и уменията в контекста на националните особености, без обществена дискусия държави, иначе демократични, започват да променят своята традиционна образователна система, нагласяйки я според кривините на въпросното огледало, като по този начин обричат на духовно осакатяване най-голямото си богатство – своите граждани, подложени на обезкореняване и дресировка за адаптивно, непредубедено и унифицирано функциониране в глобалната икономика. „Самата ОИСР открито признава, че използва този „партньорски натиск“, за да управлява поведението на суверенни държави, върху което по правило няма влияние и не би трябвало да има такова. Под прикритието на измерването успява, заобикаляйки гражданското общество, да наложи концепция за образованието, която разгражда всички традиционни културни нагласи.“ (Krautz, 2015).

2. Крайният „продукт“ - компетентни личности или недообразован хуманен капитал със стереотипно мислене?

В ежеднезната му употреба понятието компетентност се възприема изцяло положително от обществото, неподатливо е на критика, но влаганият смисъл се различава съществено от този, формиращ основите на компетентностната концепция. Докато в ежедневието възприемаме компетентността като сложен комплекс от взаимосвързани фундаментални знания, практически умения, присъщи на даден индивид и необходими му за упражняването на определена професия или дейност, компетентностите в образователния процес представляват разнороден конгломерат от откъслечни знания, умения и нагласи, за които се предполага, че ако голямо количество от тях бъдат нахвърляни „на парче“ в контейнера (човешкия мозък), притежателят му ще е в състояние да функционира стандартизирано, адаптивно, гъвкаво и непредубедено съобразно потребностите на глобализираната икономика. Компетентностният модел възприема човека основно като ресурс, който следва да бъде моделиран по такъв начин, че да бъде в състояние да осигурява максимална продуктивност. В центъра на новата парадигмата вече не стои индивидът, на когото трябва да бъдат осигурени възможности за развитие на самостоятелното мислене и оттам управление на живота чрез стабилна основа от фундаментални знания, съчетани с ясна личностна и културна идентификация, а потребностите на глобализираната икономика, свързани с формирането на унифицирани, откъснати от културната среда човешки ресурси. На практика новата образователна парадигма възприема човека като механичен сбор от полезни за икономиката функции, наречени компетентности, като образователният процес се свежда до дресировка, чрез която те да бъдат усвоени стереотипно. Тази дресировка

се основава до голяма степен на готови алгоритми за действие и поведение, за които не се изисква осмисляне на материята от съответната предметна област на науката, следователно не е нужно тя да стъпва върху стабилните основи на фундаменталните знания, превръщайки последните в излишен баласт. Въпреки че про форма моделът включва развитието на критичното и творческо мислене, на практика според мен той предизвиква точно обратното – алгоритмите за решаването на реални проблеми, когато не стъпват върху осмислен фундамент от знания, върху културното наследство и традиционните ценности, правят невъзможно разчупването на шаблона, необходимо за самостоятелен критичен и творчески мисловен процес.

Критични гласове се надигат още в началото на процеса на налагане на новата образователна парадигма, като лингвистично обучени преподаватели обръщат внимание на проблема с измеримостта на компетентностите, които могат да бъдат оценени само приблизително и неясно чрез заключения на базата на пърформънси. (Löwisch, 2000). За съжаление не се обръща внимание на научно обоснованото противодействие, като промяната на парадигмата се налага „силово“ по административен път. Подобна фундаментална реорганизация на образователната система чрез административни средства влиза в противоречие с основната социална задача на училището като средище, което създава предпоставките за развитието на свободни и самоопределени личности на основата на демократичните ценности и плурализма.

На базата на наложената от ОИСР образователна концепция възникват каталози с ключови компетентности и техните елементи, както и с очаквани резултати от обучението, формиращи рамката за изграждане на учебни планове и програми както в училищното, така и във висшето образование. Въпреки че тези каталози са безкрайни като телефонни указатели, те ограничават свободата на мисълта, творческото и критично мислене, тъй като представляват твърд шаблон, към който трябва да се придържат както авторите на учебни планове и програми, така и преподавателите, дори когато имат достатъчно аргументи за своето несъгласие с определени формулировки. Те са длъжни да обслужат наложените етикети (компетентности), като обучението в крайна сметка добива формата на тренировка на огромен брой откъснати едно от друго „практически“ умения, като основите и спойката, които би следвало да бъдат осигурени от фундаментални знания за логиката, философията и смисъла на познанието, както и от учебен материал, който подпомага формирането на културна и личностна идентичност на базата на мисловна свобода, отиват на заден план или отсъстват почти напълно. Образователен процес, осъществен на базата на планиране на компетентности в смисъла на използваната от ОИСР дефиниция, може спокойно да бъде сравнен със строителството на сграда без фундамент и без спойващ материал между тухлите.

Дефиницията за компетентност освен знания и умения за решаването на реални проблеми включва и необходимите за това нагласи. Понятието нагласа има много измерения, като цялата съвкупност от нагласи на даден индивид формира неговата личност. Би следвало да бъде уточнено, кои точно нагласи демократично по същност обзаване има право да „тренира“ у подрастващите, така че да не се влиза в противоречие с принципите на плурализма. Компетентност, изразяваща се в определени нагласи, може да бъде формирана единствено чрез целенасочено управление на посоката на мисълта, вкарването ѝ в коловоз, който се възприема за „правилен“ и „нормален“. Когато нагласите са свързани с традиционни

общочовешки ценности, основа за функциониране на обществото, по правило се приема, че те се формират в унисон не само в училището, но и в семейната и обществена среда. Когато обаче става въпрос за нагласи, които имат определена идеологическа окраска и за които не съществува консенсус в обществото, те не би следвало да бъдат включени като компетентности в образователния процес, който претендира, че е съобразен с демократичните ценности, тъй като това би противоречало на принципите на плурализма и свободата на мисълта. Действителността за съжаление е друга, като причината трябва да се търси в ролята, която е отредена на човека в тази образователна парадигма – не на личност, на която трябва да бъдат осигурени предпоставки за свободно развитие, а на хуманен ресурс, който трябва да бъде максимално приспособим, непредубеден и гавкав при функционирането му в икономиката. Така например нагласите, които следва да бъдат формирани във връзка с дигиталната компетентност „изискват разсъдливо и критично, но любознателно, непредубедено и напредничаво отношение към развитието на дигиталните технологии и дигиталното съдържание, както и етичен, безопасен и отговорен подход към ползването на дигиталните средства.“ (МОН, 2019). Според мен текстът съдържа сериозно логическо противоречие – от една страна следва да бъде формирано критично отношение към развитието на дигиталните технологии, но от друга то задължително следва да бъде непредубедено и напредничаво. Това противоречие може да бъде преодоляно единствено чрез компромис по отношение на критичното отношение, което да бъде такова само по форма. Бурното развитие на дигиталните технологии не може да бъде обуздано, камо ли спряно, но да се изисква от ученици и студенти да формират непредубедена нагласа към него означава унищожаването още в зародиш на всякакви мисли, свързани с евентуални негативни последици за човечеството, които може да предизвика или вече е предизвикало това развитие, като тук става въпрос за нагласи, за които няма консенсус в обществото и е възможно изградените вече представи на обучаваните да не съответстват на тези, които те би следвало да добият според този текст. В крайна сметка ускорената дигитализация, в частност изкуственият интелект, обслужват преди всичко глобализираната икономика, а не така наречените хуманни ресурси, критично мислещата част от които разсъждава върху опасностите, включително върху възможната дехуманизация на бъдещето. Възниква въпросът, по какъв начин се проверява и оценява „усвояването“ на подобни нагласи? В случай, че обучаваните не ги възприемат като интегративна част от своята личност и изразят аргументирано своята предубеденост, как ще бъдат оценени? Ще получат ли пониска оценка, т.е. ще бъдат ли наказани заради част от своя светоглед, влизаща в противоречие с нагласата, която трябва да бъде усвоена? Не съществува ли риск обучаваните само да симулират определени нагласи, за да получат желаната оценка? Тъй като по правило се оценява степента на усвояване на изискуеми знания, умения, вече явно и нагласи, при въпросния казус неминуемо се влиза в противоречие с принципите на плурализма и свободата на мисълта – неподходящи нагласи няма как да бъдат оценени високо, а симулирането на нагласи с цел висока оценка е свързано със самоцензура, която се налага тогава, когато свободата на изразяване е ограничена. Тук е даден пример с нагласи, които само косвено имат идеологически оттенък, но референтната рамка за учене през целия живот включва и такива, които съответстват на водещата политическа доктрина на западния свят, като те могат да бъдат квалифицирани като идеологически, докато все още не съществува пълен

консенсус в обществото и науката, като съществува опасност от тяхното преекспониране в образователния процес. Такива например са зададените в референтната рамка нагласи за подкрепа на безопасността и устойчивостта на околната среда, за подкрепа на устойчивите начини за живот.

Според Krautz (2015) налагането на компетентностната концепция носи белезите на пропаганда, чрез която се променят дълбоко вкоренени културни възгледи на голяма част от населението, като последствията за обществото са подкопаване на демокрацията, културата, но същевременно и на икономиката, в интерес на която се твърди, че действа ОИСР. Визията на тази организация обаче в най-добрия случай е в съответствие с интересите на глобални концерни, нуждаещи се от приспособими сътрудници със стандартизирани умения, които могат да се местят безпроблемно навсякъде по света. Средният бизнес и занаятите отдавна са забелязали и се оплакват от това, че „компетентностно ориентирани“ могат и знаят все по-малко.

Негативни последствия има и за училището и семейната среда, като компетентностната концепция води до объркване, както и до загуби за педагогиката и дидактиката. Когато образователният процес се планира въз основа на компетентности, предметната област на познанието отива на заден план, като обучението се разрежда откъм логическо съдържание и става системно неясно, което пречи на обучаваните да изградят ясно структурирани и осмислени знания. Учебниците, чиято структура е съобразена с учебни програми, създадени на базата на безкрайните каталози от компетентности, също допринасят за подкопаване на системния подход в образованието. Споделям мнението на Krautz (2015), че децата се прибират от училище претоварени, разочаровани или дори отегчени, без да знаят какво са учили или как да си напишат домашните, така че родителите работят с тях в къщи, но често и те самите вече почти не разбират учебниците. Следователно тази концепция вместо да подпомага образователната справедливост, каквато цел има според твърденията на ОИСР, тя задълбочава образователния разрыв, тъй като за семейства, в които родителите имат по-малко време, финансови средства и образователен ценз, не е възможно или не се счита за необходимо да отделят средства за частни уроци. Като резултат се стига до неудовлетворени ученици и родители, негативно отношение към образованието, което се възприема като непосилно бремене, съответно на изхода се появяват невежи, неграмотни и некомпетентни индивиди, които не само че не могат да функционират като продуктивен хуманен ресурс, но и не са в състояние да участват в обществото като самостоятелно преценяващи и разрешаващи житейските си проблеми, отговорни и мисловно свободни личности.

Заклучение

Въпреки че повечето европейски държави отдавна са прекроили своето училищно образование според стандартите на ОИСР, резултатите от тестовете PISA стават все по-лоши, което е аргумент в полза на твърдението, че компетентни в общия смисъл на думата, способни и свободни сами да моделират и управляват живота си личности не е възможно да бъдат формирани чрез така наречения компетентностния модел на образование, при който във фокуса стоят интересите на глобалната икономика, а не личностното развитие на индивидите, чиято роля е принижена до тази на адаптивен, унифициран, откъснат от националните и културни устои хуманен капитал.

Съобразно поставената цел са представени аргументи в полза на тезата, че новата образователна парадигма, стъпвайки върху една спорна дефиниция за понятието „компетентност“, не само е една от основните причини за срива на образованието, но същевременно с фокусирането си върху откъснати от фундаменталните знания „практически“ умения и формирането на предписани нагласи донякъде влиза в противоречие с демократичните ценности, които предполагат свободно, отговорно и самоопределено развитие на личността, зачитане на културното многообразие, свобода на мисълта, на мненията и нагласите в рамките на установеното по демократичен път законодателство.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Council Recommendation of 22 May 2018 on key competences for lifelong learning (2018/C 189/01):

<https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/ALL/?uri=CELEX%3A32018H0604%2801%29>

2. Convention on the Organisation for Economic Cooperation and Development: <https://www.oecd.org/en/about/legal/text-of-the-convention-on-the-organisation-for-economic-co-operation-and-development.html>

3. Gehmacher, E. (1966. Bericht über d. OECD Konferenz in Washington 1961. *Wirtschaftswachstum und Bildungsaufwand. Europäische Kulturpolitik*, Bd. 2. Hg. i.A. der Kulturkommission des Europarates. Wien, Frankfurt, München.

4. Graupe, S., Krautz, J. (2014). Die Macht der Messung, *Coincidentia - Zeitschrift für europäische Geistesgeschichte*. Beiheft 4: Der andere Blick: Fragendes Denken zum theoretischen Rahmen der empirischen Bildungsforschung. Hrsg. v. Schwaetzer, H., Hueck, J., Vollet, M., Kueser Akademie, Bernkastel Kues.

5. Gurria, A. (2011). Editorial – 50 Jahre Bildung im Wandel. *OECD: Bildung auf einen Blick 2011. OECD-Indikatoren*, pp.13-24.

6. Krautz, J. (2015). Kompetenzen machen unmündig. Eine zusammenfassende Kritik zuhanden der demokratischen Öffentlichkeit. *Streitschriften zur Bildung*, Heft 1, hrsg. v. d. Fachgruppe Grundschulen der GEW Berlin, pp.6-21.

7. Löwisch, D.-J. (2000). Kompetentes Handeln. *Bausteine für eine lebensweltbezogene Bildung*, Darmstadt, pp. 87-92.

8. Ministerstvo na obrazovaniето i naukata (2019). *Kompetentnostnrite i referentnrite ramki. (III-book)*:

<https://www.mon.bg/nfs/2019/12/iii-book.pdf>

9. OECD (2004). *Getting to grips with globalisation: the OECD in a changing world*. Paris, OECD.

10. Recommendation of the European Parliament and of the Council of 18 December 2006 on transnational mobility within the Community for education and training purposes: European Quality Charter for Mobility (2006/961/EC):

https://eur-lex.europa.eu/legal-content/BG/TXT/?uri=uriserv%3AOJ.L_.2006.394.01.0005.01.ENG&toc=OJ%3AL%3A2006%3A394%3ATOC

11. Weinert, Fr. (2001). *Leistungsmessungen in Schulen*. Beltz Verlag, Weinheim und Basel.

STUDY ON THE AVAILABILITY OF A COMMERCIAL NETWORK OF RETAIL FUEL OUTLETS IN BULGARIA

Assoc. Prof. Michal Stojanov, PhD
University of economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *В настоящата работа е поставена изследователската цел да се проследи обезпечеността на населението с търговски обекти за продажба на горива в страната през годините на периода 2013-2022 г. Паралелно е проследено развитието на броя на регистрираните леки автомобили в България, които би следвало да бъдат подсигурени с подходяща задоволеност от обекти за продажба на горива. Констатира се несъответстващо изменение на разрастването на автомобилния парк, спрямо разпространеността на обекти от мрежата за търговия на дребно с горива. Разгледани са перспективите за развитие в насока определена от постепенната масовизация на автомобилите с електрическо задвижване и разгръщането на инфраструктурата от алтернативни станции за зареждане в страната.*

Keywords: *Retail trade network; Commercial outlets; Sale of fuels; Fossil fuels*

JEL code: *L81, Q49*

ИЗСЛЕДВАНЕ НА ОСИГУРЕНОСТТА С ТЪРГОВСКА МРЕЖА ОТ ОБЕКТИ ЗА ПРОДАЖБА НА ДРЕБНО НА ГОРИВА В БЪЛГАРИЯ

Доц. д-р Михал Стоянов
Икономически университет – Варна, България

Увод

Впрягането на парната сила, а по-късно и откриването на двигателя с вътрешно горене променя коренно начина, по който съвременният човек се придвижва в ежедневието си. Но едва ли изобретателите на тези технологии са поставяли, още повече приоритизирали в своите начинания, проблемите на ограничеността на ресурсите и значимостта на въглеродния отпечатък от тяхното масово използване. Днес тези въпроси не само придобиват грандиозна актуалност, но и издигат с растяща значимост екологичните изисквания, поставяни за употребата на фосилни горива във всекидневието. Понастоящем потребителят очаква търговската мрежа на дребно за продажби на горива да бъде разгърната в оптимално месторазположени обекти, така че да могат да се осигурят продуктите за задвижване на личните превозни средства, по начин при който осигуреността с тези точки за продажбен контакт трябва относително и в определена степен да бъде приравнена и да наподобява пазарната концепция за предлагане на продуктите от ежедневно потребление. Разбира се, спецификата на тяхната употреба, която е свързана с моторните превозни средства, не предполага търговските обекти, предлагащи горива, да са разположени в рамките на максималното улеснение за достигане, така както това се допуска за групата на т.нар. удобни магазини и продуктите от първа необходимост. Независимо от това, използването на превозни средства за тяхното моторизирано и бързо достигане определя възможността да се говори за тяхното локализиране в точки, предлагащи широки измерения на удобството, практичността и достижимостта.

Основната цел на настоящото изследване е да се проследи динамиката в развитието на обезпечеността на населението с търговски обекти за продажба на горива в страната през годините на периода 2013-2022 г. и да се очертаят основни проблеми и възможности за усъвършенстване.

В рамките на нормативни разпоредби, касаещи осъществяването на търговия с горива, попадат конкретни изисквания за строително-технически правила и норми за осигуряване на безопасност при пожар на автоснабдителните станции за горива и местата за тяхното локализиране. По този начин се извеждат разнообразни ограничения за вместимост, минимални отстояния между съоръжения, обекти в рамките на станцията, съседни строежи и др., които да гарантират функционалната пожарна безопасност на тези обществени обекти (вж. по-подробно: Naredba № Iz-1971, 2018). В голяма степен тези нормативи определят технически спецификации за разполагане на търговските обекти за търговия с горива при планирането и застрояването на урбанизираните територии и извън урбанизираните територии, като допълнително се определя и класификационния критерий за тяхното разграничение според норматив за площ, който установява като малък тип бензиностанция и газостанция такава с до 2000 кв. м, за среден тип се определя с площ до 3000 кв. м, за голям тип обекти до 4000 кв. м, за бензиностанции от голям тип със съоръжения за сервизни услуги – до 5000 кв. м (Naredba № 7, 2022). Следователно, осигуреността на населението с обекти за продажби на горива се предопределя от широк кръг фактори, към които се включват и специфични нормативни разпоредби, касаещи тяхното изграждане и безопасно експлоатиране. Независимо от това, гъстотата на населението, неговата осигуреност с лични моторни превозни средства и характеристиките им, изградената пътна инфраструктура и интензивността на трафика от автомобили, както и конкуренцията в сегмента в най-висока степен определят – гъсто населените жилищни зони или такива с интензивен пътен трафик, както и важни междуселищни шосейни артерии да бъдат атрактивни локации за месторазполагане на търговски обекти за продажба на горива.

Теоретико-методологически проблеми на изследването

Концептуалното разбиране за социалния ефект на търговията на дребно се обвързва с разнообразни насоки на проявление, някои от основните между тях са: „възможно най-пълното задоволяване на потребителското търсене на населението със стоки, намаляване на разходите на време на населението във връзка с покупките, осигуряване на по-голямо задоволство у купувачите при покупките и посещенията на търговските обекти, възможно най-пълно задоволяване на потребителското търсене на купувачите и посетителите на търговските обекти от разнообразни допълнителни търговски и културно-битови услуги, оказвани чрез търговските обекти“ (Salova, 1985, с. 45). За тази цел могат да се използват множество показатели, един от които е степента на задоволеност на населението с търговски обекти на 1 000 или 10 000 жители. Адаптирането на този показател за целите на изследването в настоящата работа е свързано с получаване на количествените оценки за степента на задоволеност на населението в България с обекти за търговия на дребно с горива. Като за по-комплексното проучване на този проблем се извеждат и оценките за осигуреността с търговски обекти за търговия с горива на 10 000 автомобила за лични цели.

Ключово ограничение на изследването е свързано с използването на вторични

данни, систематизирани от Евростат, които обезпечават информацията за периода 2013-2022 г., но за целите на по-задълбочения анализ са приведени допълнително както исторически, така и по-актуални данни, обобщени от НСИ. Това позволява да се проведе сравнителен анализ във времеви контекст с по-голяма познавателна значимост и база за сравнение.

При разглеждането на проблема за степента на осигуреност на населението с обекти за търговия с горива се прилагат класически изследователски методи като контент и критичен анализ, а количественото емпирично изследване е разгърнато върху извеждането на оценките на показателите за степен на задоволеност и тяхното сравнително изследване.

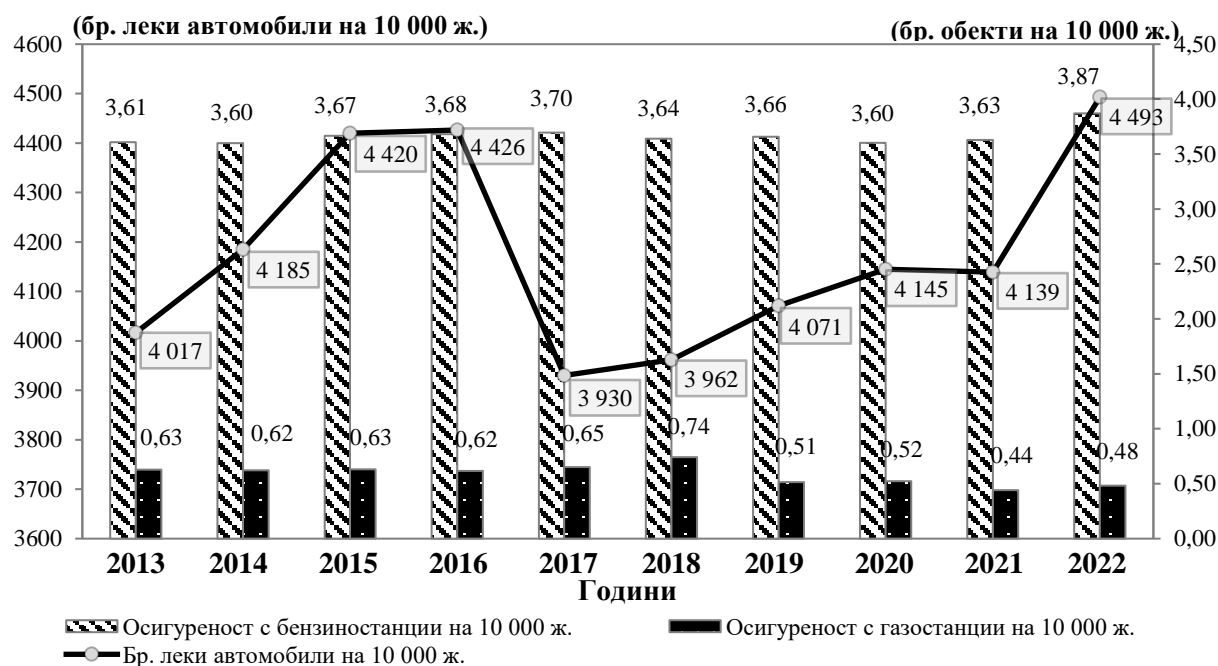
Оценка и анализ на осигуреността с търговски обекти за продажби на горива в България

В рамките на изследвания десетгодишен период (2013-2022 г.) се запазва дългосрочната тенденция за увеличаване на броя на леките автомобили, регистрирани в страната от 2 910 235 бр. през 2013 г. до над 3 006 215 бр. 31.12.2023 г. (Eurostat, 2024), което дава оценка на средногодишния темп на растежа от $CAGR_{2013-2023}=100,3\%$. За сравнение в началото на прехода към пазарна икономика към 31.12.1990 г. в България е имало 1 317 437 бр. леки коли, в това число собственост на населението са били 1 276 751 бр. (NSI, 1992). Нарастването в броя на регистрираните коли в комбинация с трайната негативна тенденция за понижаваща се численост на населението в страната намира своя ефект за съществения ръст на притежаваните автомобили на всеки 10 000 ж. По този показател през 2013 г. гражданите са били обезпечени с 4 017 бр. на 10 000 ж. (вж. фиг. 1), което се покачва до 4 493 бр. на 10 000 ж. през 2022 г., като в сравнителен план през 1990 г. оценката е била 1 420 бр. на 10 000 ж. или относително изменение от над 316% за 2022 г. спрямо 1990 г.

При така формираната се ситуация би следвало да се отчете логическата необходимост, изразена в постепенното повишаване на осигуреността с обекти за продажба на горива, което да е резултат от нарастващия автомобилен парк в страната. Въпреки това реалната ситуация посочва, че в рамките на обследвания период се наблюдава понижение в броя на търговските обекти, специализирани в продажбата на горива. При бензиностанциите от 2 684 бр. през 2012 г. и 2 615 бр. през 2013 г. до 2 495 бр. през 2022 г. или затваряне на 189 бр. обекта за 11 години, докато при газостанциите процесът на отпадане е още по-изразителен от 555 бр. пред 2012 г. и 456 бр. през 2013 г. до 310 бр. през 2022 г. или редуциране с 245 станции за зареждане на МПС с газ спрямо 2012 г. Тази картина на редуциране на броя на търговските обекти резултира в отрицателен средногодишен темп на прираста от $-0,7\%$ в броя на бензиностанциите и $-5,7\%$ в броя на газостанциите за периода 2012-2022 г.

Степента на осигуреност на населението с търговски обекти за продажба на светли горива (бензин и дизел) от 3,68 бр. на 10 000 ж. през 2012 г. и 3,61 бр. на 10 000 ж. през 2013 г. се повишава до най-високата оценка от 3,87 бр. на 10 000 ж. към края на периода на проведеното изследване през 2022 г. Подобна картина на развитие е продукт на бързото понижение в числеността на населението на страната по различни причини в сравнение с условно по-бавното намаление в броя на търговските обекти за търговия с горива. Това означава, че в рамките на направения преглед се отчита подобряване на степента на осигуреност на населението с

бензиностанции, което е предизвикано от по-бързото намаление в числеността на населението в сравнение с намалението, отчетено в броя на търговските обекти за продажба на светли горива. Най-ниска е била обезпечеността от само 3,60 бр. бензиностанции на 10 000 ж., която се е постигнала през 2014 г. и 2020 г.



Фиг. 1. Осигуреност с търговски обекти за продажба на горива на дребно и бр. леки автомобили на 10 000 ж. в България по години на периода 2013-2022 г.

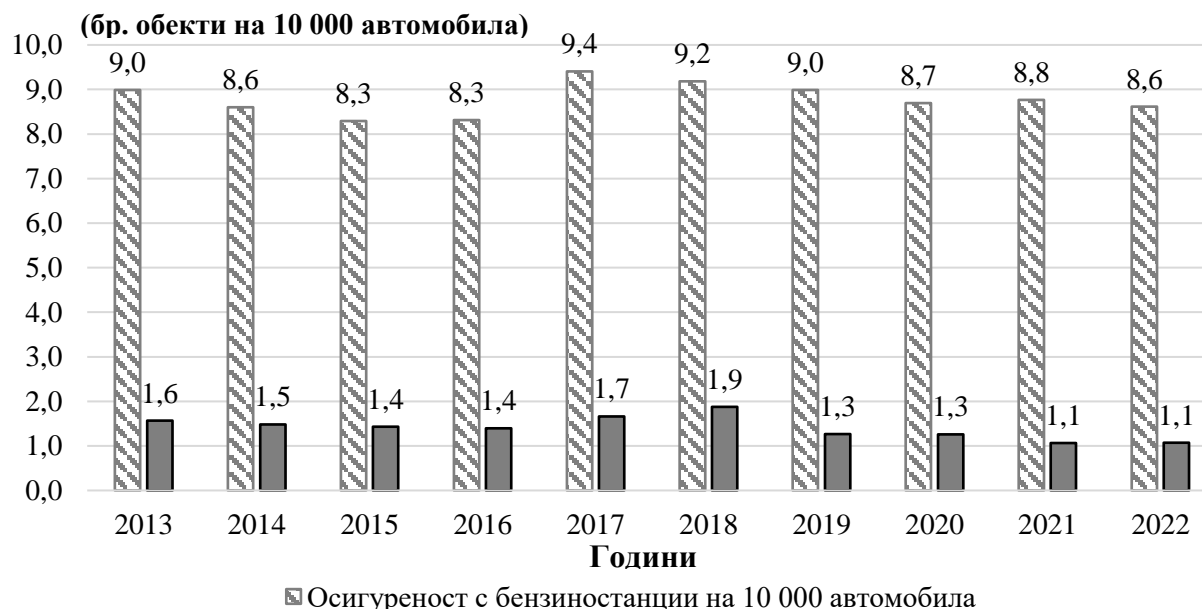
Източник: Разработка на автора по данни от Eurostat и NSI.

При газостанциите се наблюдава противоположна тенденция, а именно най-висока е била обезпечеността към началото на периода от 0,63 бр. газостанции на 10 000 ж. през 2013 г. до минимална оценка от 0,44 бр. на 10 000 ж. през 2021 г. и незначително повишение до 0,48 бр. на 10 000 ж. в края на периода през 2022 г.

Въпреки безусловно по-ниското замърсяване на автомобилите, използващи газ „пропан-бутан“ и природен газ за горивния процес в двигателите с вътрешно горене, осигуреността на населението с газостанции непрекъснато се понижава. Отчасти това може да бъде обяснено с увеличаващата се популярност на комплексността на продуктово предлагане на традиционните бензиностанции, което се разширява и с колонки за зареждане на пропан-бутан (LPG) и/или природен газ (LNG), докато за целите на статистическата отчетност те се специализират и групират като бензиностанции.

Направеното проучване е допълнено с извеждане на оценките за броя обекти, падащи се на 10 000 автомобила, регистрирани в България към 31 декември на съответната година на периода 2013-2022 г. (вж. фиг. 2). Количествените данни показват, че в рамките на целия период имаме понижение в броя на осигуреността на автомобилния парк с бензиностанции от 9 бр. обекти на 10 000 автомобила през 2013 г. до 8,6 бр. обекти на 10 000 автомобила през 2022 г. Най-висока е била тази осигуреност през 2017 г. от 9,4 бр. обекти на 10 000 автомобила, а най-ниска точно в предходните две години 2015 г. и 2016 г. с 8,3 бр. обекти на 10 000 автомобила, това в най-висока степен демонстрира, как при съкращаването на автопарка от 3 143 568 бр. леки автомобили общо регистрирани в страната през 2016 г. до 2 770 615 бр. леки автомобили през 2017 г. независимо от понижаващия се брой на

бензиностанциите от 2 613 бр. през 2016 г. до 2 605 бр. през 2017 се повишава осигуреността на 10 000 автомобили с обекти за продажба на светли горива. Сходна е картината на развитие и при газостанциите, където от 1,6 бр. обекти на 10 000 автомобили през 2013 г. се отчита понижение до най-ниското значение от 1,1 бр. обекти на 10 000 автомобили през 2022 г., като тук най-високата оценка е получена също през 2017 г. от 9,4 бр. газостанции на 10 000 автомобили регистрирани в страната.



Фиг. 2. Осигуреност с търговски обекти за продажби на горива на дребно на 10 000 автомобили в България по години на периода 2013-2022 г.

Източник: Разработка на автора по данни от Eurostat и NSI.

Очаквано развитие

Като нова и с голям потенциал се оформя разрастващата се популярност на автомобилите с електрическо задвижване. Те се явяват очакван заместител на традиционните двигатели с вътрешно горене, които в обозримо бъдеще постепенно ще бъдат изключвани в продуктовото предлагане на автомобилните производители. В рамките на ЕС след 2035 г. на първичния пазар ще могат да се предлагат единствено нови автомобили, които постигат условно климатична неутралност, с чиято помощ може да бъде изпълнена целта за намаление с 55% на емисиите с парникови газове до 2030 г. в сравнение с базисната 1990 г., заложили в пакета от мерки „Готови за цел 55%“ (European Council, Council on the European Union, 2023). Това предполага постепенно масовизиране на автомобилите с алтернативни форми на задвижване, което изтласква на предно място проблемите за осигуреността на потребителите с обекти за предлагане на тези алтернативни източници на енергия (електрически зарядни станции, водородни станции, синтетични горива – E-Fuels и др.). Така на практика в обозрим хоризонт изпълнението на заложените стратегически таргети ще предизвиква съществена промяна на пазара за горива. Тя е свързана с разрастващото се търсене на продуктите, необходими за алтернативното задвижване на леките автомобили, като с най-сериозен очакван ръст са електрическите зарядни станции. Това създава възможност както за появата на специализирани обекти, така и за трансформацията на съществуващата търговска

мрежа за търговия с фосилни горива в предлагане на услугата за зареждане на електрическите превозни средства или такива с други алтернативни форми на горива с нулеви емисии (водород, амоняк).

Към месец септември 2024 г. броят на електрическите зарядни станции, обхващащи територията на страната, е 2 187 бр., разположение в 1 562 локации. От тях 497 бр. станции са за бързо зареждане или използващи прав ток (DC), които могат да обезпечат зареждане в диапазон от 20 kW до 240 kW. Останалите 1 065 бр. са от тип, прилагащи технологията на променлив ток (AC) в границите на мощност от 7 kW до 22 kW (VsichkoTok, 2024). Така постепенно в България се формира мрежа от търговски обекти за зареждане на електрически превозни средства, която в голяма степен равномерно да покрие територията на цялата страна.

Възможността за адаптивна промяна на съществуващите търговски обекти за продажба на горива на дребно изисква реорганизиране и преустройство на технологията на търговския процес. На първо място това е времето за зареждане на един електрически автомобил, което в сравнение с условно бързата пропускателна способност на колонките за конвенционални горива при електромобилите е по-продължително. Така например за средния пробег на един европейец от 12,41 км на ден са необходими около 2,48 kWh ел. енергия, което отнема 23 минути при зареждане на домашна станция с мощност 7,4 kW, 16 минути с 11 kW станция и 9 минути с 22 kW станция, аналогичните параметри за един американски шофьор са средно 36,92 мили на ден, което изисква около 11,81 kWh ел. енергия на ден, което би отнело 1 час и 50 минути с домашна зарядна система от 7,4 kW, 1 час и 18 минути с устройство с мощност от 11 kW и 43 минути със зарядна станция с мощност от 22 kW (EVBOX, 2024). Според данните на Департамента на транспорта на САЩ при употреба на станция за бързо зареждане с постоянен ток (Direct Current Fast Charging (DCFC)) за 60 kWh батерия са необходими между 20 минути до 1 час за достигане на 80% от капацитета на батерията (U.S. Department of Transportation, 2023). Следва да се обърне специално внимание на тази критична стойност от 80% на капацитета на батерията, след която зареждането не може да продължи по условно най-мощната и бърза технология с висок заряд, тъй като това е свързано с необходимостта да се предпази батерията от евентуални повреди. Подобно технологично ограничение логично води до прогресивно нарастване на времето за зареждане след достигане на до 80% до постигане на пълно 100% от капацитета на заряд на батерията. Това предполага увеличаване на броя на обслужващите станции в рамките на един обект за зареждане, поради необходимото време за обслужване на един автомобил. В най-общ план и в практическите измерения на съществуващите търговски обекти за конвенционални горива това често е физически невъзможно.

Втори важен аспект е наличността на капацитет и степента на изграденост на електропреносната мрежа. В настоящето съществуващата инфраструктура на електропреносната мрежа (в домашни, градски, селски условия и в извън населените места) често пъти е несъвместима или не може да покрие нуждите за обезпечаване на електрически товар на една станция за зареждане на електрически автомобили. Нещо повече, неравномерността в потреблението може да бъде следващо сериозно предизвикателство във връзка с постоянното обезпечаване на мощност при моментни скокове и спадове в търсенето. Това, разбира се, създава по-широки възможности за още по-динамично ценообразуване на електрическата енергия за зареждане на електромобили в сравнение с конвенционалните горива, както и за

използване на възобновяема енергия и нейното съхраняване в различни по-големина батерии и акумулаторни станции.

Допълнителен аспект на възможно разпространение на зарядните станции за електрически автомобили е тяхното изграждане в обекти от прилежащата градска или обществена инфраструктура (общински паркинги, търговски центрове, обекти на големи търговски вериги и др.). По този начин осигуреността на населението с алтернативи за зареждане на електрически превозни средства ще бъде по-добре обезпечена. Нещо повече, възможността в домашни условия да се изгради/инсталира станция за зареждане на електрически автомобили, напълно променя концепцията на бизнес идеята за търговия с ресурса необходим за задвижването на лични автомобили, където се елиминира специализирания търговски агент и условно се скъсява веригата за доставка на продукта. Така на практика доставчикът на електрическа енергия за битовите потребители замества традиционните специализирани търговци на горива, което създава възможност за появата на нова група специализирани посредници. Не следва да се пропуска, че в контекста на зеления преход и необходимостта от редуциране на въглеродните емисии, съществуват широки възможности за изграждане и използване на електрическа енергия от възобновяеми енергийни източници и нейното съхранение между периодите на свръхпроизводство и моментите на реално потребление. Последното може да превърне и домакинствата с изградени възобновяеми енергийни системи в доставчици на електрическа енергия, която да покрива нуждите на други потребители с електрически превозни средства. Това позволява търговски обекти от мрежата от зарядни станции да бъдат локализирани в отдалечени, изолирани и неатрактивни за традиционните търговци на горива локации.

Като следващ важен момент, свързан с потреблението на услугите на електрическите зарядни станции, е синергичният ефект, който се постига между прилежащите търговски обекти и зарядните станции сами по себе си. По-конкретно времето за изчакване, което е необходимо, за да се изпълни енергийния трансфер, предполага възникване на ситуация, която да бъде оползотворена за изпълнение на алтернативно търговско посещение и шопинг на допълващи или други продукти. Така на практика продължителността на времето за търговско обслужване от електрическа зарядна станция може да бъде използвано за целите на предлагането на допълващи асортименти от стоки и услуги. Комбинирането на търговски обекти за продажба на горива с други подвижни или стационарни обекти за търговия с храни, напитки, автомобилни консумативи и части, застрахователни продукти, услуги по поддръжка на автомобила и леки ремонти, пунктове за годишен технически преглед и др. позволява да се увеличи притегателната сила в обекти с високо равнище на комплексност на предлаганата търговска услуга.

Заклучение

Предизвикателствата на Зеления преход поставят пред обществото необходимост от предприемане на индивидуални и колективни решения за бъдещето на търговските обекти за зареждане с фосилни горива. На този етап наличната търговска мрежа от обекти под комбинираното въздействие на разрастващия се автопарк, промяната в предпочитанията за използване на алтернативни форми на задвижване, нарастващата конкуренция в сектора и други фактори, водят до непрекъснати промени, за да се отговори на предизвикателствата както в настоящето, така и в обозримото бъдеще на необходимостта от постигане на

климатична неутралност. Получените в разработката количествени оценки и тяхната непрекъсната динамика демонстрират, че в пазарния сегмент на търговията с горива се наблюдават силни процеси на адаптивни усъвършенствания, както спрямо промените в автопарка от леки автомобили, така и в нарастващата популярност на лични превозни средства с алтернативни форми на задвижване.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. European Council, Council on the European Union. (2023). 8 ways life in the EU is becoming greener. [online] Available at: <https://www.consilium.europa.eu/en/8-ways-life-in-the-eu-is-becoming-greener/> [Accessed 21.09.2024].

2. EVBOX. (2024). How long does it take to charge an electric car at home? [online] Available at: <https://evbox.com/en/how-long-to-charge-EV-at-home> [Accessed 23.09.2024].

3. Naredba № 7 от 22 декември 2003 г. за правила и нормативи за устройство на отделните видове територии и устройствени зони. (2022). // Обн. *DV*. br.3 от 13 Януари 2004г., посл. изм. и доп. *DV*. br.84 от 21 Октомври 2022г. [online] Available at: <https://lex.bg/laws/ldoc/2135476546> [Accessed 01.10.2024].

4. Naredba № Iz-1971 от 29 октомври 2009 г. за строително-технически правила и норми за осигуряване на безопасност при пожар. (2018). // Обн. *DV*. br.96 от 4 Декември 2009г., посл. изм. и доп. *DV*. br.63 от 31 Юли 2018г. [online] Available at: <https://lex.bg/laws/ldoc/2135653786> [Accessed 01.10.2024].

5. NSI. (1992). *Statisticheski godishnik na Republika Balgariya 1991*. S.: NSI.

6. Salova, N. (1985). *Osnovni problemi na organizatsiyata i ефективността на ватрешната търговия*, Varna: VINS D. Blagoev.

7. U.S. Department of Transportation. (2023). *Charger Types and Speeds*. [online] Available at: <https://www.transportation.gov/rural/ev/toolkit/ev-basics/charging-speeds> [Accessed 23.09.2024].

8. VsichkoTok. (2024). *eKars BG EOOD*. [online] Available at: <https://vsichkotok.bg> [Accessed 25.09.2024].

USING AFFINE TRANSFORMATIONS IN MS EXCEL TO IMPROVE MOTIVATION TO LEARN ELEMENTS OF LINEAR ALGEBRA

Associated Professor Deyan Mihaylov, PhD
University of Economics-Varna, Bulgaria

***Abstract:** Basic tools of linear algebra are vectors and matrices and operations with them. They are abstract in nature and in many students are not motivated to learn them. To improve motivation in this matter, an application of matrices to affine transformations in the plane is proposed in this paper. An example implemented in the MS Excel environment is presented. It is recommended to use appropriate funny images as transformation objects.*

***Keywords:** Affine Transformation; MS Excel*

***JEL code:** C65*

ИЗПОЛЗВАНЕ НА АФИННИ ТРАНСФОРМАЦИИ В СРЕДАТА НА MS EXCEL ЗА ПОВИШАВАНЕ НА МОТИВАЦИЯТА ЗА ИЗУЧАВАНЕ НА ЕЛЕМЕНТИ ОТ ЛИНЕЙНАТА АЛГЕБРА

Доц. д-р Деян Михайлов
Икономически университет – Варна, България

Въведение

Математиката е инструмент, използван за анализиране и решаване на проблеми, свързани с почти всички аспекти на живота. По-специално, линейната алгебра е едно от най-полезните средства в инструментариума на математиката. Мощните техники на линейната алгебра се използват в другите клонове на математиката и в много разнообразни приложения в различни други науки (Andrilli & Hecker, 2010).

Възможността за прилагане в различни области се дължи на абстрактния характер на линейната алгебра. Тази абстрактност се проявява и в характера на едни от нейните основни обекти, матриците, и в действията с тях, и предизвиква до известна степен неразбиране на смисъла им. Осъзнаването на полезността на този инструментариум се затруднява и от факта, че операциите с матрици са трудоемки, свързани са с еднообразно повтарящи се дейности, които са досадни за студентите. Като резултат следва ниска мотивация и пренебрежително отношение към дисциплината. Както се отбелязва и в други изследвания, у някои студенти се утвърждава мнението, че тези знания не са необходими (Madzharova, 2022).

Изграждането на мотивация за изучаване на матриците и действията с тях може да се постигне чрез разглеждане на подходящи примери. Като такива може да се използват афинните трансформации на графични обекти в равнината. Поради изчислителната сложност на процеса е целесъобразно да се използва подходящ софтуер. Тъй като компютърната техника е широко разпространена във висшите училища (и не само там), това не е проблем.

Целта на настоящата разработка е да се представи един начин за включване на афинните трансформации в обучението по линейна алгебра и аналитична геометрия. Трансформациите на изображения се използват в компютърната графика и

разглеждането на такъв пример е полезно за студентите, обучаващи се по специалности от професионално направление „Информатика и компютърни науки“, а и за всички, проявяващи интерес към темата.

Постановка на задачата и решение

Нека са зададени един графичен обект оригинал и изискванията, на които трябва да отговаря неговия образ. Необходимо е да се намери закон, който да отвежда оригинала в образа. Като ограничение се приема, че трансформацията е афинна, т.е. трансформационния оператор е линеен и обратим.

Както е известно, общият вид на една афинна трансформация е

$$X^{(1)} = T \cdot X + X_0, \quad (1)$$

където: X е векторът-оригинал;
 $X^{(1)}$ е векторът-образ;
 T е обратима матрица;
 X_0 е вектор.

В случаите на трансформация на графичен обект в равнината (1) добива следния вид:

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В израза (2) матрицата $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ задава ротацията, мащабирането и скосяването (sheer) на образа, а векторът $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ задава трансляцията по абсцисата и ординатата.

Удобно е да се използват хомогенните координати на точките, като в този случай (2) може да се представи в следния вид:

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & x_0 \\ a_{21} & a_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Квадратната матрица в (3) може да се определи като оператор на трансформацията. Негови частни случаи са (House & Keyser, 2017), (Gonzalez & Woods, 2018):

- $C = \begin{pmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - оператор на чистото мащабиране (скалиране) на

образа. Параметрите c_x и c_y са коефициентите на промяна на мащаба по абсцисата и ординатата;

- $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - оператор на чистата ротация на образа.

Параметърът θ е ъгълът, на който се завърта изображението по посока,

обратна на часовниковата стрелка. Върхът на ъгъла е началото на координатната система.

$$- S = \begin{vmatrix} 1 & s_x & 0 \\ s_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad - \text{оператор на чистото скосяване (Sheer) на образа}$$

Параметрите s_x и s_y са факторите на скосяване на изображението по координатните оси.

$$- X_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad - \text{оператор на чистата трансляция на образа.}$$

Параметрите x_0 и y_0 са стойностите на линейното изместване на образа по координатните оси.

За демонстрация на трансформациите е необходимо да се използва подходящ софтуер. Избран е MS Excel по няколко причини. Продуктът е познат на студентите от изучаването му в основното и средното училище. В MS Excel има вградени функции за работа с матрици, които могат да се използват, и графични възможности (макар и твърде скромни). Не на последно място MS Excel дава възможност за непосредствено проследяване на изчислителния процес, което е полезно в хода на обучението. Изборът на MS Excel се основава и на факта, че съществува известен опит в използването му при преподаване на отделни теми от математиката (Penev, 2018).

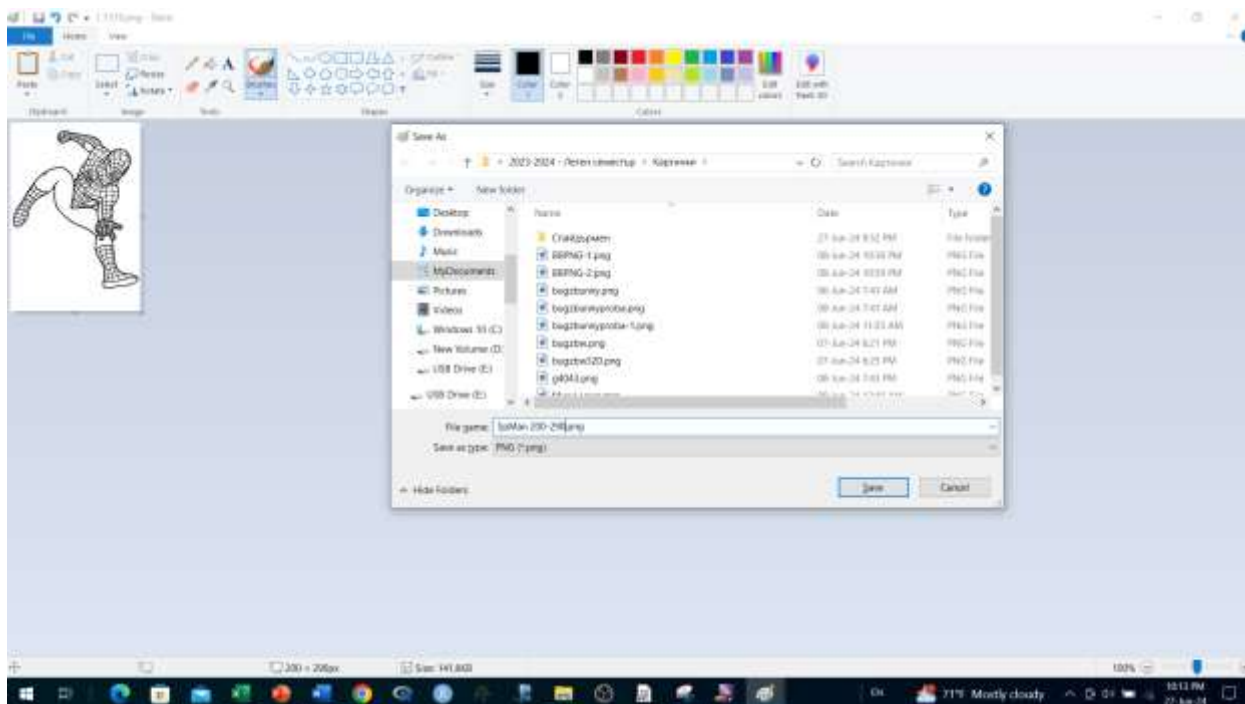
Трансформацията (3) предполага, че векторите на точките на графичните обекти са вектори-стълбове. В MS Excel е по-удобно точките на графичните обекти да се представят като редове от матрица. Следователно, като се използва свойството $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ на операцията умножение на матрици, (3) се представя във вида

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & y_1^{(1)} & 1 \\ x_2^{(1)} & y_2^{(1)} & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(1)} & y_n^{(1)} & 1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

За намаляване обема на данните може да се препоръча да се използват контурни монохромни изображения. Всяка точка от контура се представя с нейните координати. Лявата матрица от матричното произведение в (4) съдържа хомогенните координати на точките от оригинала. Матрицата в дясната част на (4) съдържа хомогенните координати на точките от образа.

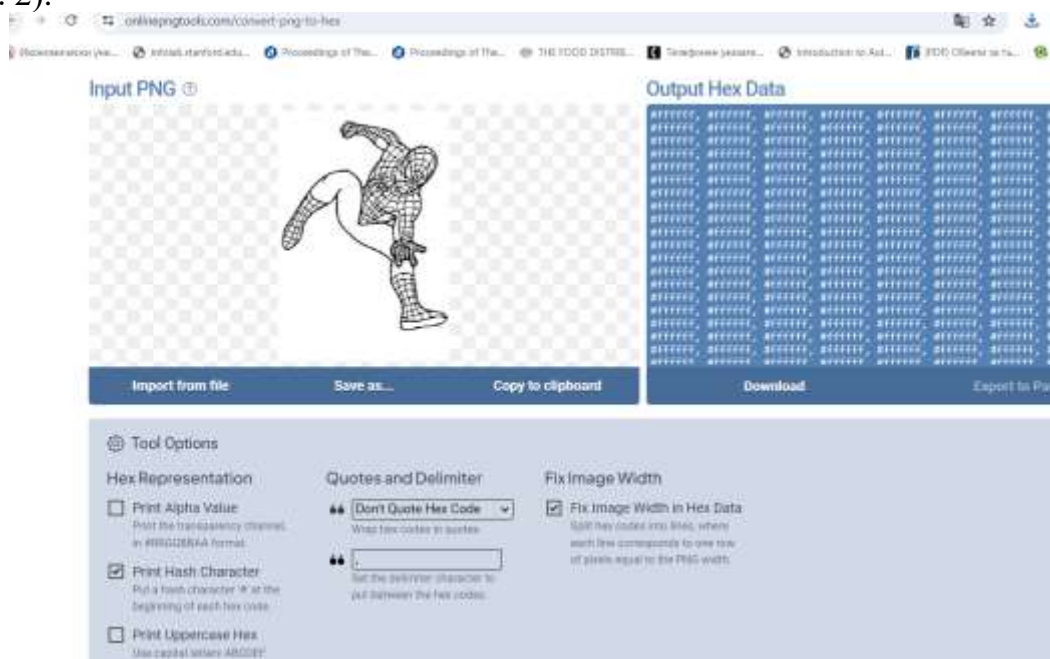
За генериране на матрицата, съдържаща координатите на точките от оригинала може да се използва следната последователност от действия:

Намира се (или се създава) подходящо контурно монохромно изображение на бял фон. В глобалната мрежа, например, може лесно да се открият подобни. Изображението се преобразува във формат PNG и размерът му се намалява, за да се намали обемът на матрицата с координатите на точките на оригинала. Опитът показва, че размер 200/300 пиксела е достатъчен, за да се осигури добро качество. Преобразуването може да се извърши, например, с инструмента Paint от Windows Accessories. На фиг. 1 е показана такава обработка на контурно изображение на анимационния герой Спайдърмен.



Фигура 1. Преобразуване на изображение в средата на Paint
 Източник: Собствена разработка.

От формата PNG трябва да се извлече информация за точките на изображението в разпознаваем от MS Excel вид. Един от начините е да се генерира матрица, елементите на която да съдържат информация за цвета на всяка точка от изображението. За създаването на такава матрица може да се използва web-базирания инструмент <https://onlinepngtools.com/convert-png-to-hex>, който преобразува PNG формат в текстов файл. В негов шестнадесетичен код във формат #RRGGBB са описани цветовете на всяка точка. Точките са подредени в редове и колони, като точките с черен цвят са с код #000000, точките с бял цвят са #FFFFFF. (фиг. 2).



Фигура 2. Преобразуване на PNG формат в текстов файл.
 Източник: Собствена разработка.

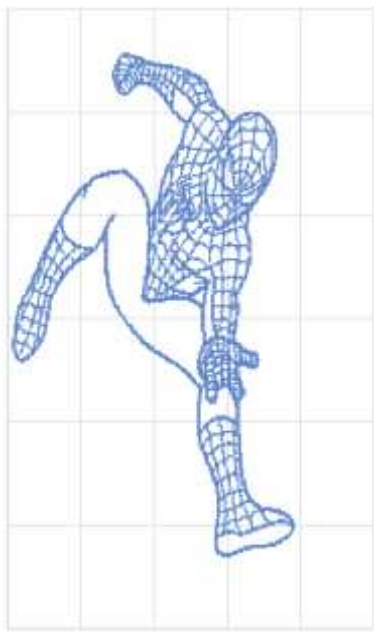
В съответствие със зададените опции се генерира текстов файл output-onlinepngtools.txt, който може да се разговори на локалното устройство. Файлът се отваря в средата на Excel. В някои от полетата има интервали и те трябва да се премахнат, например с команда Replace.

В средата на MS Excel е необходимо да се извърши допълнителна обработка. За всяка точка се извличат координатите, които са равни на изместването на клетката, в която е описанието на точката спрямо най-горната лява клетка на масива. В отделен лист за всяка точка се създава ред, в който се извличат координатите и стойностите на интензивността на отделните цветове – червен (R), зелен (G) и син (B). При определянето на координатите трябва да се има предвид, че изображенията с формат PNG са в лявоориентирана координатна система, като положителната посока на оста OY е отгоре надолу, а изображението в средата на MS Excel ще бъде в дясноориентирана координатна система. Следователно ординатите на точките трябва да се модифицират.

Следва отстраняване на точките, които са с по-голяма наситеност на цветовете. За всяка точка се пресмята обобщена наситеност, като сума от интензивностите на трите цвята. Отстраняването става последователно, като точките се сортират по възходящ ред на наситеността. На фиг. 3 са показани няколко изображения, в които се използват точки с наситеност по-малка от 765, от 500 и т.н. Подбира се изображение, съдържащо възможно най-малко точки (за намаляване обема на файла), но с достатъчно добро качество. В случая добри са изображенията с използване на точки с наситеност до 200 или до 300. Трябва да се има предвид, че това не е правило. Долната граница, при която качеството на изображението се влошава, може да бъде различна за различните изображения.



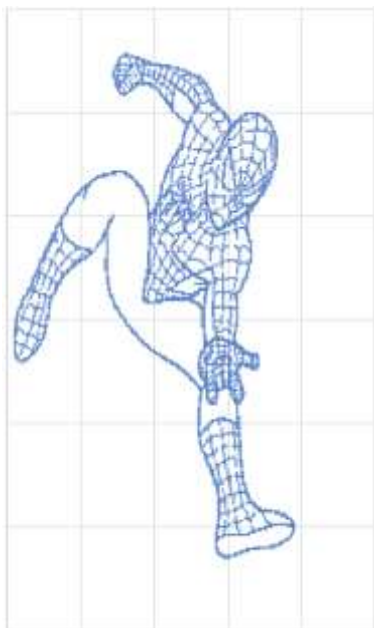
А) Използват се точки с наситеност по-малка от 765. Брой на точките – 7993



Б) Използват се точки с наситеност по-малка от 500. Брой на точките – 6244



В) Използват се точки с наситеност по-малка от 400. Брой на точките – 5622



Г) Използват се точки с наситеност по-малка от 300. Брой на точките – 4950



Д) Използват се точки с наситеност по-малка от 200. Брой на точките – 4293



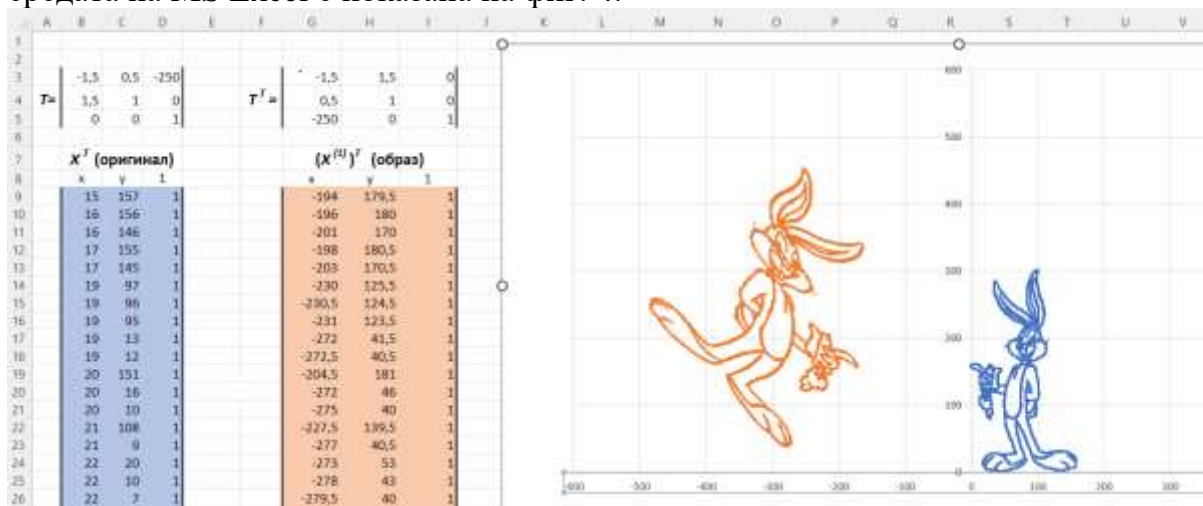
Е) Използват се точки с наситеност равна на 0. Брой на точките – 3633.

Фигура 3. Преобразуване на PNG формат в текстов файл.

Източник: Собствена разработка.

По подобен начин могат да се създадат различни изображения.

Примерна трансформация на изображение на друг анимационен герой в средата на MS Excel е показана на фиг. 4.



Фигура 4. Примерна трансформация

Източник: Собствена разработка.

Чрез съдържанието на клетки В3:D4 се задават параметрите на трансформацията. С добавяне на клетки В5:D5 се получава разширената матрица T . Като се използва функцията TRANSPOSE, матрицата T се транспонира в клетки G3:I5.

Хомогенните координати на точките, описващи оригинала се записват в клетки В9:D3641. Получената матрица се умножава с матрицата от клетки G3:I5 с помощта на функцията MMULT и резултатът се записва в клетки G9:I3641.

Графиките на оригинала и образа на обекта се получават с използване на диаграма на разсейване (scatter).

Заклучение

Показаният пример нагледно представя използването на операциите с матрици при създаване на образи на даден оригинал. Използването му в практическите занятия по линейна алгебра и аналитична геометрия спомага за повишаване на интереса на студентите към изучавания материал. Разработването на набор от такива нагледни примери и представянето им по време на лекции или упражнения създава положителни емоции у студентите.

Такива примери биха могли да бъдат използвани и като задачи за самостоятелна работа. В заданието може да се включи трансформирането на изображение в масив от координати на точки и създаване на оператори, които да извършат трансформация с предварително зададени параметри.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Andrilli, S., & Hecker, D. (2010). *Elementary Linear Algebra* (4th izd.). Elsevier Inc.
2. Gonzalez, R. C., & Woods, R. E. (2018). *Digital Image Processing*. New York: Pearson Education.
3. House, D. H., & Keyser, J. C. (2017). *Foundations of Physically Based Modeling and Animation*. Boca Raton: Taylor & Francis.
4. Madzharova, T. (2022). *Problems in Teaching of Mathematics in Engineering Specialities at Nikola Vaptsarov Naval Academy*. Conference Proceedings: The Role of Fundamental Programs in Higher Education (pp. 55-60). Varna: University of Economics.
5. Penev, P. (2018). *Solving Linear Equations with Excel*. Mathematics and informatics. Vol. 61 (2), pp. 154-163

A PRACTICAL PROBLEM IN ANALYTIC GEOMETRY

Chief Assist. Prof. Yordan Petkov, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Assoc. Prof. Radan Miryanov, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *The report presents a possible application of the knowledge provided by the fundamental mathematical discipline “Linear Algebra and Analytic Geometry” in solving an informatics problem, more precisely, a Computer Graphics problem. In addition, the given task provides a good opportunity to exercise the theoretical statements related to vectors and an equation of a line in the plane.*

Keywords: *Interior point; Triangle; Analytical geometry; Computer graphics.*

JEL code: *C60*

ЕДНА ПРАКТИЧЕСКА ЗАДАЧА ПО АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

Гл. ас. д-р Йордан Петков
Икономически университет – Варна, България

Доц. д-р Радан Мирянов
Икономически университет – Варна, България

В последните години, при обсъждане съдържанието на учебните програми във висшите училища, все по-усилно се поставя въпросът за приложимост на получаваните знания и умения в практиката. Въпреки че по отношение на фундаменталните дисциплини необходимостта от обосновка на практическата полза е поражда дискусии, все по-често самите студенти задават въпроси от типа на „къде в практиката ще ни потрябват тези знания?“. В особена степен това важи по отношение на фундаменталните математически дисциплини в специалностите от направление 4.6. Информатика и компютърни науки, студентите в които трудно осъзнават, че математически инструментариум лежи в основата на множество (да не кажем на по-голямата част, дори на всички) алгоритми, функции или най-различни функционалности, които те използват наготово в съвременните софтуерни продукти и среди за разработка.

В тази връзка целта на авторите на настоящия доклад е да покажат една възможност за приложение на знанията, получени в курса по Линейна алгебра и аналитична геометрия, за решаване на конкретна информатична задача в областта на компютърната графика.

Изрично ще отбележим, че представената тук постановка е малка демонстрация на възможностите, които тази фундаментална математическа дисциплина предоставя, и съвсем не изчерпва значението ѝ в редица области на компютърните науки.

Задачата, поставяна на студенти в упражненията по Линейна алгебра и аналитична геометрия, е следната (Николаев и Господинова, 2014) - да се състави алгоритъм на програма, която изобразява триъгълник по координатите на трите му

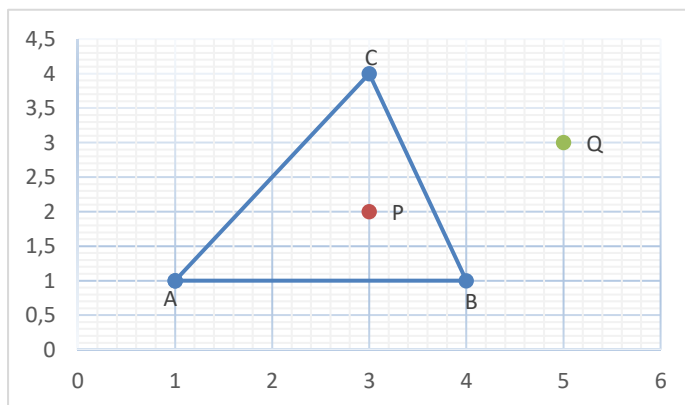
върха. При кликване с мишката във вътрешността или по контура на триъгълника, той да се оцветява в червено, при кликване с мишката извън триъгълника, той да се оцветява в синьо.

На поставената задача съответства следната математическа формулировка: дадени са координатите на върховете $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ на триъгълник ABC и на точка $P(x_0, y_0)$. Да се определи дали точката P лежи в или извън триъгълника (към случая, при който точка P лежи в триъгълника ще причисляваме и случаите, при които тя лежи и върху някоя от страните му).

Тук няма да разглеждаме известните алгоритми за запълване (оцветяване) на затворени фигури, като „метод на сканиращата линия“, „наводняващ алгоритъм“ и др., използвани в графичните софтуерни продукти, за които в интернет има достатъчно информация и разработени функционалности (Лазарова, 2013; Filled Area Primitives; Scan-line Polygon filling using OpenGL in C, 2022; Flood fill Algorithm – how to implement fill() in paint?, 2022; Boundary Fill Algorithm, 2024). Вниманието ни ще бъде насочено към начините за решаване на поставената задача чрез използване на учебния материал от темите „Вектори“ и „Аналитична геометрия в равнината“. Освен това ще представяме твърденията без доказателства, тъй като те следват непосредствено от известни теоретични постановки или лесно могат да бъдат изведени от тях,

Първи начин – чрез определяне на положението на точка P спрямо правите, върху които лежат страните на триъгълника. Точка P лежи в триъгълник ABC , ако за всяка от правите, минаващи през два от върховете му, тази точка и третият връх се намират в една и съща полуравнина на правата. Ако дори в един от трите случая третият връх и точката лежат в различни полуравнини, то P е извън триъгълника. За определяне на принадлежността на точката $L(m, n)$ към едната или другата полуравнина на правата с уравнение $l: ax + by + c = 0$ може да се използва знакът на ориентираното разстояние от тази точка до правата $\delta(L, l) = \frac{am + bn + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$ или просто знакът на израза $\partial(L, l) = am + bn + c$. Две точки лежат в една и съща полуравнина, ако знаците на δ или ∂ съвпадат и в различни полуравнини, ако знаците не съвпадат (Суружон и Запрянова, 2022).

Пример 1. Даден е триъгълник ABC с координати на върховете $A(1,1), B(4,1), C(3,4)$. Да се определи дали всяка от точките $P(3,2)$ и $Q(5,3)$ лежи в или извън този триъгълник (фиг. 1).



Фиг. 1

Източник: Съставена от автора

Уравнението на правата AB , намерено през двете точки $A(1,1)$ и $B(4,1)$, е:

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-1}{1-1} \Leftrightarrow y-1=0. \text{ Тогава } \partial(C, AB) = 4-1=3 > 0, \partial(P, AB) = 2-1=1 > 0 \text{ и}$$

$\partial(Q, AB) = 3-1=2 > 0$, следователно точки C, P и Q лежат в една и съща полуравнина спрямо правата AB (*).

Уравнението на правата BC , намерено през точки $B(4,1)$ и $C(3,4)$, е:

$$\frac{x-4}{3-4} = \frac{y-1}{4-1} \Leftrightarrow 3x+y-13=0. \text{ Тогава } \partial(A, BC) = 3 \cdot 1 + 1 - 13 = -9 < 0,$$

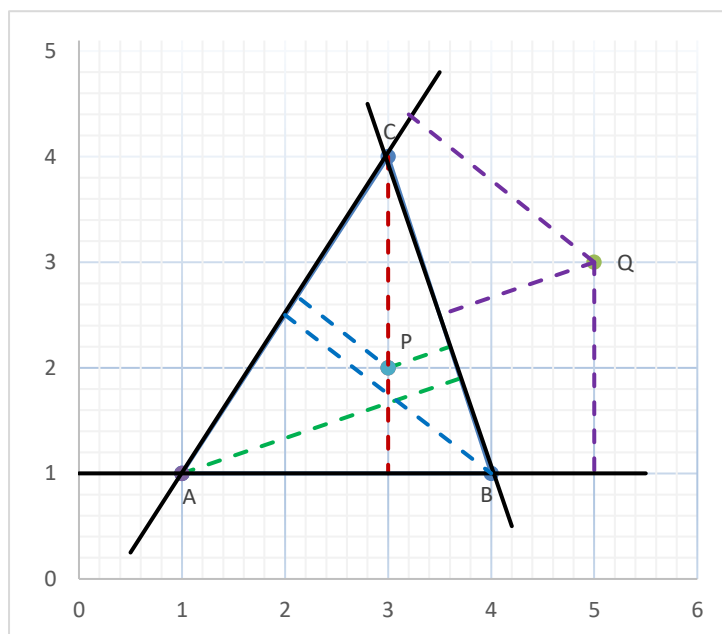
$\partial(P, BC) = 3 \cdot 3 + 2 - 13 = -2 < 0$ и $\partial(Q, BC) = 3 \cdot 5 + 3 - 13 = 5 > 0$, следователно точки A и P лежат в една и съща полуравнина спрямо правата BC , а точки A и Q лежат в различни полуравнини (**).

Уравнението на правата AC , намерено през точки $A(1,1)$ и $C(3,4)$, е:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{4-1} \Leftrightarrow 3x-2y-1=0. \text{ Тогава } \partial(B, AC) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 - 1 = 9 > 0,$$

$\partial(P, AC) = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 1 = 4 > 0$ и $\partial(Q, AC) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 - 1 = 8 > 0$, следователно точки B, P и Q лежат в една и съща полуравнина спрямо правата AC (***)

От (*), (**) и (***) следва, че точка P лежи в триъгълник ABC , а от (**) - че точка Q лежи извън него (фиг. 2).



Фиг. 2

Източник: Съставена от автора

Втори начин – чрез определяне на положението на всеки два от върховете на триъгълника спрямо правата, минаваща през точката P и през третия му връх. Точка P лежи в триъгълник ABC , ако за всяка от правите, минаващи през един от върховете му и през тази точка, другите два върха на триъгълника лежат в различни полуравнини на правата. Ако дори в един от трите случая другите два върха лежат в една и съща полуравнина, то P е извън триъгълника.

Пример 2. За триъгълник ABC и точки P и Q от пример 1 се получава:

Уравнението на правата AP , намерено през двете точки $A(1,1)$ и $P(3,2)$, е:

$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{2-1} \Leftrightarrow x-2y+1=0$. Тогава $\partial(B, AP) = 4-2 \cdot 1+1=3 > 0$ и $\partial(C, AP) = 3-2 \cdot 4+1=-4 < 0$, следователно върховете B и C лежат в различни полуравнини спрямо правата AP (#).

Уравнението на правата BP , намерено през точки $B(4,1)$ и $P(3,2)$, е:

$\frac{x-4}{3-4} = \frac{y-1}{2-1} \Leftrightarrow x+y-5=0$. Тогава $\partial(A, BP) = 1+1-5=-3 < 0$ и $\partial(C, BP) = 3+4-5=2 > 0$, следователно върховете A и C лежат в различни полуравнини спрямо правата BP (##).

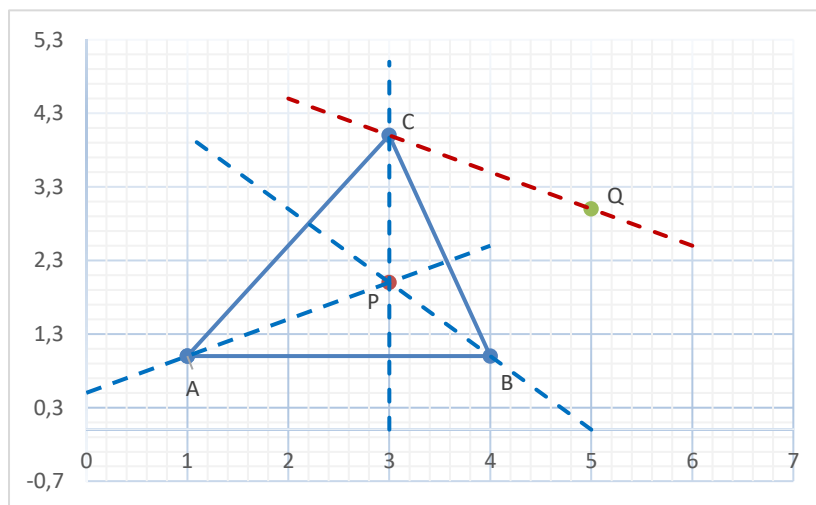
Уравнението на правата CP , намерено през точки $C(3,4)$ и $P(3,2)$, е:

$\frac{x-3}{3-3} = \frac{y-4}{2-4} \Leftrightarrow x-3=0$. Тогава $\partial(A, CP) = 1-3=-2 < 0$ и $\partial(B, CP) = 4-3=1 > 0$, следователно върховете A и B лежат в различни полуравнини спрямо правата CP (###).

От (#), (##) и (###) следва, че точка P лежи в триъгълник ABC (фиг. 3).

Уравнението на правата CQ , намерено през точки $C(3,4)$ и $Q(5,3)$ е:

$\frac{x-3}{5-3} = \frac{y-4}{3-4} \Leftrightarrow x+2y-11=0$. Тогава $\partial(A, CQ) = 1+2 \cdot 1-11=-8 < 0$ и $\partial(B, CQ) = 4+2 \cdot 1-11=-5 < 0$, т.е. върховете A и B лежат в една и съща полуравнина спрямо правата CQ , следователно точка Q е извън триъгълник ABC (фиг. 3).



Фиг. 3

Източник: Съставена от автора

Трети начин – чрез лица на триъгълници. Намират се лицата на триъгълниците ABC , ABP , BSP и ACP по координатите на техните върхове. Ако е изпълнено равенството $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABP} + S_{\Delta BSP} + S_{\Delta ACP}$, то точката P лежи в триъгълник ABC , в противен случай лежи извън него (Николаев и Господинова, 2014). За пресмятане на лице на триъгълник може да се използва формулата (Николаев и др., 2021).

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix},$$

където $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ са координатите на трите му върха.

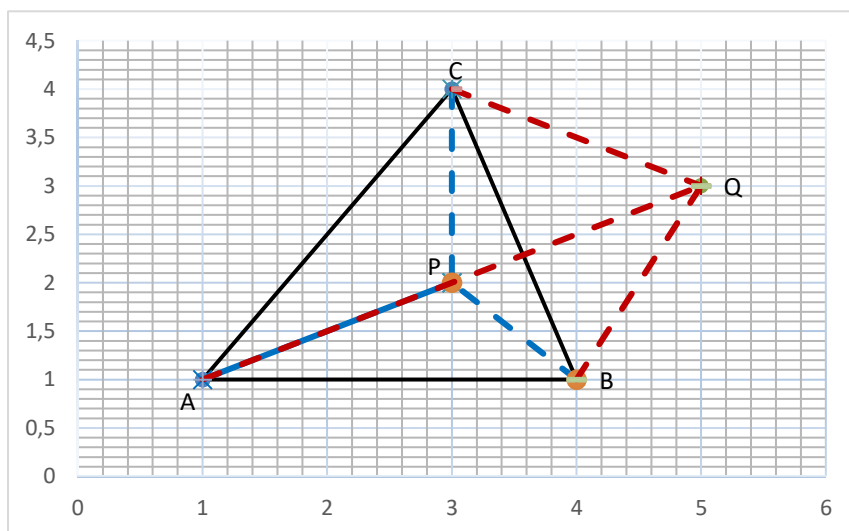
Пример 3. За триъгълник ABC и точки P и Q от пример 1 се получава:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4,5; \quad S_{\Delta ACP} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad S_{\Delta BCP} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$S_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,5; \quad S_{\Delta ACQ} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad S_{\Delta ABQ} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$S_{\Delta BCQ} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2,5.$$

Тъй като $9=4+2+3$, то точката P лежи в триъгълник ABC , тъй като $9 < 4+3+2,5$, то точката Q лежи извън триъгълник ABC (фиг. 4).



Фиг. 4

Източник: Съставена от автора

Четвърти начин – чрез изпъкнала линейна комбинация на върховете на триъгълника. Използва се известният факт, че изпъкнала линейната комбинация на три точки, нележащи на една права, е точка от вътрешността или от контура на триъгълника с върхове - тези три точки (Атанасов, Николаев и Мирянов, 2012). Ако точка P може да се представи, като изпъкнала линейна комбинация на върхните точки A, B и C , т.е. съществуват неотрицателни числа a, b и c , за които:

$$\begin{cases} a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) + c(x_3, y_3) = (x_0, y_0) \\ a + b + c = 1 \end{cases}, \quad (1)$$

то точка P лежи в триъгълник ABC , в противен случай лежи извън него.

Прилагането на метода изисква решаването на системата (1) и проверка, дали получените стойности на неизвестните a, b и c принадлежат на интервала $[0, 1]$.

От второто уравнение на системата непосредствено може да се изрази $c = 1 - a - b$ и след заместване в първото уравнение се достига до системата

$$\begin{cases} a(x_1 - x_3) + b(x_2 - x_3) = x_0 - x_3 \\ a(y_1 - y_3) + b(y_2 - y_3) = y_0 - y_3 \end{cases},$$

откъдето, например чрез метода на Крамер (Суружон и Запрянова, 2022), за a , b и c се получава:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} x_0 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_0 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}}; b = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_0 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_0 - y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}}; c = 1 - a - b.$$

Пример 4. За триъгълник ABC и точка P от пример 1 се получава системата:

$$\begin{cases} a(1,1) + b(4,1) + c(3,4) = (3,2) \\ a + b + c = 1 \end{cases},$$

чието решение е

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 3-3 & 4-3 \\ 2-4 & 1-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-3 & 4-3 \\ 1-4 & 1-4 \end{vmatrix}} = \frac{2}{9}; b = \frac{\begin{vmatrix} 1-3 & 3-3 \\ 1-4 & 2-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-3 & 4-3 \\ 1-4 & 1-4 \end{vmatrix}} = \frac{4}{9}; c = 1 - \frac{2}{9} - \frac{4}{9} = \frac{3}{9}.$$

Тъй като $\frac{2}{9} \in [0,1]$; $\frac{4}{9} \in [0,1]$; $\frac{3}{9} \in [0,1]$, то точката P се представя като изпъкнала линейна комбинация на върховете A , B и C , следователно лежи в триъгълник ABC .

За точка Q от пример 1 се получава системата:

$$\begin{cases} a(1,1) + b(4,1) + c(3,4) = (5,3) \\ a + b + c = 1 \end{cases},$$

чието решение е

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 5-3 & 4-3 \\ 3-4 & 1-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-3 & 4-3 \\ 1-4 & 1-4 \end{vmatrix}} = -\frac{5}{9}; b = \frac{\begin{vmatrix} 1-3 & 5-3 \\ 1-4 & 3-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-3 & 4-3 \\ 1-4 & 1-4 \end{vmatrix}} = \frac{8}{9}; c = 1 - \left(-\frac{5}{9}\right) - \frac{8}{9} = \frac{6}{9}.$$

Тъй като $\frac{8}{9} \in [0,1]$; $\frac{6}{9} \in [0,1]$, но $-\frac{5}{9} \notin [0,1]$, то точката Q не може да се представи като изпъкнала линейна комбинация на върховете A , B и C , следователно тя лежи извън триъгълник ABC .

Пети начин – чрез линейна комбинация на два от векторите, съставлящи триъгълника. Използва се фактът, че ако $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$, където $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$, то векторът \vec{c} лежи изцяло в триъгълника, образуван от векторите \vec{a} и \vec{b} (Weisstein). Прилагането на метода изисква решаването например на системата

$$\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1(x_2 - x_1) + \lambda_2(x_3 - x_1) = x_0 - x_1 \\ \lambda_1(y_2 - y_1) + \lambda_2(y_3 - y_1) = y_0 - y_1 \end{cases}. \quad (2)$$

и проверка дали получените стойности на λ_1 и λ_2 удовлетворяват условията $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$. Ако „да“, то точка P лежи в триъгълник ABC , в противен случай – точка P лежи извън него.

Решението на системата (2), намерено чрез формулите на Крамер, е:

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_0 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}; \lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_0 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_0 - y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}.$$

Пример 5. За триъгълник ABC и точка P от пример 1 се получава системата:

$$\begin{cases} \lambda_1(3-1) + \lambda_2(4-1) = 3-1 \\ \lambda_1(4-1) + \lambda_2(1-1) = 2-1 \end{cases}$$

чието решение е

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3}; \lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{4}{9}.$$

Тъй като $\frac{1}{3} \geq 0; \frac{4}{9} \geq 0$ и $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9} < 1$, то точката P лежи в триъгълник ABC (фиг.

5).

За точка Q от пример 1 се получава системата:

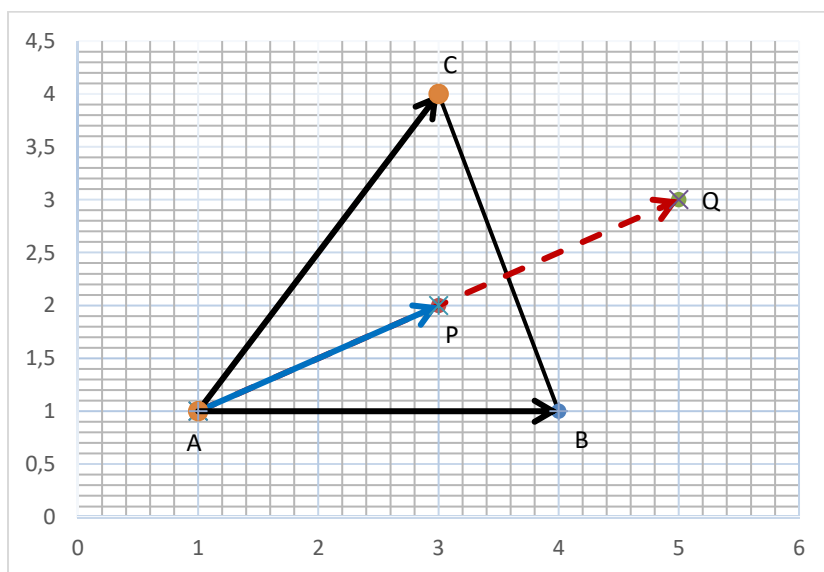
$$\begin{cases} \lambda_1(3-1) + \lambda_2(4-1) = 5-1 \\ \lambda_1(4-1) + \lambda_2(1-1) = 3-1 \end{cases}$$

чието решение е

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2}{3}; \lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{8}{9}.$$

Тъй като $\frac{2}{3} \geq 0; \frac{8}{9} \geq 0$, но $\frac{2}{3} + \frac{8}{9} = \frac{14}{9} > 1$, то точката Q лежи извън триъгълник

ABC (фиг. 5).



Фиг. 5

Източник: Съставена от автора

Не е трудно да се покаже, че третият, четвъртият и петият начин на практика

са еквивалентни.

Шести начин – чрез ъгли. Намират се ъглите $\angle APB$, $\angle BPC$ и $\angle APC$. Ако сумата им е равна на 360° , то точката P лежи в триъгълник ABC , ако сумата им е по-малка от 360° , то точката P лежи извън триъгълник ABC . За пресмятане на трите ъгла може да се използва формулата за ъгъл между два вектора

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \arccos \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}},$$

приложена към векторите \vec{PA} , \vec{PB} и \vec{PC} (Суружон и Запрянова 2022). Коректността на формулата изисква да се изключат случаите, при които точката P съвпада с някой от върховете на триъгълника, които така или иначе са тривиални и се установяват непосредствено.

Пример 6. За триъгълник ABC и точки P и Q от пример 1 се получава съответно:

$$\vec{PA} = (-2, -1); \vec{PB} = (0, 2); \vec{PC} = (1, -1); \angle APB = \arccos \frac{\vec{PA} \cdot \vec{PB}}{|\vec{PA}| \cdot |\vec{PB}|} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{5}} = 116,57^\circ;$$

$$\angle BPC = \arccos \frac{\vec{PB} \cdot \vec{PC}}{|\vec{PB}| \cdot |\vec{PC}|} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{2}} = 135^\circ; \angle APC = \arccos \frac{\vec{PA} \cdot \vec{PC}}{|\vec{PA}| \cdot |\vec{PC}|} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{10}} = 108,43^\circ;$$

$$\vec{QA} = (-4, -2); \vec{QB} = (-1, -2); \vec{QC} = (-2, 1); \angle AQB = \arccos \frac{\vec{QA} \cdot \vec{QB}}{|\vec{QA}| \cdot |\vec{QB}|} = \arccos \frac{8}{10} = 36,87^\circ;$$

$$\angle BQC = \arccos \frac{\vec{QB} \cdot \vec{QC}}{|\vec{QB}| \cdot |\vec{QC}|} = \arccos 0 = 90^\circ; \angle AQC = \arccos \frac{\vec{QA} \cdot \vec{QC}}{|\vec{QA}| \cdot |\vec{QC}|} = \arccos \frac{3}{5} = 53,13^\circ.$$

Тъй като $\angle APB + \angle BPC + \angle APC = 360^\circ$, то точката P лежи в триъгълник ABC , тъй като $\angle AQB + \angle BQC + \angle AQC < 360^\circ$, то точката Q лежи извън триъгълник ABC (фиг. 4).

В заключение ще отбележим, че представените примерни решения, без претенции, че са единствените възможни, показват, че:

- математическият апарат може да предостави силен инструментариум при конструиране на алгоритми за решаване на информатични задачи;

- подобни задачи от една страна могат да демонстрират възможности за приложение на фундаменталните теоретични постановки при решаването на практически проблеми, от друга – представляват добро упражнение върху разглеждания учебен материал.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Atanasov, B., Nikolaev, R., Miryanov, R. (2012) *Kolichestveni metodi v upravlenieto*. Varna: Nauka i ikonomika, 425 s.

2. Nikolaev, R., Gospodinova, N. (2014) *Prilozhenie na matematicheskiJa aparat pri razrabotvane na algoritmi*. Varna: Nauka i ikonomika, s. 403 - 410.

3. Nikolaev, R., Suruzhon, D., Stoyanov, T., Zapryanova, T., Milkova, T., Miryanov, R. (2021) *Prilozhna matematika*. Varna: Nauka i ikonomika. 335 s.

4. Suruzhon, D., Zapryanova, T. (2022) *Linejna algebra i analitichna geometriya*. Varna: Nauka i ikonomika, 413 s.

5. Weisstein, E. W. Triangle Interior. [online] From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. Available at: <https://mathworld.wolfram.com/TriangleInterior.html> [Accessed 01.11.2024].

6. Lazarova, M. (2013). Osnovni algoritmi za rasterizirane. [online] Available at: https://schupen.net/lib/tu/KST_all/Semesters/semestar%207/KG/lecs%20new/09.KG2013_9_Curves.pdf, [Accessed 01.11.2024].

7. Filled Area Primitives. [online] Available at: <https://www.javatpoint.com/computer-graphics-boundary-filled-algorithm>, [Accessed 01.11.2024].

8. Scan-line Polygon filling using OpenGL in C. (2022) [online] Available at: <https://www.geeksforgeeks.org/scan-line-polygon-filling-using-opengl-c/> [Accessed 01.11.2024].

9. Flood fill Algorithm – how to implement fill() in paint? (2022). [online] Available at: <https://www.geeksforgeeks.org/flood-fill-algorithm-implement-fill-paint/> [Accessed: 01.11.2024].

10. Boundary Fill Algorithm (2024). [online] Available at: <https://www.geeksforgeeks.org/boundary-fill-algorithm/> [Accessed 01.11.2024].

ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF BETA AND SIGMA CONVERGENCE ANALYSIS IN THE STUDY OF STRUCTURAL CONVERGENCE OF ECONOMIES

Chief Assist. Prof. Silvia Gospodinova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *Through β and σ convergence analysis, the real convergence in the economies of the European Union can be traced. For this purpose, the main criteria for convergence policies are sought and shown, as well as their results, as this is important for the efficiency and competitiveness of these economies. The task of this type of analysis is to trace the extent to which convergent policies create trends and change policies in individual countries, because sometimes countries take decisions that differ from the single policy of the European Community. When carrying out this type of analysis, it is necessary to know the advantages and disadvantages of each of the methods and indicators for analysis and to assess in the specific situation which is more reliable.*

Keywords: *Structural convergence; β & σ convergent analysis*

JEL code: *F02, F15, O47*

ПРЕДИМСТВА И НЕДОСТАТЪЦИ НА БЕТА И СИГМА КОНВЕРГЕНТНИЯ АНАЛИЗ ПРИ ИЗСЛЕДВАНЕ НА СТРУКТУРНАТА КОНВЕРГЕНЦИЯ НА ИКОНОМИКИТЕ

Гл. ас. д-р Силвия Господинова
Икономически университет - Варна, България

Въведение

Анализът на структурната конвергенция се изразява в това да се оцени достатъчно точно нейното съществуване и интензивност, което да даде цялостна представа за нея. Това е възможно да се случи само при правилен подбор на конкретни методи и подходи за нейното изследване. Целта е да се получават достатъчно надеждни и точни резултати за степента и динамиката на конвергенция въз основа на избраните подходи и конкретна методология за анализ. За да се осигури надеждност на анализа преди всичко е необходимо да се изберат изследователски методи, които да отговарят на следните условия: да съответстват на теоретичните концепции, да отчитат възможностите на статистическите и иконометричните методи и същевременно да са съобразени с конкретните цели и задачи на изследването. Много от методите са универсални и дават възможност да се използват за изследване на различни аспекти на структурната конвергенция, но голяма част от тях са предназначени за измерване на номиналната и реалната конвергенция, а не на структурната, което налага известна трансформация в тях. Друга особеност на методологията е, че по същество тя е създадена за измерване на степента на конвергенция между региони и други административни единици в икономиките, а доста често тя се прилага, с цел установяване конвергенцията между страни.

За да се гарантира, че резултатите от анализа ще са достатъчно надеждни е

полезно конвергенцията да се проследи в динамика, а така също и да се направят сравнения със структурната конвергенция на други икономики със сходни характеристики. Сравнителният анализ дава възможност да се оцени позицията и готовността на дадена страна за задълбочаване на интеграцията през погледа на уязвимостта ѝ към външни шокове и реакцията ѝ към конкретни наднационални политики. При извършване на анализ на структурната конвергенция следва да сме наясно с предимствата и недостатъците на всеки от възможните показатели и методи за анализ и да сме внимателни при тълкуването на получените резултати.

Предимства и недостатъци на методите и показателите за анализ

Разпределителният подход за измерване на конвергенцията дава представа за намаляването на различията между държавите с течение на времето и за разлика от подхода на догонващото развитие не следва определена теоретична схема, а разчита предимно на използването на статистически методи. Централно място в него заемат стандартното отклонение, дисперсията и коефициентът на вариация. Намаляването им във времето говори за съкращаване на отклоненията и доказва наличието на конвергенция.

Разпределителният подход за анализ, известен в теорията като сигма конвергенция, е подробно доказан от Barro & Sala-i-Martin. Според Friedman (1992) и Quah (1993), този подход е по-предпочитан в повечето емпирични изследвания и най-вече в тези, които са концентрирани върху конвергенцията на доходите, тъй като е по-лесен за използване. Друго основание за неговото използване е, че той е много по-близък до концепцията за конвергенция. Тази му особеност обаче, е причина Young & Higgins & Levy (2007) да заключат, че бета конвергенцията е необходимо, но недостатъчно условие за наличие на сигма конвергенция. Причина за това е, че в процеса на догонване могат да възникнат случайни шокове, които да отдалечат икономиката от пътя ѝ на развитие и да попречат за намаляване на разликата с по-напредналите икономики.

По същество сигма конвергенцията отразява тенденцията на сближаване или раздалечаване между показателите в извадка от държави. За да се преодолеят тези различия е необходимо страните с изоставащи показатели да нарастват по-бързо, отколкото останалите с по-високи показатели, т.е. трябва да съществува β -конвергенция. Следователно σ -конвергенцията е необходимо, но не и достатъчно условие за сближаване. По-конкретно наименованието на σ -конвергенцията произлиза от коефициента на дисперсия и се изчислява по следната формула:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{\text{ср.}})^2 \quad (1)$$

където y_i е даденото равнище на показателя в страна i , а $y_{\text{ср.}}$ средното равнище за дадената общност (например, Еврозоната), изчислено по следния начин:

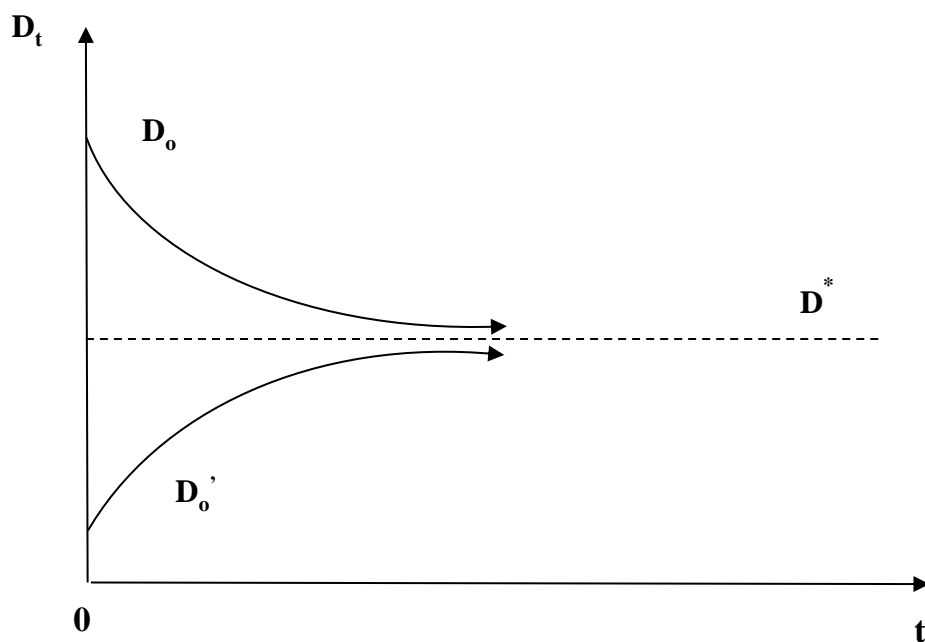
$$y_{\text{ср.}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (2)$$

Така чрез коефициента на дисперсия може да се оцени σ -конвергенцията в ЕС на база на следната формула:

$$D_t = \frac{\sigma^2}{y_{\text{ср.}}} \quad (3)$$

Що се отнася до структурната конвергенция, разпределителният подход

помага да се измери равнището и динамиката на различията в структурата на отделни показатели в икономиката, като ако те намаляват, това е признак за наличие на структурна конвергенция. В този смисъл, Palan (2013) твърди, че сигма конвергенцията подобно на бета конвергенцията, също може да бъде абсолютна или условна, като и в двата случая тя се измерва в съответствие с дългосрочния модел на специализация на икономиките доказан от Baumol (1986) и Galor (1996). Galor определя абсолютната и условната конвергенция като сближаване между икономиките, което е независимо от първоначалните условия във всяка от тях, а за условната конвергенция поставя и допълнително условие за сходство на други основни характеристики на икономиките по идея на моделите на растежа.



Фиг. 1. Сигма конвергенция на икономики, започваща от две различни начални точки

Източник: Рангелова (2021), с. 20.

Това е важно за по-ясното разграничаване на условната от т.нар. клубна конвергенция, която е свързана с намаляване на различията между група държави със сходни характеристики, за които са налице еднакви първоначални условия.¹

Тези два метода за анализ на структурната конвергенция са и най-често използваните. Основанията те да се използват заедно са, защото са най-близки до разбирането за конвергенция, застъпвано в основните модели за икономически растеж. От практическа гледна точка тези два метода имат сравнително универсално приложение и могат да се използват както за анализ на конвергенцията на производството, така и на пазара на труда. Използването и на двата подхода за анализ едновременно позволява получаването на алтернативни оценки за структурната конвергенция, но същевременно това може и да размие анализа и дори да доведе до разминаване или несъответствие между оценките.

Степента на β конвергенцията може да се оценява и анализира общо за страните чрез панелни модели с фиксирани ефекти и да се сравнява с резултатите от σ конвергенцията измерена посредством агрегирани индекси на дивергенция,

различие и дистанция.

Алтернативен начин е структурната конвергенция да се измери чрез индекса на специализация на Кругман, който показва отклонението в структурно отношение на икономиката относно брутната добавена стойност или заетостта, в сравнение със средната за групата или за Евроразоната. Той първоначално е разработен от Krugman (1993) в по-елементарен вид, а в последствие използван в различни форми от Kallioras и Petrakos (2007), както и от Stattev и Raleva (2006) за измерване на конвергенцията в производствената и разходната структура на БВП на България спрямо Евроразоната.

$$I_{\text{Кругман}} = \sum_{i=1}^n |RSE_{y_i} - RSE_{\bar{y}}| \quad (4)$$

където: RSE_{y_i} е относителния дял на съответния структурен елемент в дадената страна, $RSE_{\bar{y}}$ е референтната стойност, която се приема за равна на относителния дял на съответния елемент в Евроразоната, а n е броя на елементите в дадената структура.

Индексът е предназначен за измерване специализацията на страните, но често се използва и за оценка на степента на конвергенция. Krieger-Boden & Traistaru-Siedschlag (2008) го критикуват, тъй като една от особеностите му е, че приема едни и същи тегла на компонентите, независимо от техния размер. За негово предимство се приема възможността да се използва както на секторно равнище, така и при по-ниски нива на обобщеност. Нещо повече, според Palan (2013) преминаването от по-високо към по-ниско ниво на агрегиране не влияе на резултатите от специализацията, ако отклоненията от референтните стойности при съставлящите ги дейности са в една и съща посока. Ако тези отклонения обаче са в различни посоки, равнището на специализация намалява, което говори за увеличаване на структурната конвергенция.

Според Von Hagen & Traistaru (2005) структурната конвергенция следва да се изчислява чрез индекс на различието въз основа на оригиналната формула на Кругман, и като се проследи неговото развитие във времето. Индексът е предназначен точно за измерване на структурната конвергенция на една страна към Евроразоната и се изчислява по следната формула, в която означенията са аналогични на тези в предходната:

$$I_{\text{DISSIM}} = - \sum_{i=1}^n |RSE_{x_i} - RSE_{EZ}| \quad (5)$$

Превръщането на индекса на специализация в индекс на различие е свързано с добавяне на отрицателен знак пред взетата по абсолютна стойност сума на отклоненията за всеки от секторите. Това променя, начина по който се интерпретира индекса, тъй като колкото по-висока е стойността му, т.е. колкото по-ниска е абсолютната му стойност, толкова по-малко е различието и по-голяма е структурната конвергенция.

Друг показател, основан отново върху индекса на специализацията на Кругман, е индексът на дивергенцията, предложен от Van de Coeving (2003). Този индекс е изчислен от автора за ЕС и страните от Югоизточна Европа (без България), САЩ и Япония, като последните две страни са използвани за сравнение. Индексът се изчислява по следната формула:

$$I_{DIV} = - \sum_{i=1}^n \frac{(RSE_x - RSE_{EZ})^2}{RSE_{EZ}} \quad (6)$$

Ако индексът е нула, относителният дял на съответния елемент се променя както в Евроната, а ако индексът е различен от нула, относителният дял се отклонява от този на Евроната, и колкото по-висока е стойността на индекса (колкото по-ниска е абсолютната стойност), толкова по-голяма е структурната конвергенция на съответната държава към Евроната. Индексът приема само отрицателни стойности и колкото по-близо е до нула, толкова по-сходни са сравняваните икономически структури. Повдигането на втора степен на разликата между относителния дял на дадената променлива за съответната страна и Евроната определя много по-голямото тегло в индекса на елемента с най-значително изменение. Това обаче може да е проблем, ако индексът на дивергенцията зависи от елементите в съвкупността, които са с най-голяма динамика, когато относителното им тегло в изследваната съвкупност е най-ниско. По този начин, от една страна чувствителността на индекса се увеличава, но в същото време се преодолява недостатъка на индекса на различието, което прави индекса на дивергенцията по-предпочитан за използване от двата. При достигане на различни заключения за процесите на конвергенция (дивергенция) от двата индекса, което е възможно поради методологичните разлики между тях, наличието на конвергенция или дивергенция обикновено се смята за доказано, ако се потвърждава и от двата показателя.

Алтернатива на индекса на различие и индекса на дивергенция е индекс на несъответствие в производствената структура, въведен от Cuadrado-Roura и колектив (1999).

$$I_{IPS} = \sum_{i=1}^n (RSE_x - RSE_{EZ})^2 \quad (7)$$

Означенията в него са същите, а разликата му с индекса на Кругман е в повдигането на втора степен на разликата между относителния дял на променливата за съответната страна и същата за Евроната. По този начин той е по-близък до индекса на дивергенция като повтаря и неговите особености, но при него няма знаменател, което води до още по-значителна роля на елемента с най-голяма промяна в сравнение с индекса на дивергенцията. При него липсва и отрицателния знак, което значи, че структурна конвергенция ще е налице, когато той намалява във времето.

По подобен начин Angeloni, Flag и Mondelli (2005) измерват сигма конвергенцията на икономиките на новите страни-членки на ЕС като прилагат индекс на дистанция.

$$I_{DIST} = \sum_{i=1}^n \frac{|RSE_x - RSE_{EZ}|}{2} \cdot 100 \quad (8)$$

Той също е индекс произведен от индекса на специализация на Кругман, чиято стойност е положителна и два пъти по-ниска, и за разлика от индекса на Кругман се изчислява в проценти. Ако стойността на индекса е равна на нула, това показва, че сравняваните икономики имат еднаква структура, а ако стойността му

расте това говори за структурна дивергенция и обратно, ако намалява – за структурна конвергенция.

В допълнение към тези индекси, за измерване на конвергенцията и дивергенцията се използват също така индекса на Theil, на Herfindahl-Hirschman, на Atkinson, коефициентът на Джини, индекса на диверсификацията и др. Те най-често се прилагат за измерване на специализацията и концентрацията и по-рядко за оценка на конвергенцията. Използвани са в изследванията на Monfort (2008) за измерване на реалната конвергенция и за структурната конвергенция при Palan (2013).

Голямото разнообразие от индекси за оценка на конвергенцията/дивергенцията налага да се избират само тези от тях, които дават достатъчно ясна представа за анализирания процес и същевременно имат най-малко недостатъци. Това е необходимо, тъй като, ако се използват всичките, това ще разконцентрира анализа и ще измести фокуса на изследването.

Заедно с тези индекси анализът на структурната конвергенция може да бъде допълнен от дескриптивен анализ на база на графично и таблично представяне на данните, като така се извеждат основните тенденции в измененията на изследваните показатели за съответната страна и Евророната за дадения период. За да може да се определи развитието на конвергентните процеси в конкретна страна, данните за нея следва да се сравняват с друга, сходна по характеристики държава.

Заключение

Изследванията на структурната конвергенция са свързани с прилагането на методите на сигма и бета конвергенцията. Измерването на сигма конвергенцията се основава на проследяване във времето на стойностите на показателите, които измерват различията между икономиките каквито са индексът на дивергенция или специализация и индекса на различие. Всички те имат различни характеристики и свои предимства и недостатъци, които определят и тяхната различна приложимост при извършването на изследванията. Ето защо е важно да се подберат по подходящ начин тези от тях, които ще подпомогнат постигането на поставените в конкретното изследване цели и задачи. Комбинирането им позволява емпирично да се проверят постулатите на основните теоретични модели на бета и сигма конвергенцията и след това да се сравнят. Освен това панелното моделиране (бета конвергентния анализ) дава възможност за изясняване на позицията на страната спрямо другите държави, с които се сравнява ситуацията, а едновременното използване на индексите спомага за получаване на по-цялостна представа за наличието на сигма конвергенция.

Подходът на бета-конвергенцията пък установява процеса на конвергенция, оценява скоростта му, и в комбинация с панелното моделиране, позволява сравнителен анализ на структурната конвергенция в отделните държави. Същевременно резултатите от него се влияят от допускането за безусловност или условност на конвергенцията, от включването на допълнителни променливи при условната конвергенция, както и от наличието или отсъствието на вътрешна зависимост между икономиките. Разпределителният метод може да се използва за определяне на структурните различия между страните във времето, както и за разкриване на равнището и динамиката на тези различия чрез индекси. Анализът на динамични редове позволява да се изследват дългосрочните зависимости и да се ендогенизират променливите, но при него може да има и някои трудности при избора на тестове за стационарност.

Що се отнася до подбора и прилагането на основните показатели е добре да се следва принципът да се използват такива измерители, които дават възможно най-пълна и същевременно детайлна представа за структурната конвергенция. От методологична гледна точка анализът доста често се основава на годишни данни. При такива проучвания годишните данни са предпочитани, тъй като при тях няма проблем с цикличността. Дескриптивният анализ, основаван най-вече на таблично и графично представяне на статистическите данни очертава основните тенденции в динамиката и относителните дялове на изследваните показатели в различните страни, както и дава представа за съществуващите съответствия и връзките между тях. В рамките на дескриптивния анализ се прилага и методът на сигма конвергенцията за измерване на хетерогенността в конкретните показатели на секторно равнище. Изводите направени чрез един дескриптивен анализ относно наличието или отсъствието на дивергенция не могат да бъдат абсолютизирани, и затова той се допълва от анализ, използващ метода на бета конвергенцията.

С използването на методите на σ и β конвергенцията може да се разкрие наличието на значителна междусекторна конвергенция или вътрешносекторната конвергенция, както и да се установяват тенденциите на развитие. Благодарение на тях може да се анализират факторите и политиките, които правят икономиките по-конкурентоспособни и дават възможност за по-добро икономическо развитие, а също така те позволяват на държавите на база на този вид анализ да постигат високо равнище на растеж на БВП, да подобрят стандарта на живот, да осигурят възможности за заетост и да намалят бедността и неравенството.

БЕЛЕЖКИ

1. Теорията разграничава три вида β -конвергенция: **безусловна (абсолютна)**, при която доходите на глава от населението в различните страни се сближават едни към други в дългосрочен план *независимо от първоначалните им равнища*; **условна** – при нея страни със сходни структурни характеристики (като темп на нарастване на населението, технологично развитие, правителствени политики и др.), се сближават по отношение на доходите на глава от населението в дългосрочен план, като страните с първоначално по-ниски нива на дохода постигат по-висок икономически растеж и се доближават до доходите на по-богатите страни; **клубна конвергенция** – тя е налице, когато *държави от една група със сходни първоначални равнища на доходите и близки структурни характеристики*, се сближават в дългосрочен план едни до други с течение на времето.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Рангелова, Р. и др. (2021). Икономически растеж и конвергенция в Европейския съюз, Издателство на БАН „Проф. Марин Дринов“, София, 146 с.
2. Angeloni, I., Flad. M., Mongelli, F. (2005), Economic and Monetary Integration of the New Member States. Helping to Chart the Route, European Central Bank Occasional Paper Series, No 36, p. 30-45.
3. Barro, R. T., Sala-i-Martin, X. (1992). Convergence, Journal of Political Economy, 100(2), pp. 223-251.
4. Baumol, W. (1986). Productivity Growth, Convergence, and Welfare, What the Long-Run Data Show, American Economic Review, 76(5), pp. 1072-1085.

5. Cuadrado-Roura, J. R., García-Greciano, B., & Raymond, J. L. (1999). Regional convergence in productivity and productive structure: The Spanish case. *International Regional Science Review*, 22(1), 35-53.
6. Friedman, M. (1992). Do Old Fallacies Ever Die? *Journal of Economics Literature*, 30, pp.2129-2132.
7. Galor, O. (1996). Convergence? Inferences from Theoretical Models, *Economic Journal*, Vol. 106, Issue 437, pp. 1056-1069.
8. Kallioras, D., Petrakos, G. (2007). Industrial Growth, Integration and Structural Change: Evidence from the European Union New Member States' Regions, Discussion Paper Series, 13(4), March, pp. 93-114.
9. Krieger-Boden, Ch., Traistaru-Siedschlag, I. (2008). Regional Structural Change and Cohesion in the enlarged European Union: An Introduction in Krieger-Boden, Ch., Morgenroth, E., Petrakos, G. (eds.) *The Impact of European Integration on Regional Structural Change and Cohesion*, London: Routledge.
10. Krugman, P. (1993). Lessons of Massachusetts for EMU. In Torres, F., Giavazzi, F. (Eds.). *Adjustment and Growth in the European Monetary Union*. Cambridge University Press, pp. 241–261.
11. Monfort, Ph. (2008). Convergence of EU Regions. Measures and Evolution, EU Regional Policy Working Papers, №1.
12. Palan, N. (2013). *Structural Change and Convergence: An Empirical Analysis of Production Structures in Europe*, Frankfurt am Main: Peter Lang Economic Research, 3433.
13. Quah, D. (1993). Galton's Fallacy and the Convergence Hypothesis. *Scandinavian Journal of Economics* 95, pp. 427-443.
14. Stattev, St., Raleva, St. (2006) Bulgarian GDP Structures – Convergence with the EU. *South-Eastern Europe Journal of Economics*, 4(2), pp.193-207.
15. Van de Coevering, C. (2003). Structural Convergence and Monetary Integration in Europe. MEB Series 2003-20, December.
16. Von Hagen, J., Traistaru, J. (2005). Macroeconomic Adjustment in the New EU Member States, ZEI Working Paper, B 01.
17. Young, A., Higgins, M., Levy, D. (2007). Sigma Convergence versus Beta Convergence: Evidence from U.S. Country-Level Data, MPRA Paper 2714, [online] Available at: https://mpra.ub.uni-muenchen.de/2714/1/MPRA_paper_2714.pdf.

“LOST GENERATION” IN BULGARIA – DEVELOPMENT AND FORECAST

Chief Assist. Prof. Vanya Stoyanova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *The report looks at the “lost generation” – those who are not employed and not in education – as a potential opportunity to increase the labor force. The development of this social group for the period 2018 – 2024 is under consideration. A forecast is made using an adaptive exponential smoothing model.*

Keywords: *Lost generation; NEET; Adaptive exponential smoothing*

JEL code: *J01*

„ЗАГУБЕНОТО ПОКОЛЕНИЕ“ В БЪЛГАРИЯ – ИЗМЕНЕНИЕ И ПРОГНОЗА

Главен асистент, доктор Ваня Стоянова
Икономически университет – Варна, България

В последните години все по-често се обръща внимание на недостига на работна сила. Този проблем не може да се определи като национален, защото се среща в повечето държави в Европа, а и в световен план. Причините за това следва да се търсят в застаряването на населението, в миграционните процеси, но и като следствие от индивидуални решения. Държавното управление е изправено пред необходимостта да търси различни възможности за увеличение на работната сила. Една такава възможност е свързана с пенсионната реформа и увеличението на възрастта за пенсиониране, но това не води до реален ръст на работната сила, а само до по-продължителното ѝ използване. Друга възможност е свързана с мерки за насърчаване на пълната заетост. В същото време официалната статистика отчита една категория лица, определена от някои изследователи като „изгубено поколение“ – това са млади хора на възраст до 29 години, които не учат и не работят. И националната статистика в лицето на НСИ, и Евростат измерват и отчитат изменението на относителния дял на тази социална група.

Според икономическата теория и според препоръките на Международната организация на труда, в ЕС за безработно лице се счита всеки, който няма работа, иска да работи и активно търси работа. Съгласно това определение лицата, които не работят и не търсят работа не са част от безработните и не попадат в състава на работната сила. Те са част от трудовите ресурси на страната и могат да се разглеждат като потенциална възможност за увеличение на работната сила.

В таблица 1 са представени лицата извън работната сила според желанието и нежеланието им да работят и причините за това.

Таблица 1

Лица извън работната сила по причини за неактивност

Причини за неактивност	Общо (хил. д.)	Мъже (хил. д.)	Жени (хил. д.)
Общо	1030,2	449,9	580,2
Желаещи да работят в т. ч.	96,7	46,5	50,2
обезкуражени	20,8	11,8	9,0
участие в обучение	7,8	5,0	2,8
заболяване	2,6	1,8	0,8
лични и семейни	34,1	12,8	21,2
Нежелаещи да работят в т. ч.	933,5	403,5	530,0
участие в обучение	435,3	215,5	219,7
заболяване	128,9	65,9	63,0
лични и семейни	232,8	65,8	167,1
пенсиониране	116,3	46,2	70,2

Източник: НСИ

Сред желаещите да работят лица извън работната сила има почти 21 хил. д., които се определят като обезкуражени поради невъзможността да намерят реализация. Независимо, че не могат да бъдат причислени към безработните лица, те могат да се разглеждат като последица от продължителната безработица, която остава невидима при икономическите анализи на последствията от наличието на циклична безработица. Държавните мерки, както и европейските програми за насърчаване на заетостта не се прилагат спрямо обезкуражените лица, защото те остават извън състава на безработните и в отчетността на официалната статистика, и на Агенцията по заетостта. Впечатление прави, че сред нежелаещите да работят лица е значителен броят на тези, които посочват лични причини за това. В тези две групи – на обезкуражените и на нежелаещите да работят поради лични причини попадат и лицата до 29 години, които не работят и не учат (neither in employment nor in education and training – NEET).

В редица публикации на Европейската комисия (2020) се разглеждат проблемите на тази група лица и начините и средствата, необходими за решаването на тези проблеми. В своето изследване Bacher and Tamesberger (2020) също наблюдават и прогнозират тази част от младите хора и на базата на направени от тях прогнози формулират твърде обезпокоителен извод, че дори и при благоприятен сценарий на прогнозата нивото на младите хора от тази група ще бъде исторически високо. В изследванията на Allegretto (2013) и Scarpetta (2010) е установена зависимост между периода на безработица в млада възраст и негативни последици по-късно, като за описание на тази връзка се използва термина „lost generation”. De Fraja (2017) прави извод, че един месец безработица на възраст 18-20 може да доведе до 2% загуба на доход по-късно.

Данните за относителния дял на лицата на възраст 15-29 г., които нито работят, нито учат (NEET) в България за периода 2018 – 2024 година по тримесечия са представени в следващата таблица.

Таблица 2

Относителен дял на лицата на възраст 15 – 29 год. NEET в България

Периоди	Относителен дял (%)	Периоди	Относителен дял (%)
I 2018	18,2	II 2021	18,0
II 2018	18,2	III 2021	16,4
III 2018	18,5	IV 2021	17,0
IV 2018	17,4	I 2022	15,8
I 2019	16,7	II 2022	14,6
II 2019	16,2	III 2022	14,5
III 2019	16,8	IV 2022	14,4
IV 2019	17,5	I 2023	14,1
I 2020	18,3	II 2023	14,4
II 2020	19,0	III 2023	14,0
III 2020	18,1	IV 2023	12,8
IV 2020	17,4	I 2024	12,8
I 2021	18,0	II 2024	11,8

Източник: Eurostat

За периода от 2018 година до второто тримесечие на 2021 година относителният дял на лицата NEET е почти постоянна величина, като едно възможно обяснение за това е COVID 19-кризата и мерките наложени заради нея. От третото тримесечие на 2021 година до края на разглеждания период относителният дял на тази социална група намалява, като следва да се отбележи, че през този период намалява и равнището на безработица в България. За нашата страна не се потвърждава прогнозата на Bacher and Tamesberger за увеличаване на относителния дял на младите хора NEET и едва ли може да се говори за „исторически високи“ нива.

За осъществяване на прогноза на лицата в тази социална група избраният метод е този на адаптивното експоненциално изглаждане. Причините за избор точно на този метод се свеждат до:

- динамичният ред, който описва относителния дял на лицата NEET е кратък и е трудно да се определи тенденция на изменение;
- динамичното изменение на изходните условия предполага при прогнозирането да се дава по-голяма тежест на последните елементи на динамичния ред.

Изброените причини определят метода на адаптивното експоненциално изглаждане като подходящ за прогнозиране при тези условия. Приложението на този метод изисква решаването на два въпроса. Първият е свързан с определяне на начално условие на изглаждането, а вторият – с определяне на параметър на модела. За решение на първия въпрос в литературата се предлагат няколко варианта. Единият от тях предлага възприемането на първата изгладена стойност от емпиричните данни като начално условие за експоненциалното изглаждане. Вторият се свежда до възприемане на средната аритметична стойност от първите няколко члена на изходния ред за начално условие. В случаите, когато съществуват данни преди началния момент, в който започва изглаждането, за начално условие се приема средната аритметична стойност от всички предходни членове на реда. Третата възможност е да се приеме за начално условие първата изгладена стойност с помощта на подходящ трендови модел, като в този случай адаптивността на модела

нараства с прехода от избора на първата емпирична стойност към първата изгладена стойност като начално условие. Поради тази причина в настоящото изследване се отдава предпочитание точно на тази възможност за определяне на начално условие на изглаждането.

За решаване на втория въпрос, свързан с избор на начален параметър на адаптация, лесно и обосновано е този избор да се направи с подходящ статистически софтуер на базата на предварително определен критерий. Ролята на такъв критерий може да се изпълнява от някой от следните показатели:

- средна грешка (ME) – средна стойност от разликите между членовете на изходния ред и експоненциалните средни;
- средна абсолютна девиация (MAD) – средна стойност от абсолютните разлики между членовете на изходния ред и експоненциалните средни;
- средна квадратична грешка (MSE) – средна стойност от квадратите на разликите между членовете на изходния ред и експоненциалните средни;
- квадратен корен от средната квадратична грешка (RMSE) – това е стандартната грешка;
- процентна грешка (PE) – съотношение между грешката в съответния момент и емпиричното значение за същия момент;
- средна процентна грешка (MPE) – средна стойност от изчислените процентни грешки.

Тъй като няма единно мнение кой точно критерий би довел до по-добри резултати изборът на критерий следва да се осъществява на базата на поставените цели и на базата на използваната техника за адаптация на параметъра на изглаждането. При прогнозирането на относителния дял на лицата NEET за третото тримесечие на 2024 година като критерий за избор на параметър на изглаждането е избрана процентната грешка.

Адаптивните модели на експоненциалното изглаждане могат да се разделят в две групи според това дали параметърът на изглаждане се променя. В настоящия доклад се използват модели с промяна на параметъра на изглаждането, тъй като те са по-чувствителни към измененията на фактическите равнища на реда. В случаите на рязко импулсно изменение тези модели реагират на грешката и в зависимост от нейната величина се изменя и параметър на изглаждането, което осигурява по-добра адаптивност на модела.

Използваният модел е на простото експоненциално изглаждане, тъй като наблюдаваният динамичен ред е къс и е трудно да се установят трендови и сезонни изменения. Моделът има следния вид:

$$Q_t = \alpha \cdot Y_t + (1 - \alpha) \cdot Q_{t-1}$$

където:

Y_t е емпиричната стойност в момент t ;

Q_t е експоненциално изгладената стойност в момент t ;

Q_{t-1} е експоненциално изгладената стойност в предходния момент $t-1$;

α е параметър на изглаждането.

Прогнозни стойности

Варианти на прогнозата за III 2024	Песимистичен	Реалистичен	Оптимистичен
Лица NEET	11,6	11,2	10,7

Източник: Изчисления на автора

Изменението на работната сила се влияе от редица фактори, някои от които могат да бъдат предвидени, но други се проявяват като шок. Противоположността на негативните последици от това влияние може да се осъществи чрез реформи и мерки на държавната политика, но не трябва да се забравят и потенциалните възможности за естествено увеличение на работната сила чрез изменение на структурата на трудовите ресурси.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Allegretto, S. A. (2013) U. S. Youth: A Lost Generation in the Making? Available at <https://www.intereconomics.eu/contents/year/2013/number/5/article/us-youth-a-lost-generation-in-the-making.html> /Accessed 28 October 2024/
2. Bacher, J., D. Tamesberger (2020) COVID 19 Crisis: How to Avoid a “Lost Generation” Available at <https://www.link.springer.com/article/10.1007/s10272-020-0908-y> /Accessed 23 October 2024/
3. De Fraja, G., S. Lemos, J. Rockey (2021) The Wounds That Do Not Heal. The Life-time Scar of Youth Unemployment Available at <https://www.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/ecca.12384> /Accessed 4 November 2024/
4. Scarpetta, S., A. Sonnet, T. Manfredi (2010) Rising Youth Unemployment During the Crisis : How to Prevent Negative Long-term Consequences on a Generation Available at <https://www.oecd-library.org/docserver/5kmh79zb2mmv-en.pdf?expires=1731209166&id=id&accname=guest&checksum=437FC25DAE31ACEE0A7906BFE330D8FB> /Accessed 17 October 2024/
5. <https://www.ec.europa.eu/info/sites/info/files/communication-europe-moment-repair-prepare-next-generation.pdf> European Commission (2020a), Europe`s moment: Repair and Prepare for the Next Generation
6. <https://www.ec.europa.eu/commission/presscorner/detail/en/ip201193> European Commission (2020c), Commission launches Youth Employment Support: a bridge to jobs for the next generation
7. <https://www.nsi.bg/bg/content/4013/>
8. <https://www.ec.europa.eu/eurostat/web/labour-market/database>

THE OIL PRICE AND THE EXTERNAL BULGARIA'S TRADE IN THE CONTEXT OF FUNDAMENTAL ECONOMIC RESEARCH

Chief Assist. Prof. Lyubomir Lyubenow, PhD
University of economics - Varna, Bulgaria

Abstract: *The objective of this report is to assess the impact of oil price dynamics on Bulgaria's foreign trade using elasticity theory and one-factor linear regression. This involves the use of specific methods that require fundamental knowledge and research experience. Bulgaria's foreign trade was found to be inelastic in general with respect to oil prices. This was explained by the particularities of the period studied, the type of data and the method used. The study provides a good basis for a more in-depth study using the Almon model. Bulgaria's imports of energy resources and crude oil are mainly determined by the oil price. This makes it a significant factor for our economy and suggests that it is determined by factors external to the EU.*

Keywords: *Elasticity; Energy resources; Foreign trade; Oil; Regression.*

JEL code: *C32*

ЦЕНАТА НА ПЕТРОЛА И ВЪНШНАТА ТЪРГОВИЯ НА БЪЛГАРИЯ В КОНТЕКСТА НА ФУНДАМЕНТАЛНИТЕ ИКОНОМИЧЕСКИ ИЗСЛЕДВАНИЯ

Гл. ас. д-р Любомир Любенов
Икономически университет - Варна, България

ВЪВЕДЕНИЕ

Цените на петрола, с тяхната изменчивост, са едни от най-значимите измерители на процесите в световната икономика. Тяхното изследване предполага използването на специфични методи, които изискват значителни запаси от знания и опит в научните изследвания. Висшето образование, в този смисъл, е задължено да ги предостави в своята фундаментална подготовка. Статистиката, като наука и практика, позволява, съвместно с математиката и икономикса, да осъществят този процес.

В настоящия доклад се прави опит да се изследва влиянието на цените на петрола върху външната търговия на Р. България и по този начин да се демонстрират възможностите на гореспоменатите науки.

Република България е ресурсно необезпечена страна, с отворена икономика, чиято външна търговия е фактор за развитието на националното и стопанство. В същото време, външната ни търговия е повлияна от икономически индикатори, които оказват директно влияние върху нейната динамика и стойностни обеми. Пример за това са макроикономически променливи като валутния курс на еврото спрямо долара и цените на петрола на световните пазари. Цените на суровия петрол са едни от най-значимите измерители на процесите в световните икономически системи. Изменчивостта в котировките им следват икономическите и политически събития. Поради особеностите на добива и търговията с петрол, винаги се проявява определено забавяне (времеви лаг) в проявленията на тези въздействия.

Външната ни търговия е подложена на множество разнопосочни въздействия, които са водещи за икономическата система в световен и в регионален мащаб. В

този смисъл интерес представлява до каква степен външната търговия на страната ни е детерминирана от влиянието на посочените макроикономически индикатори.

Цел на настоящия доклад е да оцени влиянието на динамиката на цените на петрола върху външната търговия на България. Това се осъществява с помощта на теорията на еластичността (Rose, 1991) и еднофакторна линейна регресия (Димитров, 1995).

Преглед на литературата

Под цена на петрола най-често се разбират спотовите цени за барел суров петрол на един от стандартните (маркерни, еталонни) сортове нефт, които се търгуват свободно на фючърните пазари. Това се прави с цел да се опрости търговията с петрол. По-значимите маркерни сортове са следните (определенията са според Federal reserve bank of St. Louis) :

West Texas Intermediate (WTI и *Light Sweet Crude Oil*) е тексастки нефт, търгуем на NYMEX;

Brent Crude Oil (наричан още *Brent Blend*, *London Brent*, търгува се на ICE) е нефтена смес от няколко находища в Северно море (Великобритания и Норвегия), който задава стандартът на цените за пазарите в Европа и страните от ОПЕК;

Dubai/Oman (*Oman Crude*, търгува се на *Dubai Mercantile Exchange*) е основен маркерен сорт за азиатските пазари.

Добивът от маркерните сортове Brent и WTI е сравнително нисък, например през 2011 г. той сумарно е около 2 % от световния добив (Dunn and Holloway, 2012). Същевременно техните цени се оказват водещи за световните пазари.

Цените на петрола оказват влияние върху географията на световната търговия, като най-засегната е търговията по по-дълги морски маршрути. Високите цени на петрола в бъдеще може наистина да прекъснат глобализацията, тъй като еластичността на търговията от разстояние е по-висока в годините на високи цени на петрола (Von Below, D and P-L Vézina, 2016). От друга страна, спадането на цените на петрола дава възможност на много страни да намалят енергийните субсидии и да използват спестяванията за по-целенасочени трансфери (Arezki, R and O Blanchard, 2015). За други страни това е шанс за увеличаване на енергийните данъци и намаляване на други данъци.

От 1986 г. насам се наблюдава системно нарастване на нестабилността на реалната цена на суровия петрол, последвано от спад в нестабилността на производството на петрол от началото на 90-те години. Едно вероятно обяснение на този емпиричен факт е, че както краткосрочната ценова еластичност на търсенето на петрол, така и на предлагането на петрол са намаляли значително от втората половина на 80-те години на миналия век. Това означава, че малките смущения от двете страни на петролния пазар могат да генерират големи ценови реакции без големи движения на количеството, което помага да се обясни последното нарастване и последващия срыв в цената на петрола. Предполага се, че променливостта на сътресенията в търсенето и предлагането на петрол всъщност е намаляла в по-близкото минало, предотвратявайки дори по-големи колебания на цените на петрола, отколкото се наблюдава в данните (Christiane Baumeister & Gert Peersman, 2013).

От всичко изложено дотук може да се направи логичния извод, че динамиката на цените на петрола оказва съществено въздействие върху световната икономика.

Това предопределя нуждата от все по-системно и задълбочено изследване на тези процеси с наличния научен инструментариум.

Методика и информационна база на изследването

С помощта на еднофакторни линейни регресионни модели се оценява еластичността на вноса и износа спрямо цената на петрола и се извършва сравнителен анализ на получените резултати. Анализира се детерминираността на външната ни търговия и се дискутират възможностите за нейното прогнозиране.

Използват се данни за вноса и износа по начин на използване по тримесечия за периода 2009:1–2021:3. Избраните за факторни макроикономически променливи са цена на суровия петрол сортове Brent и WTI.

Като зависими променливи за външната търговия в изследването се включват общия износ и внос, общия износ и внос на енергийни ресурси, износа на петролни продукти и вноса на суров петрол и природен газ. Данните за тях се деноминират от евро в щатски долари. Това се налага поради следните обстоятелства:

- 1) Цените на петрола са в щатски долари за барел;
- 2) Иконометричната теория изисква съпоставимост на изходните данни.

Източници на данните са статистическите публикации на НСИ, БНБ, Евростат и Федералния резерв на САЩ.

Тримесечните данни се предпочитат, понеже това води до някои желани ефекти. Според Хаджиев (2001) така се повишава надеждността на заключенията относно устойчивата тенденция. По този начин се ограничава и вариацията, предизвикана от динамиката на валутния курс.

Началото на периода на изследването се фиксира на 2009 г. поради следните причини:

- 1) България влезе в Европейския съюз през 2007 г., а стабилизацията на икономическите процеси, вкл. и на външната ни търговия, настъпи след период от около 2 години;
- 2) През 2007 г. започна и Световната икономическа криза, която даде своето отражение и върху външната търговия на България през следващите две години.

С цел детайлизиране на изследването и по-ясното оценяване на влиянието на фактора, моделирането се извършва, както за целия изследван период, така и за двата подпериода включени в него – до членството ни в ЕС и след това – съответно 1999:1–2006:4 и 2007:1–2021:3.

Иконометрични модели за оценка на еластичността

Иконометричното моделиране се извършва както за целия наблюдаван период, така и за периодите преди и след членството на България в ЕС. Целта е, както да се изследва влиянието на валутния курс за един по-продължителен период от време (23 години), така и да се оцени еластичността на външната търговия на България при различни условия на функциониране на външноикономическата пазарна среда.

В конкретното изследване като зависими променливи се избират общия внос и износ, общия внос и износ на енергийни ресурси, както и вноса на суров петрол и природен газ и износа на петролни продукти. Восът на енергийни ресурси, средно за периода, съставлява 21,2 % от общия внос, а износът на енергийни ресурси е 13,0 % от общия износ на страната. Същевременно 77,7 % от общия износ на енергийни ресурси е износ на петролни продукти, а вносът на суров петрол и природен газ е

76,0 % от общия внос на енергийни ресурси. Смятаме, че тези относителни дялове са определящи за включването на съответните променливи в това изследване.

Посочените динамични редове за външната търговия, както и избраните макроикономически променливи се изследват за интегрираност. Тестовите за интегрираност се прилагат върху сезонно ажустираните данни. Методът за сезонно ажустиране е Census X11.2. След отстраняване влиянието на сезонността данните се логаритмуват. Така получените динамични редове се подлагат на разширения тест за интегрираност на Дики-Фулър (Charemza, W. W. and D.F. Deadman, 1997). Критерии за избор на основното уравнение при ADF и PP тестовите са отсъствие на автокорелация в остатъците и оптимални стойности за AIC и SC критериите (Caporale, G. and M. Chui, 1999). Критичната стойност за всички динамични редове се фиксира при 1 % риск за грешка.

Всички изследвани динамични редове са интегрирани от първи порядък. Това позволява при моделирането на зависимостите да се използват техните първи последователни разлики. В този смисъл, получените регресионни коефициенти могат да се тълкуват като чисти коефициенти на еластичност.

Линейни еднофакторни модели

Чрез използването на еднофакторните регресионни модели се цели установяването на значими релации, които се проявяват в рамките на текущото тримесечие между изследваните променливи. Класическият модел позволява лесна и директна интерпретация на получените резултати и дава стабилна основа за развитие на изследването в посока идентификация на реално съществуващи зависимости между факторни и зависими променливи.

При моделирането бе въведена опция с изключване на константата от модела. Всички модели са от следния вид, предвид обстоятелството, че приложената трансформация на данните е намирането на първи последователни разлики (Любенов, 2013):

$$\left(\frac{Y_t}{Y_{t-1}} \right) = \left[e^{\omega_t \delta} \right] * \left(\frac{X_t}{X_{t-1}} \right)^\beta, \quad (1)$$

където:

Y_t, Y_{t-1} – стойности на зависимата променлива в моменти t и $t-1$;

X_t, X_{t-1} – стойности на факторната променлива в моменти t и $t-1$;

e, ω, δ – параметри на модела, представящи неговата константа;

β - регресионен коефициент на модела.

В този случай получените значими регресионни коефициенти могат да се тълкуват директно като коефициенти на еластичност.

За улеснение при разчитането на характеристиките на моделите в Таблица 1 се представя тяхната интерпретация.

Таблица 1

Интерпретация на характеристиките на еднофакторните модели

Характеристика	Интерпретация
Adj R-sqr	Ажустиран коефициент на детерминация на модела
DW stat	Стойност на теста за автокорелираност на остатъците на модела
AIC / SC	Информационни критерии на Акайке и Шварц
Const	Константа на модела (когато е без константа се отбелязва none)
BETA	Регресионен коефициент b1 / Коефициент на еластичност
SE	Стандартна грешка на коефициента b1

Източник: авторът

След използването на критериите на Akaike и Schwarz бяха избрани определени модели, представени в таблица 2.

РЕЗУЛТАТИ

От получените резултати могат да се отбележат следните по-важни аспекта.

За целия изследван период статистически значими са само модели за общия износ и внос. По-висока детерминация се наблюдава при моделите с константа. Двата фактора оказват идентично въздействие върху зависимите променливи.

За първия изследван подпериод, до влизането на България в ЕС, се получават само значими модели за общия и знос и износа на енергийни ресурси. Всичките модели са без константа и с много ниска детерминация. Относително тя е по-висока при модел 10 (24,5 %).

За втория изследван подпериод се наблюдават предимно значими модели за вноса. За износа са представени само модели за общия износ. Тук детерминацията е значително по-висока, в сравнение с предходните модели. Общият внос се характеризира с детерминация от над 60 %. Най-висока е тя, обаче, при

моделите за внос на енергийни ресурси при фактор Brent – 62,5%. На второ място може да се поставят моделите за внос на суров петрол.

Таблица 2

Основни параметри на еднофакторните модели на еластичността на външната търговия

Модел №	Зависима променлива	Фактор	Характеристики на модела					
			Adj R-sqr	DW stat	AIC / SC	Const	BETA	SE
За целия изследван период 1999:1 - 2021:3								
1	Общ износ (X)	Brent	0,434	2,09	-247,5/-242,5	0,0203	0,331	0,039
2		WTI	0,442	2,07	-248,9/-243,9	0,0209	0,336	0,039
3	Общ износ (X)	Brent	0,376	1,89	-239,8/-237,3	none	0,346	0,041
4		WTI	0,381	1,87	-240,5/-237,9	none	0,349	0,042
5	Общ внос (M)	Brent	0,424	1,98	-243,6/-238,6	0,0177	0,332	0,041
6		WTI	0,458	1,96	-249,2/-244,2	0,0182	0,346	0,039
7	Общ внос (M)	Brent	0,384	1,84	-238,5/-235,9	none	0,345	0,042
8		WTI	0,415	1,81	-243,3/-240,8	none	0,359	0,041
За първи подпериод 1999:1 - 2006:4								
9	Общ износ (X)	Brent	0,160	1,93	-71,0/-69,6	none	0,271	0,113
10		WTI	0,245	1,94	-74,4/-72,9	none	0,357	0,114

11	Износ на енергийни ресурси (Xe)	Brent	0,116	2,45	3,5/4,9	none	0,749	0,377
12		WTI	0,149	2,49	2,3/ 3,7	none	0,902	0,393
За втори подпериод 2007:1 - 2021:3								
13	Общ износ (X)	Brent	0,588	1,97	-173,7/-169,5	0,0153	0,362	0,039
14		WTI	0,546	1,95	-167,9/-163,8	0,0156	0,348	0,041
15	Общ износ (X)	Brent	0,562	1,82	-171,1/-168,9	none	0,364	0,041
16		WTI	0,519	1,81	-165,6/-163,5	none	0,349	0,042
17	Общ внос (M)	Brent	0,604	1,88	-171,5/ -167,3	0,0092	0,381	0,040
18		WTI	0,602	1,87	-171,2/-167,1	0,0095	0,379	0,040
19	Общ внос (M)	Brent	0,599	1,83	-171,8/-169,7	none	0,382	0,041
20		WTI	0,597	1,82	-171,5/-169,4	none	0,379	0,040
21	Внос на енергийни ресурси (Me)	Brent	0,619	2,30	-82,6/-78,4	0,0039	0,836	0,086
22		WTI	0,578	2,31	-76,5/-72,4	0,0046	0,804	0,090
23	Внос на енергийни ресурси (Me)	Brent	0,625	2,29	-84,5/-82,4	none	0,837	0,085
24		WTI	0,585	2,30	-78,4/-76,4	none	0,805	0,089
25	Внос на суров петрол (Mo)	Brent	0,597	2,25	-63,7/-59,5	0,0016	0,937	0,101
26		WTI	0,547	2,29	-56,8/-52,6	0,0024	0,893	0,106
27	Внос на суров петрол (Mo)	Brent	0,604	2,25	-65,7/-63,6	none	0,937	0,099
28		WTI	0,554	2,29	-58,7/ -56,7	none	0,893	0,105

Източник: авторът

По отношение на еластичността на моделите може да се отбележи, че тя е ниска, няма нито един модел с коефициент над единица. За целия изследван период тя е с най-ниски стойности, между 0,331 и 0,359. През първия подпериод се наблюдават стойности от 0,271 до 0,902, като най-високата стойност е при модел 12. Вторият подпериод се характеризира със стойности между 0,348 и 0,937. Най-високите стойности са за моделите за внос на суров петрол.

В този смисъл можем да отбележим, че ценова еластичност към цените на петрола се проявява при вноса на енергийни ресурси, в частност – при вноса на суров петрол. Доколкото коефициентите са под единица, това може да се обясни с използването на тримесечните данни, оттам и краткия хоризонт за отчитане на влиянието на факторите. Допълнително ограничение е и използването само на линейната форма на модела. Това предоставя възможност за по-нататъшни изследвания чрез използването на други модели, позволяващи отчитането на по-голям лаг в моделите. Моделът на Алмон е естественото развитие за бъдещи изследвания, при него се позволява и експериментирането с полиномиални лагове.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На базата на получените резултати се обособяват следните изводи:

1. За наблюдавания период пряко може да се оцени еластичността на външната търговия с енергийни ресурси за всички зависими променливи;
2. Външната търговия е нееластична като цяло по отношение на цените на петрола. Това може да се обясни с две причини. Първо, особеностите на изследвания период и подпериоди (до и след влизането на България в ЕС). Второ, особеностите на типа данни (тримесечни) и използвания метод (еднофакторни линейни модели);

3. Използването на еднофакторните модели за оценка на еластичността на външната търговия дава надеждни резултати и е добра основа за по-задълбоченото и изследване чрез модела на Алмон.

4. След влизането на България в ЕС влиянието на цената на петрола детерминира предимно вносът ни, и по специално – вносът на енергийни ресурси и суров петрол. Тя се оказва съществен фактор за външната ни търговия. Наличието на този ефект предполага хипотезата, че икономиката на страната ни се детерминира от външни за ЕС фактори.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Caporale, G. and M. Chui (1999) Estimating Income and Price Elasticities of Trade in a Cointegration Framework. *Review of International Economics*. Vol. 7 Issue 2. pp. 254-265.

2. Charemza, W. W. and D.F. Deadman. (1997) *New directions in econometric practice*. Edward Elgar, Cheltenham.

3. Christiane Baumeister & Gert Peersman, 2013. The Role Of Time-Varying Price Elasticities In Accounting For Volatility Changes In The Crude Oil Market," *Journal of Applied Econometrics*. John Wiley & Sons, Ltd., vol. 28(7), pages 1087-1109, November.

4. Dimitrov, A. (1995) *Vavedenie v ikonometriyata*. Abagar.

5. Hadzhiev, V. (2001) *Elastichnost na vanshnata targovia*. Slavena.

6. Arezki, R. and O. Blanchard (2015) The 2014 oil price slump: Seven key questions. *VoxEU.org*, 13 January.

7. Lyubenov, L. (2013) Otsenka na elastichnostta na vanshnata targovia s energiyni resursi na Republika Bulgaria. *Izvestia*. s. 63-72.

8. Rose, Andrew K., (1991) The role of exchange rates in a popular model of international trade: Does the ‘Marshall–Lerner’ condition hold? *Journal of International Economics* 30 (3–4). pp. 301–316.

9. Stephanie Dunn & James Holloway (2012). The Pricing Of Crude Oil. *RBA Bulletin (Print copy discontinued)*, Reserve Bank of Australia, pp. 65-74, September.

10. Von Below, D and P-L Vézina (2016) The trade consequences of pricey oil. *IMF Economic Review*. pp. 303-318.

BIG DATA IN STATISTICS TEACHING

Chief Assist. Prof. Svetlana Todorova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Chief Assist. Prof. Vesela Dimitrova, PhD
University of National and World Economy – Sofia, Bulgaria

Abstract: *Today businesses and organizations generate and gather data at an increasing pace. The term big data is a catch-phrase, meaning a massive amount of structured, semi-structured and unstructured data. Despite the fact that big data is used in advanced analytics to solve all sorts of problems and make informed decisions, they are extremely difficult to manage, process, and analyze using traditional data-processing tools. This research aims to present the opportunities and challenges of big data. For instance, the huge sample sizes may detect differences that are quite small and trivial. This problem is associated with the relationships among sample size, p-value, and effect size. To report an effect size is a critical step for scientific studies and may show significant differences according to research types. Despite the challenges, big data presents a great opportunity to gain knowledge of all fields of our life.*

Keywords: *Big Data; Statistical Significance; Effect Size*

JEL code: *C12, C55*

BIG DATA В ОБУЧЕНИЕТО ПО СТАТИСТИКА

Гл. ас. д-р Светлана Тодорова
Икономически университет - Варна, България

Гл. ас. д-р Весела Димитрова
Университет за национално и световно стопанство - София, България

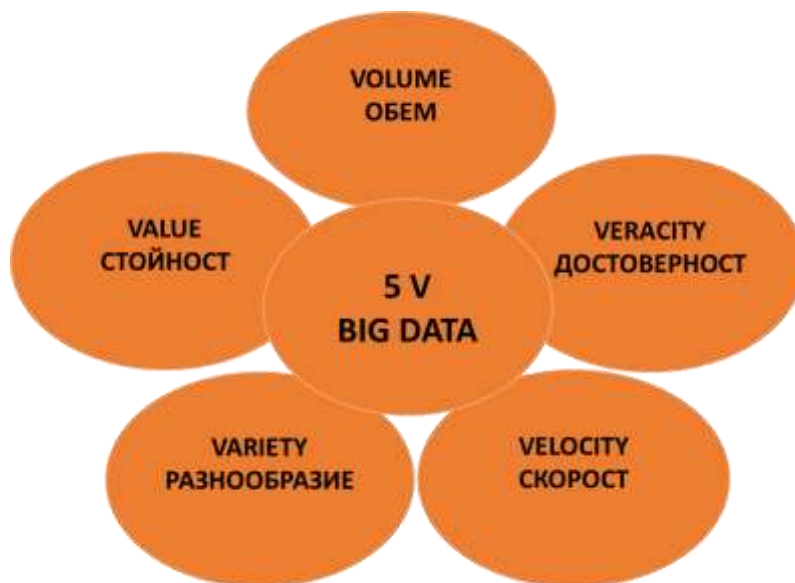
Въведение

През последното десетилетие наблюдаваме експоненциално нарастване на данните генерирани в различни области, както от информационните технологии, бизнеса, здравеопазването и много други, така и в сферата на образованието. Събирането на данни без конкретна цел, дори от големи масиви, влияе пряко върху качеството на данните. Това неминуемо създава проблеми при анализа и интерпретацията на получените резултати.

1. Същност на големите данни

Големите данни (Big data) са масиви от данни, при които обема, скоростта или типа на данните са толкова големи, че е трудно да се съхраняват, използват, обработват и анализират с помощта на традиционни инструменти и софтуерни продукти за обработка и анализ на данни. Масивите от големите данни е трудно да се съхраняват на един компютър, скоростта на промяна на данните е много висока и е трудно да се обработват в реално време. От друга страна, в масивите от големи данни има включени различни по тип данни, събират се от различни по вид източници и понякога липсват част от данните. Всичко това прави трудно съхранението, обработката и анализа на Big data.

Характеристиките на данните от тип Big data на фиг. 1 правят големите данни различни от традиционните данните.



Фиг. 1. Характеристики на Big Data
Източник: Hariri et al. (2019, pp.4)

Първоначално характеристиките на Big Data се дефинира до 3V (Volume, Velocity, Variety), като в последствие се допълват от още две характеристики (Value, Variety) виж. фиг.1. През последните години се добавиха и още две характеристики на Big Data: визуализация (Visualization) и валидация (Validity).

Обемът на Big Data е количеството генерирани, съхранявани и обработвани данни, като обработката на това огромно количество данни е предизвикателство за традиционните методи използвани за обработка на данни, включително и традиционните статистически методи. Big Data се характеризират с висока скорост (Velocity) на промяна на данните. Това означава, че данните трябва да се обработват и анализират в реално време, за да бъдат полезни. Това изискване може да бъде спазено, ако се използва специализиран инструментариум. В обучението е трудно да се използват големи данни в реално време (streaming data), с традиционните инструменти, но може да се използват част от данните – извадка. По този начин могат да се представят на обучаващите някои специфични техники и методи за обработка и анализ на данните. Разнообразието (Variety) при Big Data е свързано с типа на данните и тяхното организиране. Най-общо данните могат да са структурирани, полуструктурирани и неструктурирани данни. Структурираните данни са данни, които предварително са структурирани в определен формат, като например електронни таблици и бази данни подредени по определени признаци и връзки. Частично организираните данни, като например данните в XML файлове са полуструктурирани данни. Когато данните са от графични, аудио, видео изображения и текст, те са неструктурирани данни.

Достоверността (Veracity) на Big Data е характеристика, свързана с истинността и качеството на данните. Колкото по-точни и пълни са данните, толкова по-точни и пълна ще е обработката и анализа на данните. През последните години източниците на данни стават все по-разнообразни, но гарантирането на качеството

на данните в различните източници не винаги е достоверно. Извличането на стойности (Value) е ценна информация, която предоставят големите данни. Тази информация, като част от огромния обем от данни, която може да се извлече от специализирани инструменти е важен продукт и може да служи за вземане на решения в много и различни области, като бизнеса, медицината, образованието и т.н.

Останалите две характеристики визуализация (Visualization) и валидация (Validity) на Big Data, не са по-маловажни от останалите. Валидността (Validity) на Big Data се свързва с това, дали данните са представителни за целта, за която се използват и анализират. Непредставителните и неподходящите данни могат да доведат до неправилни обобщения и неправилно взети решения.

Визуализацията (Visualization) или представянето на данните и резултатите от анализа на Big Data е от изключителна важност. Инструментите за визуализация са лесен и разбираем начин на представяне на данните, резултатите от анализите и са от решаващо значение за правилно взетите решения от ползвателите на Big Data.

2. Използване на Big Data, в зависимост от типа им

Тъй като количеството на данните в заобикалящия ни свят продължава да расте, необходимостта от тяхното използване става все по-важна. Различните типове данни изискват различни инструменти и техники за извличане, обработка и анализ. Основните категории на данните са: (Cielen,2016, pp.4):

- Неструктурирани
- Структурирани
- Базирани на графи или мрежови данни
- Аудио и видео изображения
- Машинно генерирани данни
- streaming данни и т.н.

По-голяма част от всички данни са в неструктурирана форма. Неструктурираните данни са тези, при които нямаме предварително организиран начин на подреждане на данните. Те не могат да бъдат обработени чрез използването на обичайни методи. Има различни техники за извличане на данни, които в последствие да могат да се превърнат от неструктурирани в структурирани данни. С навлизането на машинното обучение (machine learning) може неструктурираните данни да се превърнат в структурирани.

Структурираните данни могат да бъдат подредени база данни (напр. SQL релационни бази данни) или данни съхранявани в таблици (напр. Excel). В статистиката могат да се ползват само структурирани данни и ако не са структурирани е необходим допълнителен ресурс, за да се структурират.

Графите са абстрактна структури от данни, които служат за моделиране на връзки между двойки обекти. Графите или мрежови данни се използват за връзката или съседството на обекти. Използват се много често за представяне на структури в социалните мрежи. Машините данни са автоматично генерирани от машина (напр. компютър) или приложение данни. Streaming data са такива данни, които не се съхраняват в база от данни, а са данни за случващо се събитие на живо.

Увеличаващата се роля при анализа на данни на програмните езици като Python, R и др. стана с навлизането на новите технологии при Big Data. Python е изключително популярен при извличането, обработката и анализа на данни. Този

програмен език е изключително лесен, гъвкав, с ясен синтаксис и предлага множество библиотеки като NumPy, Pandas, SciPy, Matplotlib и Seaborn, които улесняват анализа на данни. Python е един от предпочитаните програмни езици при и при машинното обучение (machine learning), като за целта има и специална библиотека – Scikit-learn, TensorFlow, PyTorch. В тези библиотеки в Python има имплементиран голям набор от алгоритми за машинното обучение.

Съществуват и технологии, които правят възможно съхранението и обработката на Big Data за кратък период от време. Такива са Hadoop, Spark, Storm и други. Тези технологии са със свободен код, като например Spark е създадена като по-модерно решение в сравнение с Hadoop, има бърза производителност и позволява обработка на масивни потоци от данни, като поддържа четири програмни езици – Python, R, Java и Scala.

Когато става дума за обучение с данни, от изключителна важност е да се покажат начините, по които да се извличат данни, да се структурират, почистват, да се използват статистически и иконометрични методи за представяне и анализиране на данните, били и такива като Big Data.

3. Статистическите анализи с Big Data могат да идентифицират значителни, но несъществени ефекти

Въпреки че статистическите изследванията базирани на структурирани Big Data имат много предимства, слабо значимите ефекти, наблюдавани при такива проучвания, обикновено показват, че размерът на ефектът, представен чрез обобщаващия показател Cohen's d (Cohen, J., 1992) е доста скромнен и практически маловажен. Размерът на ефекта е мярка за това колко важна е разликата, като големите размери на ефекта означават, че разликата е важна, малките размери на ефекта означава, че разликата е маловажна (Todorova, 2022). Размерът на ефекта се получава като се нормира разликата между двете средни и дава мярка за това колко съществено се различават сравняваните групи по даден признак. При постоянно равнище на значимост $\alpha = 0.05$ е по-вероятно да се намери статистически значима разлика при големи по обем извадки в сравнение с малки по обем извадки. Например, ефектите от лечението с дадено лекарство или повишаване на ефективността на нов иновативен метод на преподаване, идентифицирани на основата на големи извадки от структурирани Big Data, въпреки че са статистически значими, може да са почти тривиални на индивидуално ниво, тъй като тестването на статистическата значимост е предназначено за използване при малки, а не при големи по обем извадки.

За представяне на гореизложеното се генерират случайни извадки чрез Random Number Generator от Analysis Tool Pack на MS Excel при следните спецификации: извадка 1 с нормално разпределение, средна = 20, стандартно отклонение = 5 и обем на извадката = 10000; извадка 2 с нормално разпределение, средна = 20,5, стандартно отклонение = 5, обем на извадката = 10000. Теоретичната разлика между средните е твърде малка и незначима (0,5). Прави се статистическа проверка на хипотезата за разлика между средни на две независими извадки, като се приема предположението, че стандартните отклонения са еднакви, тъй като теоретично е заложено, че стандартното отклонение е 5 и при двете извадки. Експериментът е проведен при следните случаи - с първите 30, първите 100, първите 500, първите 1000, първите 5000 и всички 10000 наблюдения. Обработката на данни

е реализирана с онлайн свободно разпространен специализиран софтуер - Effect Size Calculator (Statistics Kingdom, 2017: <https://www.statskingdom.com/effect-size-calculator.html>). Резултатите от анализа са поместени в таблица 1 и таблица 2.

Таблица 1

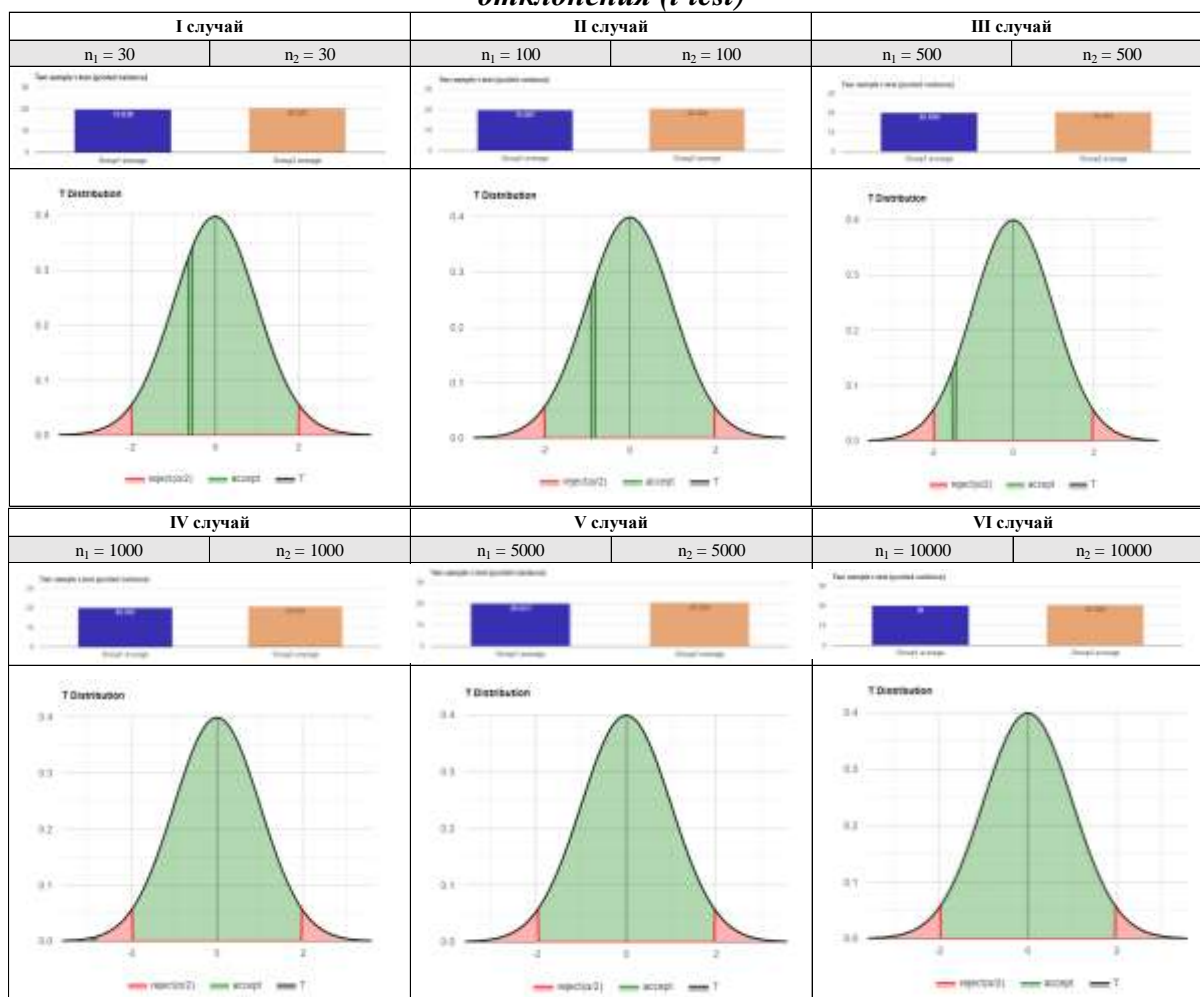
Обобщаващи характеристики и оценки на параметрите на генералните съвкупности при тестване на хипотези за разликата между средни на две независими извадки при предположение за еднакви стандартни отклонения (t-test)

Обобщаващи характеристики и оценки	I случай		II случай		III случай		IV случай		V случай		VI случай	
	$n_1 = 30$	$n_2 = 30$	$n_1 = 100$	$n_2 = 100$	$n_1 = 500$	$n_2 = 500$	$n_1 = 1000$	$n_2 = 1000$	$n_1 = 5000$	$n_2 = 5000$	$n_1 = 10000$	$n_2 = 10000$
Средна аритметична	19,8383	20,5225	19,8669	20,4582	20,0945	20,5614	20,0008	20,6415	20,0206	20,5552	20,0005	20,5661
Разлика между средните	-0,6843		-0,5913		-0,4669		-0,6407		-0,5346		-0,5656	
Стандартно отклонение	4,8823	4,0831	5,0690	4,8290	5,0436	5,0175	5,0635	4,9645	4,9591	5,0082	4,9636	5,0659
Стандартно отклонение (pooled)	4,5005		4,9507		5,0306		5,0142		4,9837		5,0150	
t-емперична характеристика	-0,5889		-0,8446		-1,4675		-2,8574		-5,3639		-7,9748	
p-стойност	0,5582		0,3994		0,1425		0,0043		0,0000001		0,000000000000002	
Размер на ефект	0,15		0,12		0,09		0,13		0,11		0,11	

Източник: По изчисления на автора, реализирани със Statistics Kingdom, <https://www.statskingdom.com/effect-size-calculator.html>

Таблица 2

Графично представяне на резултатите при тестване на хипотези за разликата между средни на две независими извадки при предположение за еднакви стандартни отклонения (t-test)



Източник: По изчисления на автора, реализирани със Statistics Kingdom, <https://www.statskingdom.com/effect-size-calculator.html>

От получените резултати следва, че при малък обем на извадките (30, 100 и

500) разликите в средните са статистически незначими. С увеличаване на обема на извадките (1000, 5000 и 10000) р-стойностите намаляват и всички разлики са статистически значими. Това е продиктувано и от самото конструиране на формулата за изчисляване на емпиричните характеристики на статистическия критерий, защото с увеличаване на обемите на извадките се увеличава и абсолютната стойност на емпиричната характеристика. Това води до намаляване на р-стойността и съответно увеличаване на статистическата значимост. При всички тествани случаи, размерът на ефекта е малък и е в границите от 0,09 до 0,15. В конкретния пример, при извадките с най-малък обем = 30 се наблюдава най-голяма абсолютната разлика между средните и най-голям размер на ефекта, но поради малкия обем на извадките р-стойността е най-висока и това прави разликата в средните статистически незначима. Докато, при извадките с обеми = 10000 абсолютната разлика между средните е по-малка, размерът на ефекта също е с по-ниска стойност, но поради големите обеми на извадките р-стойността е много малка, клоняща към 0 и съответно разликата е статистически значима. Това показва, че ако се изискват качествени резултати, то непременно заедно със статистическата значимост трябва да се обявява и размера на ефекта, който показва какво е практическото значение на статистически значимите резултати.

Често приемаме, че по-голямото е по-добро, че големият обем на извадката води до по-добри резултати, но по-голямото не означава непременно по-качествени резултати. При използването на Big Data е много по-вероятно ако е налице нищожна разлика, то тя да бъде статистически значима, макар и маловажна. Затова при статистическата проверка на хипотези е изключително важно наред със статистическата значимост да се изследва и докладва размера на ефекта.

От друга страна, често проучванията могат да включат систематични грешки, произтичащи от проблеми с дизайна на изследването. Увеличаването на обема на извадката при тези проучвания не би преодоляло този проблем и всъщност изследвания с големи извадки могат само да увеличат систематичните грешки и в следствие да опорочат направените заключения от тестването на статистически хипотези. Затова приложението на Big Data, въпреки големите си възможности, не винаги подобрява валидността на проучвания (Kaplan, 2014).

Рутинно събираните данни, съставляващи Big Data влияе пряко върху качеството им. Когато данните не се събират за конкретна цел, те могат да не са с очакваното качество или да има липсващи данни (Cox, 2018). А това неминуемо създавала проблеми при статистическия им анализ и интерпретацията на получените резултати.

Съществуват доказателства, че когато изследванията се базират на много големи извадки (Big Data), стандартните грешки могат да намалееят обратно пропорционално на мощността на критерия (Cox, 2016). По този начин, докато в някои случаи Big Data могат да намалят важността на прецизната оценка, а в други може да са необходими допълнителни процедури, за да се прецизират получените резултати.

Заключение

Очевидно анализът на Big Data ще бъде важна част от нашето бъдеще, особено ако се комбинира с различни източници на данни. Въпреки че вече съществуват технологии, които правят възможно съхранението и обработката на Big

Data, то това е само за кратък период от време. Предизвикателство е и работата с Big Data и тяхното използване, обработка и анализ за целите на статистика. За реализиране на традиционните статистически анализи е необходимо да се използват само структурирани Big Data, което от една страна усложнява и оскъпява задачата, защото е необходимо да се използват допълнителни ресурси, а от друга - анализите се усложняват. Емпирично беше доказано, че при използването на големи извадки вероятността да се получат статистически значими разлики е много по-голяма, въпреки че е налице нищожно малка разлика. Затова, например при статистическата проверка на хипотези, е изключително важно наред със статистическата значимост да се изследва и докладва размера на ефекта. Това води до заключението, че с целенасочено внимание към съществуващите трудности, описани по-горе и с подходящи анализи е възможно да се справим с потенциалните проблеми.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Cielen, D., Meysman, A., Ali, M. (2016). *Introducing Data Science*. Manning Publication
2. Cohen, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin*, pp. 112, pp. 155–159
3. Cox, D.R., Kartsonaki C., Keogh R. H. (2018). Big data: Some statistical issues. *Stat Probab Lett*. 2018 May;136:111-115. doi: 10.1016/j.spl.2018.02.015. PMID: 29899584; PMCID: PMC5992743.
4. Cox D. R. (2016). Big data and precision. *Biometrika*. 102:712–716. [Google Scholar]
5. Effect Size Calculator [Internet]. *Statistics Kingdom* (2017). [cited 25 October 2024]. Available: <https://www.statskingdom.com/effect-size-calculator.html>
6. Hariri et al. (2019) Big Data, *Journal of Big Data*. Article number: 44, pp. 1-16. Available: <https://journalofbigdata.springeropen.com/articles/10.1186/s40537-019-0206-3>
7. Kaplan R. M., Chambers D. A., Glasgow R. E. (2014). Big data and large sample size: a cautionary note on the potential for bias. *Clin Transl Sci*. 2014 Aug;7(4):342-6. doi: 10.1111/cts.12178. Epub 2014 Jul 15. PMID: 25043853; PMCID: PMC5439816
8. Todorova, S. (2022). Statistical Significance, Power of the Test, and Effect Size Measures in Two-independent-samples t-test case. *Izvestia Journal of the Union of Scientists - Varna. Economic Sciences Series*, 11(1), pp.185-192

APPLYING DYNAMIC TIME WARPING TO ANALYZE SHAPE SIMILARITIES IN TIME SERIES DATA

Chief Assist. Prof. Slaveya Zhelyazkova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *The paper explores the potential of dynamic time warping (DTW) to detect shape-based similarities in time series data and assesses its effectiveness for cluster analysis using the "dtwclust" package in R. Theoretical considerations are demonstrated with an empirical analysis of real house price indices for 46 countries, utilizing OECD data spanning 2010–2023. Results indicate that employing DTW significantly influences clustering outcomes, as it enables the detection of shape similarities in time series, even in cases of temporal shifts and asynchronous patterns. This may lead to the identification of fewer clusters compared to standard clustering approaches. Furthermore, the choice of distance measure—Euclidean versus Manhattan—affects the clustering structure, with validity indices suggesting that DTW using Manhattan distance achieves better-defined, more distinct clusters. Comparative analysis with conventional hierarchical clustering highlights consistencies when similar distance metrics are applied.*

Keywords: *Dynamic time warping; Cluster analysis; dtwclust; Real house price indices*

JEL code: *C38, C63, R31*

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ДИНАМИЧНОТО ВРЕМЕВО ИЗКРИВЯВАНЕ ЗА АНАЛИЗ НА СХОДСТВОТО ВЪВ ФОРМАТА НА ВРЕМЕВИ РЕДОВЕ

Гл. ас. д-р Славя Желязкова
Икономически университет - Варна, България

Въведение

Подходът на динамичното времево изкривяване (DTW – Dynamic time warping) се разработва и става популярен във връзка с приложението му при автоматичното разпознаване на речта. Датира от осемдесетте години на миналия век и като основополагащи се считат статиите на Itakura (1975) и Sakoe & Chiba (1978). Berndt & Clifford (1994) са изследователите, които дават нова насока за приложението на този подход при търсене на сходство във формата на времевите редове. DTW се прилага както самостоятелно, така и се интегрира с други методи като клъстерния анализ, корелационния анализ, методите за разкриване на аномалии и др. През последните години интересът към DTW не стихва и много изследователи се занимават с неговото усъвършенстване (Anantasech & Ratanamahatana, 2019, Choi et al., 2020, Tan et al., 2021, Mizutani & Dreyfus, 2021, Herrmann & Webb, 2023, Matsuo et al., 2023, Qiu et al., 2024), както и с възможностите за приложението му при клъстерния анализ на основата на времевии редове (Wang et al., 2018, Zhang et al., 2022).

Настоящият доклад има за цел да се проучат възможностите на DTW и приложимостта му при клъстерния анализ с използване на подходящ софтуер. Разгледаните теоретични постановки се илюстрират с изследване на сходството на динамиката на индексите на реалните цени на жилищата за 46 държави по данни на OECD за периода 2010 г. – 2023 г.

Динамичното времево изкривяване и приложението му при клъстерния анализ

DTW използва подхода на динамичното програмиране за намиране на такова съответствие на членовете на два времеви реда, при което се минимизира разстоянието между тях, на основата на избран измерител (Berndt & Clifford, 1994). При това съответствие е възможно един член на реда да се свърже с един или повече членове на другия времеви ред. Методът позволява сравнения на динамиката на времеви редове с различна дължина, т.е. различен брой членове. Нека тези редове са X и Y със следните членове: x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_m , които предварително са стандартизирани. За всяка двойка членове на двата реда (x_i, y_j) се оценява различието $\delta(i, j)$ чрез квадрата на разликата между тях $(x_i - y_j)^2$, абсолютната стойност на разликата $|x_i - y_j|$ или друг измерител. Изчислените измерители на различието между членовете на двата реда формират матрица с размер $n \times m$. Задачата, която трябва да се реши чрез динамичното програмиране е да се намери такава пътека в матрицата, т.е. такова съответствие между членовете на двата времеви реда, което да минимизира кумулативните различия между тях. Дефинира се следната рекурсивна връзка между кумулативните различия (Berndt & Clifford, 1994):

$$\gamma(i, j) = \delta(i, j) + \min[\gamma(i-1, j), \gamma(i-1, j-1), \gamma(i, j-1)],$$

според която кумулативното различие за членовете с номера i и j се получава като към по-малката от стойностите на кумулативното различие за съседните членове, предшестващи разглеждания, се добави различието $\delta(i, j)$ за членовете с номера i и j . Така се определят членовете на матрицата, съдържаща кумулативните различия. Пътеката на времевото изкривяване (warping path) задава съответствието на членовете на двата реда и се определя като от горния десен ъгъл на матрицата надолу се избира всеки път този член от трите съседни, който има най-ниска стойност, представляваща кумулативното различие. Тук алгоритъмът е симетричен и е на базата на три члена на матрицата, защото това е заложено при изчисляването на кумулативните различия. Възможно е прилагането на асиметрични алгоритми, както и участието на повече членове (Sakoe & Chiba, 1978).

При търсенето на решение чрез подхода на динамичното програмиране се налагат следните ограничения към точките $w_k(i, j)$ от пътеката на времевото изкривяване (warping path) (Berndt & Clifford, 1994, Ratanamahatana & Keogh, 2004):

- гранични условия – пътеката трябва да започва от точка $w_1(1,1)$ и да завършва в точка $w_K(n, m)$, т.е. залага се съответствие на първите и последните членове на двата времеви реда. От гледна точка на матрицата на кумулативните различия, пътеката трябва да започва от долният ляв ъгъл и да завършва в горния десен ъгъл.
- условия за непрекъснатост – координатите i или j на последователните точки от пътеката остават непроменени или нарастват с не-повече от единица ($i_k - i_{k-1} \leq 1$ и $j_k - j_{k-1} \leq 1$). Това гарантира, че е намерено съответствие между всички членове на двата разглеждани реда.
- условие за монотонност – точките трябва да бъдат монотонно подредени по отношение на времето, като $i_{k-1} \leq i_k$ и $j_{k-1} \leq j_k$. Следователно пътеката на времевото изкривяване върви само напред, без връщане назад във времето.

- условие за ограничаване на наклона – пътеката не трябва да бъде нито много стръмна, нито много полегата, т.е. не трябва да има много последователни нараствания само на едната от координатите на точките от пътеката. В противен случай ще има дълги последователности от членове на единия времеви ред, свързани с един член или малък брой последователни членове на другия ред.
- условие за ширината на прозореца на времевото изкривяване – пътеката би следвало да не се отклонява значително от главния диагонал на матрицата на кумулативните различия. Точките от пътеката трябва да попадат в прозореца на времевото изкривяване, който има зададена ширина r ($|i_k - j_k| \leq r$). Той задава допустимата отдалеченост във времето на свързаните членове на двата времеви реда.

При изследване на сходството във формата на множество времеви редове е подходящо тяхното класифициране чрез клъстерния анализ. Ако се прилага класическият вариант, би следвало да се сравняват съответните членове на времевите редове, което не би било подходящо при наличие на асинхронност в динамиката им. В този случай е подходящо определянето на съответствието на членовете на всяка двойка разглеждани времеви редове чрез DTW и използването му при намиране на разстоянията. При клъстерния анализ основно се използват следните: манхатаново разстояние, евклидовото разстояние, квадрата на евклидовото разстояние, разстояние на Чебишев, разстояние на Минковски и др. Клъстерният анализ може да се реализира като йерархичен, като метод на k -средните, като размито клъстеризиране и др. В изследването ще бъде приложен йерархичният клъстерен анализ, защото при него не е необходимо предварително определяне на броя на клъстерите и дава възможност да се проследи формирането на клъстерите на всяко следващо ниво, както и да се разкрие йерархичната структура на данните. Той може да се приложи като агломеративен или като дивизионен. При първия, всяка единица се разглежда като отделен клъстер и на всеки следващ етап, клъстерите, които са най-близки се обединяват в нов клъстер до достигане на един общ клъстер. При втория – в началото всички единици са обединени в един клъстер, който на всеки следващ етап се разделя на по-малки и по-хомогенни клъстери. В практиката по-широко приложение има агломеративния подход като тук има възможност за избор на начин за определяне на разстоянието между клъстерите и свързването им. Най-често използвани са следните начини на свързване на клъстерите (Everitt et al. 2011):

- **единично свързване**, при което разстоянието между два клъстера се определя като минималното разстояние между две единици от съответните клъстери;
- **пълно свързване**, при което разстоянието между два клъстера се определя като максималното разстояние между две единици от съответните клъстери;
- **средно групово свързване**, при което разстоянието между два клъстера се изчислява като непретеглена средна от разстоянието между всички двойки единици от съответните клъстери;
- **претеглено средно свързване**, при което разстоянието между два клъстера се изчислява като претеглена средна от разстоянието между всички двойки единици от съответните клъстери с тегла броя на единиците в съответните клъстери;

- **метод на центроида**, при който след обединяване на клъстери се определя центроид чрез осредняване или по друг начин и след това той участва при намиране на разстоянието между клъстерите, заедно с центроидите на други клъстери или индивидуални единици;
- **медианно свързване**, при което отново се работи с центроиди, но всеки нов центроид се определя на основата на центроидите на клъстерите, а не на индивидуалните единици в клъстерите, като по този начин не се дава възможност големите клъстери да доминират над малките при определянето на центроида. След това разстоянието между клъстерите се определя на основата на тези центроиди;
- **метод на Ward**, при който обединяването на два клъстера се основава на вътрешно клъстерната девиация, наричана още сума от квадратите на грешките. Тя се определя за всеки клъстер като сумата от квадратите на отклоненията от средните. Тези средни се получават от членовете на времевите редове от клъстера с един и същи пореден номер, а при приложението на метода DTW за съответстващите членове на разглежданите редове. След това за обединение с клъстера се избира този, който води до минимално увеличаване на сумата на квадратите на грешките след включване на новите единици в клъстера. Доказано е, че изменението на тази вътрешно клъстерна девиация е пропорционално на квадрата на евклидовото разстояние между центроидите на клъстерите. Затова в модифицираната версия на този метод се работи директно с квадрата на евклидовото разстояние като измерител на разстоянието между клъстерите. Счита се, че методът е най-слабо чувствителен към наличието на аутлайери. Предвид последното предимство, в изследването ще бъде предпочетен методът на Ward с приложената модификация.

За определяне на броя на клъстерите се използват графичният подход на основата на дендограмата, както и индексите за оценка на валидността на клъстерите (CVI). Arbelaitz et al. (2013) правят сравнителен анализ на множество CVI. Те посочват, че „повечето индекси оценяват кохезията на клъстерите (вътрешна или вътрешноклъстерна вариация) и тяхната сепарация (междуклъстерна или външна вариация) и ги комбинират, за да изчислят мярка за качество. Комбинирането се извършва чрез деление (индекси от тип съотношение) или чрез събиране (индекси от тип сума)”. Индексът на Dunn е от тип съотношение. В числителя стои разстоянието до най-близкия съсед, а в знаменателя – максималното разстояние между елементи на един и същи клъстер, което се нарича диаметър на клъстера (Arbelaitz et al., 2013):

$$D(C) = \frac{\min_{c_k \in C} \left\{ \min_{c_l \in C \setminus c_k} \{ \delta(c_k, c_l) \} \right\}}{\max_{c_k \in C} \{ \Delta(c_k) \}},$$

където:

$$\delta(c_k, c_l) = \min_{X_i \in C_k} \min_{X_j \in C_l} \{ d_e(X_i, X_j) \},$$

$$\Delta(c_k) = \max_{X_i, X_j \in C_l} \{ d_e(X_i, X_j) \}.$$

Силуетният индекс е нормиран индекс от тип сума. Изчислява се като средна на разликите между средното разстояние на всеки елемент на клъстера до елементите на най-близкия клъстер и средното разстояние до другите елементи на

собствения му клъстер, нормирани с по-голямата от двете стойности (Arbelaitz et al., 2013):

$$Sil(C) = 1/N \sum_{c_k \in C} \sum_{x_i \in c_k} \frac{b(x_i, c_k) - a(x_i, c_k)}{\max\{a(x_i, c_k), b(x_i, c_k)\}},$$

където:

$$a(x_i, c_k) = 1/|c_k| \sum_{x_j \in c_k} d_e(x_i, x_j),$$

$$b(x_i, c_k) = \min_{c_l \in C \setminus c_k} \left\{ 1/|c_l| \sum_{x_j \in c_l} d_e(x_i, x_j) \right\}.$$

Както Arbelaitz et. al. (2013) посочват индексът на Davies-Bouldin „оценява кохезията въз основа на разстоянието на елементите на клъстера до неговия центроид и сепарацията въз основа на разстоянието между центроидите“. Изчислява се като за всяка двойка клъстери се определя съотношението на сумата средните разстояния на елементите на всеки от клъстерите до съответния им центроид и разстоянието между тези двата центроида. След това се намира за всеки клъстер максималната стойност на съотношенията с негово участие и тези максимални стойности се осредняват (Arbelaitz et al., 2013):

$$DB(C) = 1/K \sum_{c_k \in C} \max_{c_l \in C \setminus c_k} \left\{ \frac{S(c_k) + S(c_l)}{d_e(\bar{c}_k, \bar{c}_l)} \right\},$$

където:

$$S(c_k) = 1/|C_k| \sum_{x_i \in C_k} d_e(x_i, \bar{c}_k).$$

При модифицирания вариант на индекса на Davies-Bouldin първо за всяка двойка клъстери се определя общата сума от средните разстояния на елементите на всеки от клъстерите до съответния им центроид. След това за всеки клъстер се намира максималната стойност на тези суми с негово участие. Тази максимална стойност се разделя на минималното разстояние между центроида на този клъстер и центроидите на останалите клъстери. Получените съотношения се осредняват (Arbelaitz et al., 2013):

$$DB^*(C) = 1/K \sum_{c_k \in C} \frac{\max_{c_l \in C \setminus c_k} \{S(c_k) + S(c_l)\}}{\min_{c_l \in C \setminus c_k} \{d_e(\bar{c}_k, \bar{c}_l)\}}.$$

По-високите стойности на силуетния индекс и индекса на Dunn и по-ниските стойности на индексите Davies-Bouldin показват по-добре отделени клъстери.

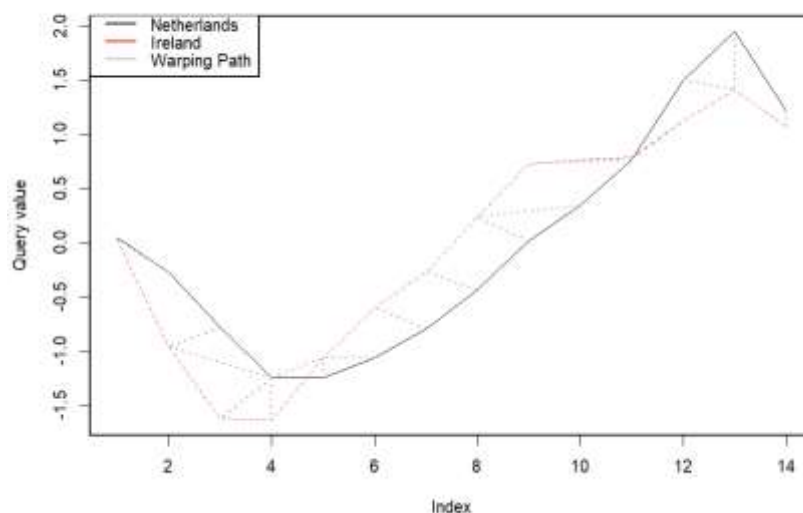
Анализ на сходството на динамиката на индексите на реалните цени на жилищата

Разгледаните методи се прилагат при анализа на сходството на динамиката на индексите на реалните цени на жилищата за 46 държави по данни на OECD за периода 2010 г. – 2023 г. Данните са подложени предварително на стандартизация, защото се цели търсене на прилики само във формата на времевите редове.

За реализирането на клъстерния анализ с приложение на DTW подхода се използва пакета „dtwclust“ (Sardá-Espinosa, 2019b). Той предлага на потребителите множество разновидности на DTW, от които в изследването се използват две: dtw и dtw2. При първата се работи с манхатановото разстояние, а при втората – с

евклидовото разстояние (Sardá-Espinosa, 2019a).

За илюстрация на DTW подхода е включена диаграма (фиг. 1), която представя стандартизираните индекси на реалните цени на жилищата за Холандия и Ирландия и пътеката на времето изкривяване (warping path). Установено е следното съответствие на членовете на двата времеви реда: (1,1); (2,1); (3,2); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (5,5); (6,5); (7,6); (8,7); (9,8); (10,8); (11,9); (11,10); (11,11); (11,12); (12,13); (13,13) и (14,14).



Фиг. 1. Стандартизирани индекси на реалните цени на жилищата за Холандия и Ирландия и пътека на времето изкривяване (warping path) с приложение на DTW подхода на основата на евклидовото разстояние

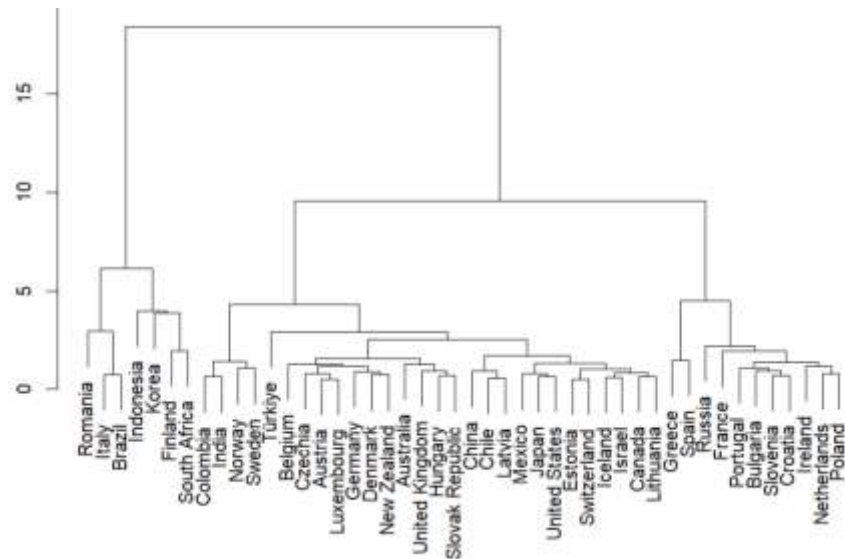
Клъстерният анализ е реализиран като йерархичен с приложение на модифицирания метод на Ward за обединяване на клъстери. Разглеждат се четири варианта. В два от тях клъстерният анализ се интегрира с DTW подхода на основата на евклидовото и на манхатановото разстояние. В другите два варианта е приложен класическият йерархичен клъстерен анализ с използване отново на същите разстояния. Броят на клъстерите се определя на основата на дендограмата и индексите за оценка на валидността на клъстерите – силуетен индекс, индекс на Dunn и индексите на Davies-Bouldin (табл. 1). При избора би следвало да се предпочете този брой на клъстерите, за който първите два индекса имат максимални стойности, а последните два – минимални.

Таблица 1

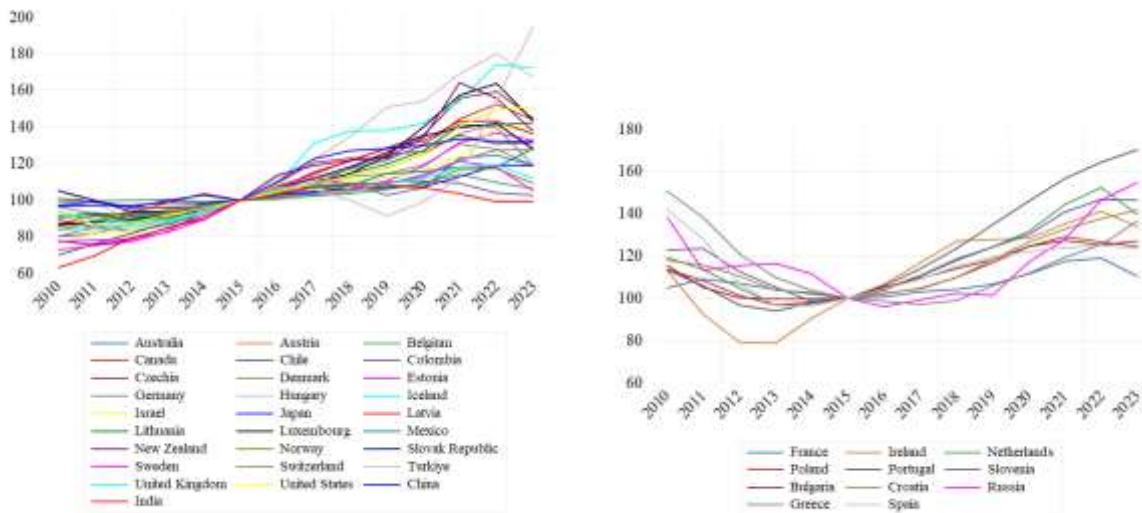
**Индекси за оценка на валидността на клъстерите за приложените четири
варианта на клъстерен анализ**

Разстояния	Брой кълъстери	Силуетен индекс	Индекс на Dunn	Индекс на Davies- Bouldin	Модифициран индекс на Davies- Bouldin
DTW с евклидово разстояние	3	0,41	0,15	0,85	1,24
	4	0,40	0,21	1,08	1,32
	5	0,36	0,21	0,95	1,26
	6	0,30	0,21	0,91	1,32
DTW с манхатаново разстояние	3	0,32	0,17	1,00	1,45
	4	0,32	0,17	1,10	1,27
	5	0,32	0,25	0,81	0,94
	6	0,20	0,21	1,10	1,39
Евклидово разстояние	3	0,38	0,14	1,06	1,29
	4	0,38	0,16	0,96	1,30
	5	0,32	0,16	0,99	1,49
	6	0,33	0,18	0,93	1,30
Манхатаново разстояние	3	0,44	0,26	0,95	1,22
	4	0,42	0,31	0,90	1,01
	5	0,28	0,14	1,25	1,59
	6	0,28	0,14	0,98	1,29

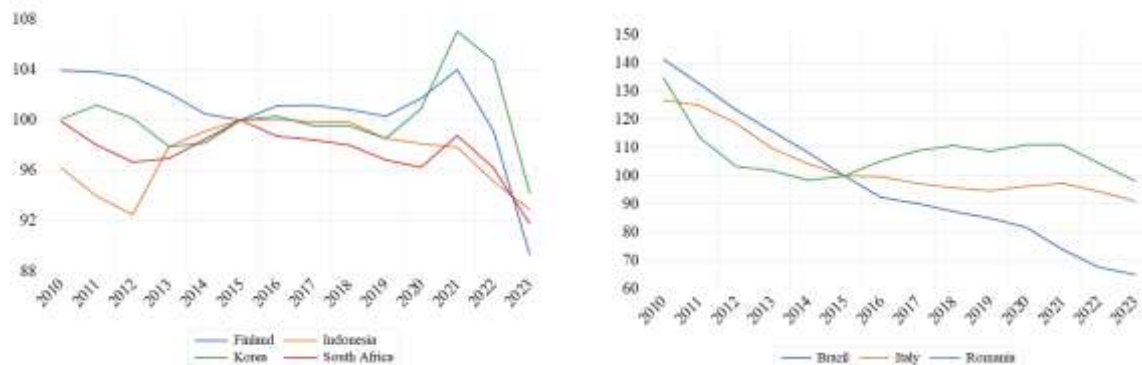
Дендограмата при приложен йерархичен клъстерен анализ, интегриран с подхода DTW на основата на евклидовото разстояние (фиг.2) показва ясно разграничени три клъстера. Индексите за оценка на валидността на клъстерите също потвърждават този избор относно броя им (табл. 1). Силуетният индекс има най-висока стойност и индексите на Davies-Bouldin имат най-ниска стойност при три клъстера, в сравнение с тези, изчислени при по-голям брой клъстери. Само индексът на Dunn при четири клъстера има по-висока стойност в сравнение с три клъстера, която стойност се задържа на приблизително същото равнище при пет и шест клъстера. Следователно на негова основа би следвало да бъде предпочетено групирането на индексите на реалните цени на жилищата за разглежданите 46 държави в четири клъстера. Това решение би се получило, ако се „отреже“ дендограмата при предходния голям скок. Първият клъстер включва Австралия, Австрия, Белгия, Великобритания, Германия, Дания, Естония, Израел, Индия, Исландия, Канада, Китай, Колумбия, Латвия, Литва, Люксембург, Мексико, Нова Зеландия, Норвегия, САЩ, Словашка република, Турция, Унгария, Чехия, Чили, Швейцария, Швеция и Япония (28 държави). Във втория клъстер са Индонезия, Корея, Финландия и Южна Африка (4 държави). Третият клъстер се състои от 11 държави: България, Гърция, Ирландия, Испания, Полша, Португалия, Русия, Словения, Франция, Холандия и Хърватия. Четвъртият клъстер включва Бразилия, Италия и Румъния (3 държави). Вторият и четвъртият клъстери се обединяват в един и така се формират три клъстера. Резултатите от клъстерния анализ са онагледени с диаграми на динамиката на индексите на реалните цени на жилищата за държавите за всеки от четирите клъстера (фиг. 3 и 4).



Фиг. 2. Дендограма при приложен йерархичен клъстерен анализ, интегриран с подхода DTW на основата на евклидовото разстояние и модифициран метод на Ward за обединяване на клъстери с използване на пакета „dtwclust“

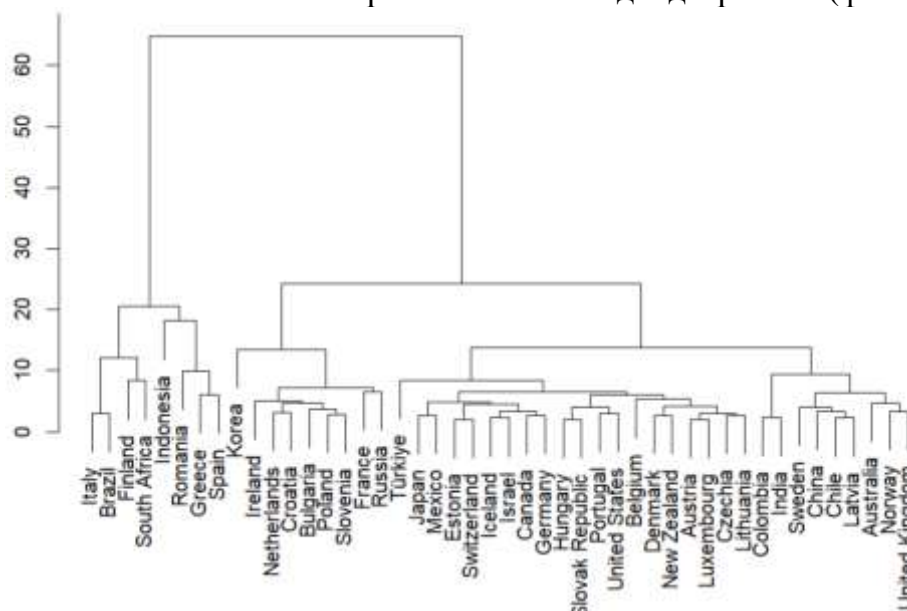


Фиг. 3. Динамика на индексите на реалните цени на жилищата за периода 2010 г. – 2023 г. за държавите от първия и третия клъстер при приложен йерархичен клъстерен анализ, интегриран с подхода DTW на основата на евклидовото разстояние



Фиг. 4. Динамика на индексите на реалните цени на жилищата за периода 2010 г. – 2023 г. за държавите от втория и четвъртия клъстер при приложен йерархичен клъстерен анализ, интегриран с подхода DTW на основата на евклидовото разстояние

При прилагане на DTW подхода на основата на манхатановото разстояние индексите за оценка на валидността на клъстерите предопределят избора на пет клъстера, което съответства на избора въз основа на дендограмата (фиг. 5).

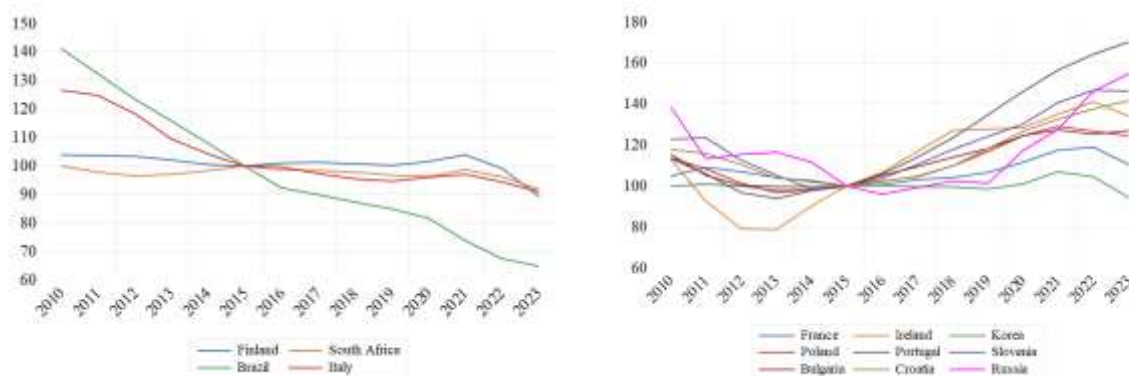


Фиг. 5. Дендограма при приложен йерархичен клъстерен анализ, интегриран с подхода DTW на основата на манхатановото разстояние и модифициран метод на Ward за обединяване на клъстери с използване на пакета „dtwclust“

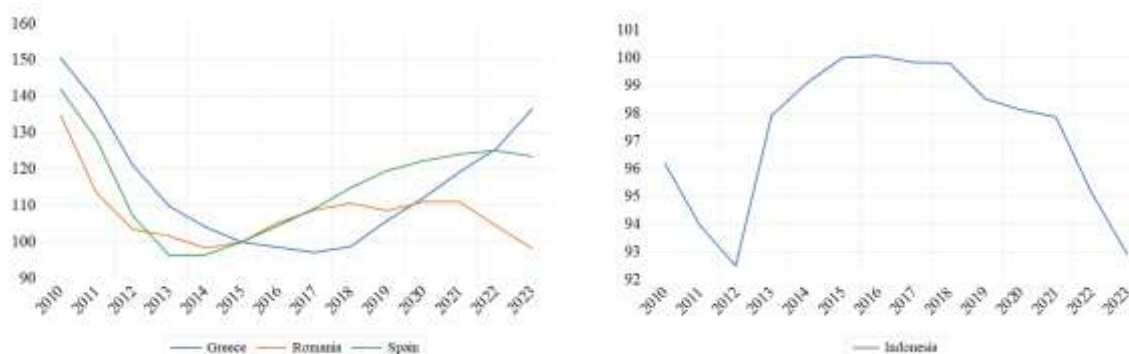
Ако се сравни съставът на петте клъстера с този на четирите при приложен DTW подход на основата на евклидовото разстояние, могат да се открият следните различия. Първият клъстер включва в добавка Португалия, която е била част от третия клъстер в предходния вариант на клъстеризация. Така първият клъстер обхваща 29 държави. Във втория клъстер попадат отново четири държави (Бразилия, Италия, Финландия и Южна Африка), но само две от тях съвпадат с предходната клъстеризация (Финландия и Южна Африка), а другите две са от четвъртия клъстер. Диаграмата на индексите за страните от новия втори клъстер показва по-голямо сходство в динамиката, в сравнение с предходната клъстеризация (фиг. 6). Третият клъстер се състои от девет държави (България, Ирландия, Корея, Полша, Русия, Словения, Франция, Холандия, Хърватия) (фиг. 6), като не включва Гърция и Испания, които при предходната клъстеризация са били в тази група. В този клъстер последно е добавена Корея, която е най-отдалечена от останалите държави в клъстера и при предходната клъстеризация е била във втория клъстер. Четвъртият клъстер включва Гърция, Испания и Румъния (фиг. 7), от които Румъния е била при предходната клъстеризация в този клъстер, заедно с Бразилия и Италия. В последния пети клъстер е единствено Индонезия, която ако се формират само четири клъстера се присъединява към четвъртия, заедно с Гърция, Испания и Румъния, въпреки че е доста отдалечена от тях.

Въпросът за избора между разглежданите два варианта на клъстеризация, при които се прилага подхода на DTW с използване на евклидово и манхатаново разстояние няма еднозначен отговор. Ако се използват индексите за оценка на валидността на клъстерите, би следвало въз основа на индексите на Davies-Bouldin и индекса на Dunn да се предпочете втория вариант на клъстеризация с петте клъстера. Само силуетният индекс дава превес на първия вариант. Разглеждането на диаграмите на динамиката на индексите също насочва към избора на подхода на

DTW с използване на манхатановото разстояние.

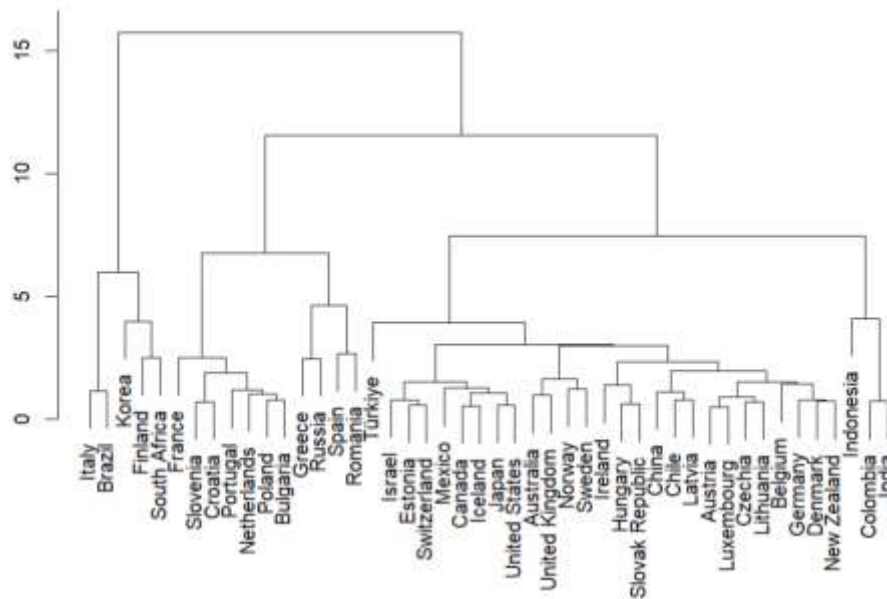


Фиг. 6. Динамика на индексите на реалните цени на жилищата за периода 2010 г. – 2023 г. за държавите от втория и третия клъстер (приложен DTW на основата на манхатановото разстояние)



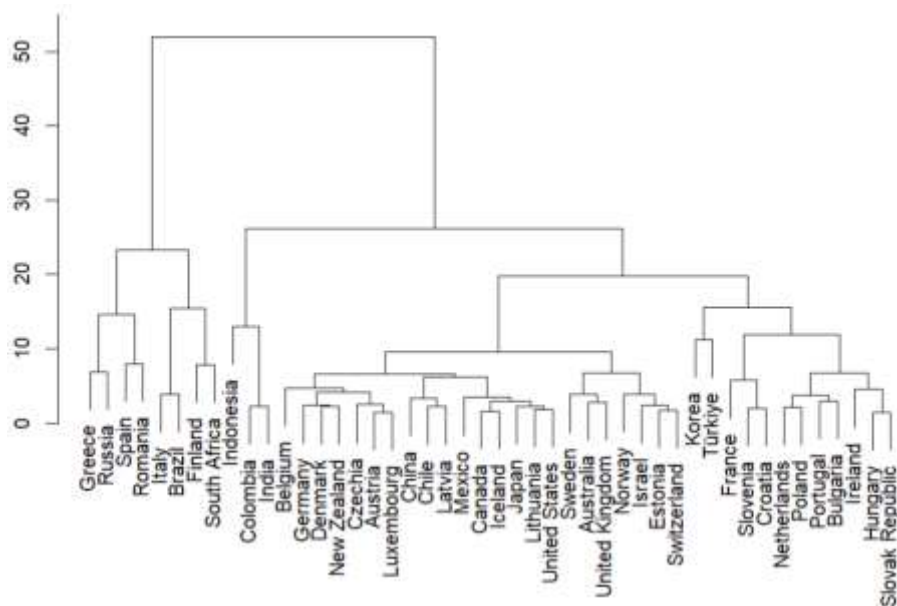
Фиг. 7. Динамика на индексите на реалните цени на жилищата за периода 2010 г. – 2023 г. за държавите от четвърти и петия клъстер (приложен DTW на основата на манхатановото разстояние)

При класическия йерархичен клъстерен анализ на основата на евклидовото и разстояние индексите за оценка на валидността на клъстерите – силуетният индекс, индексът на Dunn и индексите на Davies-Bouldin предопределят избора на четири клъстера (табл. 1). Визуалната инспекция на дендограмата (фиг. 8) не отхвърля този избор, но дава основание да се разглежда възможността също за шест клъстера. Резултатите при четири клъстера се получават близки до тези при клъстерния анализ, интегриран с подхода DTW на основата на евклидовото разстояние. Броят на държавите в първия клъстер е 27, като разликата се състои във включването на Ирландия, а Индия и Колумбия са отделени в самостоятелен клъстер, заедно с Индонезия. Третият клъстер включва Бразилия, Италия, Корея, Финландия и Южна Африка, като първите две страни при първия вариант на клъстеризация са били в отделен клъстер, заедно с Румъния. Четвъртият клъстер се припокрива почти напълно с третия от първия вариант на клъстеризация, като единствената разлика е допълнително включената Румъния. Разликите с втория вариант на клъстеризация са много по-големи, от тези с първия.



Фиг. 8. Дендограма при приложен йерархичен клъстерен анализ на основата на евклидовото разстояние и модифициран метод на Ward за обединяване на клъстери с използване на пакета „dtwclust“

Индексът на Dunn и индексите на Davies-Bouldin при класическия йерархичен клъстерен анализ на основата на манхатановото разстояние са за определяне на четири клъстера, което се подкрепя и от визуалната инспекция на дендограмата (фиг. 9), въпреки че силуетният индекс ни насочва към три клъстера. Тук първият клъстер включва 35 държави и като състав съответства на страните от първия (29 държави) и третия клъстер (9 държави) при клъстерния анализ, интегриран с подхода DTW на основата на манхатановото разстояние, с изключение на три държави, които не са включени – Индия, Колумбия и Русия. Ако се разгледа вариантът с формиране на пет клъстера, то този клъстер се разделя на два клъстера, включващи съответно 23 и 12 държави. Вторият клъстер включва Индия, Колумбия и Индонезия, като последната във втория вариант на клъстеризация бе отделена в самостоятелен клъстер. Третият клъстер се състои от Бразилия, Италия, Финландия и Южна Африка, като изцяло съответства на състава на втория клъстер при втория вариант на клъстеризация. Такова съответствие се наблюдава и при четвъртия клъстер, който включва Гърция, Испания, Румъния и Русия, като само последната не е част от съответния клъстер при втория вариант на клъстеризация. Резултатите от четвъртия вариант на клъстерен анализ са много по-близки до втория, интегриран с подхода DTW на основата на манхатановото разстояние, отколкото до останалите два варианта с използване на евклидовото разстояние.



Фиг. 9. Дендограма при приложен йерархичен клъстерен анализ на основата на манхатановото разстояние и модифициран метод на Ward за обединяване на клъстери с използване на пакета „dtwclust“

Заклучение

Прилагането на DTW подхода се отразява на резултатите от клъстерния анализ. Благодарение на него се намира сходство във формата на времевите редове, при които се наблюдава изместване във времето и асинхронност в динамиката. Това може да доведе до определяне на по-малък брой на клъстерите с приложение на този подход в сравнение с традиционния клъстерен анализ. Използването на евклидовото и манхатановото разстояние при DTW води до различия в състава на клъстерите. Индексите за оценка на валидността на клъстерите показват, че DTW на основа на манхатановото разстояние дава при интегрирането му с клъстерния анализ по-добре отделени клъстери. Сравнителният анализ с резултатите от класическия йерархичен клъстерен анализ показва сходство на база използваните измерители на разстоянието. Изследването може да се развие със сравнителен анализ, при който се разглежда как DTW подхода се съчетава с различните методи за свързване (обединяване) на клъстерите.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Anantasech, P. & Ratanamahatana, C.A. (2019). Enhanced Weighted Dynamic Time Warping for Time Series Classification. In: Yang, X.S., Sherratt, S., Dey, N., Joshi, A. (eds) *Third International Congress on Information and Communication Technology. Advances in Intelligent Systems and Computing*, 797. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1165-9_60
2. Arbelaitz, O., Gurrutxaga, I., Muguerza, J., Pérez, J.M., & Perona, I. (2013). An extensive comparative study of cluster validity indices. *Pattern Recognition*, 46, 243-256. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2012.07.021>
3. Berndt, D. & Clifford, J. (1994). Using dynamic time warping to find patterns in time series. *Proceedings of the 3rd International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (AAAIWS'94)*. AAAI Press, 359–370.

4. Choi, W., Cho, J., Lee, S., & Jung, Y. (2020). Fast Constrained Dynamic Time Warping for Similarity Measure of Time Series Data. *IEEE Access*, 8, 222841-222858. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3043839>
5. Everitt, B.S., Landau, S., Leese, M. & Stahl, D. (2011). *Cluster Analysis*. 5th ed, John Wiley & Sons, Ltd., ISBN: 978-0-470-97780-4.
6. Herrmann, M., & Webb, G. I. (2023). Amercing: An intuitive and effective constraint for dynamic time warping. *Pattern Recognition*, 137, 109333. <https://doi.org/10.1016/J.PATCOG.2023.109333>
7. Itakura, F. (1975). Minimum prediction residual principle applied to speech recognition. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 23(1), 67-72. doi: 10.1109/TASSP.1975.1162641
8. Matsuo, S., Wu, X., Atarsaikhan, G., Kimura, A., Kashino, K., Iwana, B. K., & Uchida, S. (2023). Deep attentive time warping. *Pattern Recognition*, 136, 109201. <https://doi.org/10.1016/J.PATCOG.2022.109201>
9. Mizutani, E., & Dreyfus, S. (2021). On using dynamic programming for time warping in pattern recognition. *Information Sciences*, 580, 684-704. <https://doi.org/10.1016/J.INS.2021.08.075>
10. Qiu, L., Qiu, C., & Song, C. (2024). ESDTW: Extrema-based shape dynamic time warping. *Expert Systems with Applications*, 239, 122432. <https://doi.org/10.1016/J.ESWA.2023.122432>
11. Ratanamahatana, C.A. & Keogh, E. (2004). Making Time-series Classification More Accurate Using Learned Constraints. *Proc. SIAM Int. Conf. Data Min., Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA*, 11–22.
12. Sakoe, H. & Chiba, S. (1978) Dynamic programming algorithm optimization for spoken word recognition. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 26(1), 43-49. doi: 10.1109/TASSP.1978.1163055
13. Sardá-Espinosa, A. (2019a). dtwclust: Time series clustering along with optimizations for the dynamic time warping distance (Version 5.5.3) [R package]. Available from <https://CRAN.R-project.org/package=dtwclust>
14. Sardá-Espinosa, A. (2019b). Time-series clustering in R Using the dtwclust package. *R Journal*, 11(1). <https://doi.org/10.32614/RJ-2019-023>
15. Tan, C. W. Herrmann, M. & Webb, G. I. (2021). Ultra fast warping window optimization for Dynamic Time Warping. *IEEE International Conference on Data Mining (ICDM), Auckland, New Zealand*, 589-598. doi: 10.1109/ICDM51629.2021.00070
16. Wang, W., Lyu, G., Shi, Y. & Liang, X. (2018). Time Series Clustering Based on Dynamic Time Warping. *IEEE 9th International Conference on Software Engineering and Service Science (ICSESS), Beijing, China*, 487-490. doi: 10.1109/ICSESS.2018.8663857
17. Zhang, K., Lin, S., Sun, H., Ma, L., Xu, J. (2022). Dynamic time warping based clustering for time series analysis. In: Wang, S., Zhang, Z., Xu, Y. (eds) *IoT and Big Data Technologies for Health Care. IoTCare 2021. Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering*, 415. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-94182-6_29

CONTEMPORARY PERSPECTIVES, OPPORTUNITIES AND CHALLENGES OF DISTANCE LEARNING IN HIGHER EDUCATION

Chief Assist. Prof. Velina Yordanova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Chief Assist. Prof. Dimitriya Karadimova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *This scientific material examines the modern perspectives and possibilities provided by distance learning in higher education. In view of rapidly developing technologies and changing educational requirements, distance learning is becoming an increasingly important part of the educational process. In this context, the author attempts to systematize and indicate some of the most essential features of distance learning, as well as the opportunities it provides in higher education.*

Keywords: *Higher education; Opportunities; Distance learning; Perspectives*

JEL code: *A2*

СЪВРЕМЕННИ ПЕРСПЕКТИВИ, ВЪЗМОЖНОСТИ И ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА НА ДИСТАНЦИОННОТО ОБУЧЕНИЕ ВЪВ ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ

Гл. ас. д-р Велина Йорданова
Икономически университет – Варна, България

Гл. ас. д-р Димитрия Карадимова
Икономически университет – Варна, България

През последните няколко години дистанционното обучение във висшето образование се внедрява и развива със значително бързо темпо. Няколко са основните причини, които бихме могли да посочим за това: технологичните иновации; промените в образователните модели и разбира се не на последно място ковид пандемията, която принуди света в кратки срокове да се адаптира към новата реалност. Съвременните перспективи и възможности, които предоставя дистанционното обучение във висшето образование, не само отварят нови хоризонти за студентите, но и предизвикват традиционните представи за университетското образование.

Основната цел, която авторът си поставя в настоящия доклад е да се изведат основните перспективи и възможности на дистанционното обучение във висшето образование, както и предизвикателствата, пред които е изправена академичната общност.

1. Основни предимства на дистанционното обучение

Въз основа на направен обзор на различни специализирани и научни публикации (Стоянова: 2020; Шопова и др.: 2020; Hodges, С., et al.: 2020; Baum & McPherson: 2019; Jayaratne & Moore: 2017; Varkonyi: 2017;) бихме могли да посочим някои от най-съществените предимства на дистанционното обучение, като разбира

се изрично отбелязваме, че с това въпросът с възможностите, които то предоставя не се изчерпва напълно.

Едно от основните предимства на дистанционното обучение, което бихме могли да споменем, е неговата гъвкавост. Студентите могат да учат от къщи, на работа или дори по време на пътуване. Това осигурява възможност за обучение, където и когато то е удобно за тях, което е особено важно в контекста на нарастващата динамика на съвременния начин на живот.

Със силното развитие на интернет технологиите, дистанционното обучение прави образованието достъпно дори за тези, които са далеч от учебните заведения. Този модел е особено полезен за студентите от различни части на света, които могат да получат качествено образование, без да бъдат ограничени от пространствени или географски фактори.

Друго предимство на дистанционното обучение е, че с неговото все по-голямо внедряване се развиват и иновациите в образователните технологии. Виртуалните класни стаи, интерактивните учебни материали и уебинарите са само част от инструментите, които предоставят богат опит на студентите. Технологии като виртуална реалност (VR) и разширена реалност (AR) създават реалистични среди за обучение, които подобряват разбирането на сложни концепции. Освен това, дистанционното обучение отваря врати за използване на множество виртуални ресурси, библиотеки и бази данни, които са на разположение за студентите. Това допринася за по-широк и дълбок обхват на изследванията и научните ресурси, които студентите могат да използват.

Важно преимущество на съвременните системи за дистанционно обучение е, че те включват функционалности, които позволяват персонализиране на образователния опит. Анализът на данни и изкуственият интелект (ИИ) се използват, за да се адаптират учебните планове и материали към индивидуалните нужди на студентите. Този личен подход стимулира по-ефективното усвояване на информацията и насърчава самостоятелното учене.

Не на последно място, дистанционното обучение облекчава и улеснява възможностите за сътрудничество между студенти от различни университети. Виртуалните проекти, обмяната на знание и обучението на различни езици създават по-широк кръгзор и гледни точки. Това помага на студентите да развиват международна перспектива и меки умения, които са от съществено значение в глобалния пазар на труда.

Важно е да споменем, че с развитието на технологиите за анализ на данни, дистанционното обучение предоставя детайлна обратна връзка за ефективността на учебния процес. Измерването на успеха на студентите, оценяването на учебните материали и определянето на силните и слабите страни в учебния процес са стъпки, които допринасят за по-добро качество на образованието.

Тук е мястото да отбележим, че дистанционното обучение играе ключова роля в адаптирането на студентите към бързо променящия се свят на труда. С развиващите се технологии и появата на нови индустрии, уменията, необходими за успешна кариера, се променят динамично. Дистанционното обучение предоставя възможност за постоянно обновяване на знанията и уменията през целия професионален живот.

Дистанционното обучение допринася за екологично и устойчиво образование. То намалява необходимостта от физическо присъствие в университетите и по-

конкретно в учебните зали, което води до намаляване на емисиите от транспорт и консумация на енергия. Този модел на обучение е по-екологично устойчив и съответства на принципите на устойчиво развитие. Освен това, той може да намали икономическите бариери за студентите, като им предостави възможност за образование без значителни разходи за настаняване и транспорт.

Друго важно предимство на дистанционното обучение е, че то има потенциал да разруши социалните и икономически бариери за достъп до висшето образование. Този модел може да предостави образователни възможности на студенти от различни социални слоеве, независимо от тяхното географско положение или финансов статус. Така се подпомага равенството в образованието и се създават равни възможности за развитие на индивидуалния потенциал.

Освен това, дистанционното обучение служи като катализатор за постоянното интегриране на нови технологии в образователните практики. Този процес стимулира развитието на иновации във висшето образование, които се отразяват положително на образователния процес. Използването на технологии като машинно самообучение и анализ на големи данни предоставя допълнителни възможности за подобрене на образователния процес.

Разбира се, от направеното до тук изложение бихме могли да обобщим, че дистанционното обучение във висшето образование предоставя значителни възможности, то също така трябва да отбележим, че в същото време в някои аспекти то е предизвикателство, което изисква голямо внимание и вземане на важни решения.

2. Предизвикателства пред дистанционното обучение

В изложението по-долу, въз основа на проучване и анализ на различни научни публикации (Стойнова: 2020; Гетова и др.: 2020; Иванов: 2014), ще се опитаме да изведем някои от по-съществените предизвикателства, пред които е изправено дистанционното обучение във висшето образование, като разбира се не претендираме за изчерпателност по този въпрос.

Едно от основните предизвикателства, което искаме да отбележим, е липсата на физически контакт между преподаватели и студенти, както и между самите студенти. Личният взаимодействиен аспект на обучението може да бъде от съществено значение за стимулиране на дискусии, разбиране на сложни теми и изграждане на образователна общност, което при дистанционното обучение липсва или е силно ограничено.

Неравният достъп до технологии е друго значително предизвикателство. Някои студенти може да се сблъскат с ограничения при интернет достъп, липса на необходими устройства или недостатъчна технологична грамотност. Това според нас може да доведе до неравенство в обучението и ограничаване на образователните възможности.

Друго важно предизвикателство пред дистанционното обучение е свързано с това, че студентите, преподавателите и персоналът трябва да разполагат със специфични умения за успешно участие в дистанционното обучение. Това включва владене на технологии, самодисциплина, умения за комуникация във виртуална среда и способности за управление на времето.

Оценяването на студентите в дистанционно обучение може да бъде истинско предизвикателство за преподавателите. Традиционните системи за оценяване могат да се окажат недостатъчни, когато се премине към дистанционно обучение и се

изисква адаптация, която да гарантира обективност и надеждност. Поради това преподавателите трябва да изградят ефективни методи за оценка, които не само да проверят знанията обективно, но и да стимулират активното участие и прилагане на умения в реални ситуации.

Отдалеченото обучение може да доведе до загуба на мотивация и ангажираност, особено ако студентите се чувстват изолирани. Именно тук е ролята на преподавателите, които трябва да използват стратегии за поддържане на мотивацията на студентите, предоставяйки структурирано и интересно учебно съдържание и стимулирайки взаимодействието между участниците.

Предизвикателство пред дистанционното обучение също така е сигурността и защитата на личните данни. Със завишените изисквания за онлайн обучение се налага и по-голямо внимание към сигурността и защитата на личните данни. Университетите трябва да гарантират сигурността на платформите за обучение и да защитават личната информация на студентите.

Въпреки че дистанционното обучение предоставя гъвкавост и достъпност, предизвикателство се крие и в поддържането на високото качество на образованието. Необходимо е да се гарантира, че студентите получават същата степен на обучение и подготовка, както и при традиционните модели на образование.

Заклучение

Дистанционното обучение във висшето образование представлява не само модерен метод на обучение, но и цялостен подход към преобразяване на образователната среда. С гъвкавостта, технологичните иновации и фокуса върху индивидуалните нужди, този модел на обучение дава възможност за развитие и растеж както на студентите, така и на образователните институции. Със своите многостранни перспективи и възможности, дистанционното обучение ще продължи да формира бъдещето на висшето образование. Предизвикателствата пред дистанционното обучение във висшето образование налагат необходимостта от интегриране на стратегии и решения, които да адресират тези проблеми. Важно е да се поддържа баланс между гъвкавостта и високото качество на образованието, за да се осигури успешно и ефективно обучение за всички студенти.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Baum, S., & McPherson, M. (2019). The Human Factor: The Promise & Limits of Online Education. *Daedalus*, 148(4), 235–254. <https://www.jstor.org/stable/48563401>
2. Getova, A., Karageorgieva, A., Mineva, S., Angelova-Igova, B. i dr. (2020) Problemi i predizvikatelstvata pred distantsionnoto obuchenie po vreme na izvanredno polozhenie //http://phls.uni-sofia.bg/documents/articles/3052/DOKLAD_Prouchvane-na-distancionnoto-oburchenie-v-SU_2020.pdf
3. Hodges, C., et al. (2020). The Difference Between Emergency Remote Teaching and Online Learning. *Educause Review*, 27.
4. Ivanov, I. (2014). Problemi na onlayn otsenyavaneto, Peta natsionalna konferentsia po elektronnoto obuchenie vav visshite uchilishta, Sbornik dokladi, Ruse, 295-301.

5. Jayaratne, K. S. U., & Moore, G. (2017). Perceptions of College Students toward Online Classes: Implications for Teaching Online. *NACTA Journal*, 61(4), 304–309. <https://www.jstor.org/stable/90021479>.

6. Shopova, V., Dimitrov, I., Garov, K. (2020). Vazmozhnosti na elektronnoto obuchenie// *Yubileyna mezhdunarodna nauchna konferentsia „Sinergetika i refleksia v obuchenieto po matematika“*, 16-18 oktombri 2020 g., Pamporovo, Bulgaria, 293-300.

7. Stoyanova, V. (2020). Neprisastveno elektronno bazirano obuchenie - vazmozhnosti i problemi. *Ikonomicheska nauka, obrazovanie i realna ikonomika: razvitie i vzaimodeystvia v digitalnata epoha* : Sbornik s dokladi ot Yubileyna mezhdunarodna nauchna konferentsia v chest na 100-god. ot osnovavaneto na IU - Varna : T. 4, Varna : Nauka i ikonomika, 4, 449-459. Third Way. (2020). *Higher Education – Online Discussion Board*. Third Way. <http://www.jstor.org/stable/resrep41727>.

8. Varkonyi, I. (2017). E-learning – Online Education and Professional Development. *Defense Transportation Journal*, 73(1), 27–30. <https://www.jstor.org/stable/26389149>

FROM THEORETICAL KNOWLEDGE TO PRACTICAL APPLICATION: FINANCIAL LITERACY IN THE BULGARIAN SCHOOL

Chief Assistant dr. Manya Maneva

*Department for Information and In-Service Teacher Training, Trakia University, Stara Zagora,
Bulgaria*

Abstract: *Financial literacy is essential for preparing students to manage their personal finances responsibly and to develop skills that are useful throughout life. The purpose of this article is to demonstrate how financial education can be integrated into the teaching of mathematics, which is a basic science. Early financial education prepares students for the realities of working life, including paying taxes and making investments. This integration of financial education into mathematics not only increases students' financial literacy, but also strengthens their analytical skills, which are essential for successful personal finance management.*

Keywords: *Literacy; Numeracy; Financial literacy; PISA*

JEL code: *I210*

ОТ ТЕОРЕТИЧНИ ЗНАНИЯ ДО ПРАКТИЧЕСКО ПРИЛОЖЕНИЕ: ФИНАНСОВАТА ГРАМОТНОСТ В БЪЛГАРСКОТО УЧИЛИЩЕ

Гл. ас. д-р Маня Манева

*Департамент за информация и повишаване квалификацията на учителите, Тракийски
университет, Стара Загора, България*

ВЪВЕДЕНИЕ

През последните десетилетия се наблюдава увеличаващ се интерес към финансовата грамотност на населението, тъй като тя играе ключова роля в икономическото развитие и подобряването на жизнения стандарт.

Финансовата грамотност е свързана с разбирането и управлението на личните финанси. Тя включва „познаване и разбиране на финансови концепции и свързаните с тях рискове, уменията, мотивацията и увереността да се прилага това знание и разбиране при вземането на ефективни решения в контекста на широк спектър от финансови концепции, с цел подобряване на финансовото благосъстояние на отделни хора и на обществото като цяло, както и осигуряване на активно участие в икономическия живот.“ (ЦОПУО, 2024).

МЕТОДОЛОГИЯ

Изследователският проблем е насочен към разглеждането на финансовата грамотност с акцент върху нейната същност и проявления, анализирани през призмата на учебните програми по математика в българското училище. Основният фокус е върху възможностите за интеграция на математическите знания с финансовите концепции и умения, както и върху методите за решаване на задачи, които комбинират математическа логика и реални финансови казуси. Ключов аспект от анализа е как тези задачи допринасят за развитието на важни умения у учениците, включително критично мислене, умения за вземане на решения и финансова отговорност, които са от съществено значение за тяхното бъдещо личностно и професионално развитие.

Изследването включва кратък анализ на представянето на българските ученици в международното оценяване PISA, със специално внимание към техните резултати в областта на финансовата грамотност. Целта е да се идентифицират факторите, оказващи влияние върху резултатите, както и да се оцени как българската образователна система подготвя учениците за справяне с реални финансови предизвикателства. Това включва оценка на степента, до която учебните програми по математика способстват за изграждането на практически финансови умения и идентифициране на области за подобрене, които биха могли да повишат нивото на финансова грамотност сред младите хора в България.

РЕЗУЛТАТИ

Направеното проучване на различни източници показва, че финансовото образование оказва значително влияние върху финансовото поведение на младите хора. Mandell и Klein (Mandell & Klein, 2009) отбелязват, че „учениците, които са преминали през програми за финансово образование, показват по-добри финансови навици в сравнение с тези, които не са“. Това подчертава необходимостта от интегриране на финансово образование в учебните програми.

Според Atkinson и Messy (Atkinson & Messy, 2012), „измерването на финансовата грамотност е ключово за оценка на успеха на образователните програми“. Тези изследвания предоставят основа за разработване на ефективни учебни програми, които да отговорят на нуждите на учениците.

Въпреки напредъка, предизвикателствата остават. Remund (Remund, 2010) подчертава, че „необходимостта от ясна дефиниция на финансовата грамотност е от съществено значение, за да се справим с нарастващата сложност на икономическата среда“. Brown, Collins и Schmeiser (Brown, Collins, & Schmeiser, 2014) изследват как държавно наложено финансово образование влияе на кредитното поведение на младите хора като посочват, че „държавните програми за финансово образование могат да имат положителен ефект върху финансовото поведение на младите хора“.

Българските ученици показват разнообразни резултати в областта на финансовата грамотност, което е отразено в участието им в международното оценяване PISA.

Според доклада на OECD от 2018 г., финансовата грамотност на българските ученици е под средното ниво на страните, участващи в оценяването. Въпреки че учениците демонстрират основни познания по финансови концепции, те често срещат трудности при прилагането на тези знания в реални ситуации. Според резултатите от PISA 2018, българските ученици показват значителни различия в нивото на финансова грамотност. Докладът подчертава, че „само 29% от българските ученици са способни да решават сложни финансови задачи, докато средният процент за страните от ОИСР е 37%“ (OECD, 2018). Тези данни показват, че българските ученици имат нужда от допълнителна подкрепа и ресурси, за да развият своите умения в областта на финансите.

Според резултатите от PISA 2022 (ЦОПУО, 2024) на българските ученици не достигат почти 70 точки до средния праг по финансова грамотност, нареждайки се наравно с ученици от Малайзия, Саудитска Арабия и Бразилия, и оставайки значително по-ниско от водещите държави като Дания, Белгия и Канада.

Малко под 30% от учениците в България са запознати с термини като обменен курс и сложна лихва, докато около половината от тях имат знания за надница и

бюджет. Според учителите, проблемите с финансовата грамотност започват още в началните класове. Учебната програма по математика не осигурява достатъчно плавно надграждане на знанията, което води до трудности при усвояването на по-сложни концепции, тъй като понятието „лихва“ се изучава в 5.клас, развива и надгражда в 7.клас и 10.клас. Според учители финансовата грамотност трябва да бъде въведена по-рано и с по-подробно съдържание, за да се изградят стабилни основи (Нова ТВ, 2024)

В последната промяна на учебните програми, в сила от учебната 2024/2025 година, изучаването на понятието „лихва“ ще е в 7.клас вместо в 5.клас. Това може да носи следните рискове:

- учениците, които не се запознават с основни финансови понятия като лихва на по-ранен етап, могат да имат по-малко време и възможности да развият необходимите умения и разбиране за управлението на пари, кредити и спестявания.

- учениците в 5. клас са по-любопитни и възприемчиви към нови знания. Ако понятието „лихва“ бъде въведено по-късно, може да се пропусне възможността да се използва този естествен интерес за изграждане на основни финансови умения.

- учениците, които имат достъп до допълнителни извънкласни дейности или са от семейства с по-висока финансова култура, могат да запълнят тази празнина по-рано. Това може да увеличи неравенството между различните ученици.

- прехвърлянето на учебно съдържание в 7. клас може да доведе до натрупване на повече нови понятия и умения за усвояване в един клас. Това може да натовари учениците и да намали времето, което те могат да отделят за овладяване на всяко понятие в дълбочина още повече предстоящото НВО в края на годината и амбициите на родителите.

- ако учениците се запознаят с понятието „лихва“ по-късно, те може да изпитват трудности при справяне с практически финансови ситуации като спестяване, разходване на джобни пари или разбиране на основни банкови продукти, което може да ги постави в неизгодно положение в реалния живот.

Резултатите от PISA 2022 (ЦОПУО, 2024) показват, че българските ученици са на второ ниво от пет, което е значително под средните стойности за ОИСР. Изследователите подчертават, че семейната среда също играе роля; децата от победни семейства са по-уязвими на финансови рискове. По отношение на обсъждането на финансови въпроси с родителите, 85% от учениците съобщават, че редовно говорят с родителите си за пари. Учениците, които обсъждат финансови въпроси, показват по-добри резултати в тестовете за финансова грамотност, с разлика от 35 точки в сравнение с тези, които не го правят.

„Българските ученици съобщават, че през предходните 12 месеца са учили в училище за надница (46,9%), бюджет (54,4%), предприемачество (49,8%), банков заем (48,5%) и все още знаят какво означават тези термини. По-малко съобщават, че са учили за обменен курс (28,6%) и сложна лихва (26,4%). Учениците, които съобщават, че са научили и все още знаят термини, свързани с финансите, като изплащане на лихва (39,2%), възвръщаемост на инвестицията, дебитна карта, бюджет, надница или предприемач, изпреварват учениците, които не са научили тези термини, с поне 8 точки след отчитане на характеристиките на учениците и училищата, както и на резултатите на учениците по математика и четене.“ (ЦОПУО, 2024)

Ето задача по финансова грамотност, включена в изследванията на PISA през

2012 г. и 2018 г. към 15-годишните ученици (Тодорова, 2024):

Задача: Ан е на почивка в страна, наречена Farway, но обикновено живее в Zedland. Паричната единица в Zedland е ZED. Паричната единица във Farway е FAD. По време на празника обменният курс е $1 \text{ ZED} = 25 \text{ FAD}$.

Ан се нуждае от 200 FAD, за да си купи храна. Ако тя обмени някои от своите ZED, обменното бюро ще приложи 3% комисионна. Ако изтегли FAD от банкомат във Farway, нейната банка ще ѝ начисли фиксирана такса от 2 ZED.

Да обмени ли Ан своите ZED или да изтегли FAD от банкомат?

Задачата е свързана с реална житейска ситуация, в която учениците трябва да приложат математически знания и умения за решаване на проблеми, свързани с управление на лични финанси. Тя изисква от тях да анализират информация, да извършват изчисления и да вземат информирано решение, тъй като:

- трябва да се определят количествата, свързани с паричните единици (ZED и FAD) и необходимите средства за покупка на храна. Учениците трябва да изчислят колко ZED са необходими, за да получат 200 FAD, и какви разходи ще имат при обмяна на валута и теглене от банкомат.

- разглеждат се различните разходи, свързани с обмяната на валута и тегленето от банкомат, включително комисионни и такси. Затова учениците трябва да анализират как различните такси и курсове влияят на общите разходи и да сравнят вариантите.

- моделира се ситуация, свързана с финансови разходи и се прави избор на база на изчисленията. Учениците трябва да използват математически знания, за да моделират и решат проблема като вземат предвид различни условия и разходи.

Същевременно задачи, свързани с финансовата грамотност, присъстват и на националното външно оценяване по математика (НВО) в края на 7. клас и 10. клас. Такива са например задачите, свързани с изчисляването на проста или сложна лихва, които притежават специфично икономическо съдържание, което е от съществено значение относно определянето на посоката на инвестиране на ресурси, например:

– задача 7 от НВО 2020 година за 7. клас (МОН – НВО, 2020)

7. През ноември цената на лаптоп била 1049 лв. За Коледа цената му била намалена с 10% от нея, а през януари била увеличена с 20% от новата цена. Цената на лаптопа (в лв.) след двете промени се изчислява с помощта на израза:

- А) $1049 - 0,10$
- Б) $1049 + 0,20 \cdot 1049$
- В) $1049 + (0,20 - 0,10) \cdot 1049$
- Г) $1,20 \cdot (0,90 \cdot 1049)$

– задача 10 от НВО 2024 година за 10. клас (МОН – НВО, 2024)

10. Цената на стока се увеличава с един и същ процент в две последователни години, така че от 1 лв. цената ѝ в края на втората година се повишава на 1,44 лв. Годишният процент на увеличение на цената е:

- А) 15%
- Б) 20%
- В) 22%
- Г) 44%

Именно заради представените по-горе задачи може да се твърди, че в контекста на образованието, предметът математика предлага най-подходящата основа за развитие на финансовата грамотност сред учениците. Чрез изучаване на

математически понятия и концепции учениците могат да придобият умения за планиране на лични финанси и семейни бюджети, оптимизиране на съотношението между спестявания и разходи, оценка на рисковете и вземане на информирани решения при инвестиране на средства и използване на различни финансови продукти.

По време на училищното си обучение учениците се запознават с основни финансови понятия и явления, прилагайки математически знания за извършване на изчисления. По този начин училището подготвя учениците за активен живот в пазарна среда и нови икономически отношения.

Значението на задачите, включващи елементи на финансова грамотност, е, че те демонстрират практическото приложение на математиката, което мотивира и активизира учениците в учебния процес, развива техните умения за работа с информация. При решаване на проблеми с икономическо съдържание, учениците се сблъскват с предизвикателството на алтернативния избор, който не само трябва да бъде изчислен, но и аргументиран. Този процес насърчава учениците да учат и да се самоусъвършенстват, създавайки интерес към реалностите извън училищния живот.

ПРИМЕРИ ЗА ЗАДАЧИ, ФОРМИРАЩИ ФИНАНСОВА ГРАМОТНОСТ В УЧЕНИЦИТЕ ПО ЕТАПИ НА ОБРАЗОВАНИЕТО

Начален етап – завършвайки етапа, учениците би трябвало да умеят да решават задачи от следния вид:

Задача 1: Иван трябва да закупи книга на стойност 25 лв., три химикалки за 8 лв. и четири тетрадки за 12 лв. Той разполага с три банкноти от по 10 лева и една банкнота от 20 лева. Има ли Иван достатъчно пари да заплати за покупката и колко ресто трябва да получи от продавача.

Прогимназиален етап – в 5. клас учениците изучават понятието процент и основните задачи, свързани с него. Примери за задачи с проценти, които формират финансова грамотност в учениците, са:

Пример 1: През юли цената на гроздето е 6 лв. за килограм. През август цената намалява с 20%, през септември е намалена допълнително с 5%, а през октомври гроздето поскъпва с 25%. Колко ще плати купувачът за 3 kg грозде на 15 октомври?

За решаването на този вид задачи учениците трябва да знаят и да разбират понятието процент, да изчислят намалението и увеличението на цената и да приложат тези промени към първоначалната цена, за да получат крайната цена на 15 октомври.

Пример 2: Георги желае да закупи ролери на стойност 190 лв. За да спести необходимата сума, той решава да отделя по 30 лв. всеки месец. Родителите му предлагат да вложат в банка за половин година сумата, която той би спестил за 6 месеца. Годишната лихва на банката е 12%.

а) Колко време ще отнеме на Георги да спести необходимата сума, ако спестява в касичката?

б) Каква сума ще натрупа Георги, ако приеме предложението на родителите си?

в) Коя от двете стратегии (спестяване в касичката или вложение в банката) ще доведе до по-бързо закупуване на ролерите? Обосновете отговора си.

Когато се решава тази задача е препоръчително да се създаде следната таблица:

Таблица 1

Решение на Пример 2 а)

Месец	В касичка
1	30
2	60
....
5	150
6	180
7	210

Източник на Таблица 1: авторът

Учениците трябва да достигнат до извода, че Георги ще разполага със 190 лв. през седмия месец на спестяване.

При решаването на б) учениците трябва да съобразят, че ако родителите на Георги вложат сумата от 180 лв. в банка за половин година при годишна лихва от 12%, то крайната сума след изтичането на срока:

$$\text{Крайна сума} = \text{Начална сума} + \text{Лихва} = 180 + 10,80 = 190,80 \text{ лв.}$$

Тази сума е достатъчна за закупуването на ролерите веднага след изтичането на срока от 6 месеца.

Сравнявайки двете стратегии, учениците трябва да достигнат до извода, че вложението в банката ще доведе до по-бързо осъществяване на покупката на ролерите. Георги ще може да закупи ролерите след 6 месеца, докато при спестяването в касичката той ще се нуждае от 7 месеца. Следователно, предложението на родителите му за вложение в банката е по-изгодно и ефективно решение за постигане на финансовата му цел.

Пример 3: Цената на кафемашина е увеличена първо с 10%, след това със 120 лв. и накрая с още 5%. Каква е първоначалната цена на кафемашината, ако полученото увеличение е 31,25%?

Решение. Нека първоначалната цена на кафемашината е x лв.

След първото увеличение цената е $1,1x$ лв.

Увеличението на тази цена е със 120 лв. Тогава новата цена е $1,1x + 120$ лв.

Последното увеличение от 5% води до нова цена на продукта $(1,1x + 120) \cdot 1,05$ лв.,

която според условието е увеличаване на първоначалната цена с 31,25%.

Получаваме уравнението: $1,3125x = (1,1x + 120) \cdot 1,05$;

$$0,1575x = 126;$$

$$x = 800.$$

Отговор: Цената на кафемашината е 800 лв.

Подобни задачи са от съществено значение за развитието на изчислителните умения на учениците като същевременно им помагат да усъвършенстват работата с таблици и да придобият по-задълбочено разбиране и прилагане на понятието „лихва“ и „процент“.

Само след като учениците се запознаят с новите понятия, могат да осъзнаят причините за възникване на несъответствия. Например, ако числото x се увеличи с

числото y и след това полученият резултат се намали с y , крайният резултат отново ще бъде x . В контекста на процентите обаче, ако числото x се увеличи с 10% и след това резултатът се намали с 10%, крайният резултат ще бъде $0,99x$, а не x .

В 7. клас формирането на финансовата грамотност продължава като акцентът се поставя върху решаването на задачи, свързани с понятието сложна лихва.

Пример 4: Вложител депозира X лв. в банка. Банката се задължава да начислява по сметката му в края на всяка година $y\%$ от дохода, получен от сумата на депозита, която е била налична по сметката през текущата година. Каква сума ще бъде налична в сметката на вложителя в края на втората година?

Решение: В края на първата година сумата на депозита X лв. ще се увеличи с $X \cdot \frac{y}{100}$ лв. и ще бъде

$$Z = X + X \cdot \frac{y}{100} = X \left(1 + \frac{y}{100}\right) \text{ лв.}$$

В края на втората година сумата на депозита ще се увеличи с още $y\%$ и ще бъде

$$Z \left(1 + \frac{y}{100}\right) = X \left(1 + \frac{y}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{y}{100}\right) = X \cdot \left(1 + \frac{y}{100}\right)^2 \text{ лв.}$$

По този начин в резултат на търсенето на решение на този проблем, учениците от 7. клас достигат до формулата за сложна лихва.

В 7. клас учениците имат на разположение разнообразие от задачи, които могат да решават и да развиват своята математическа и финансова грамотност, тъй като вече са им познати понятията лихва, сложна лихва, пропорция, процент.

Ето някои примери за такива задачи:

Пример 5: Цената на мобилен телефон е 2300 лв. Използвайки кредитен калкулатор на уебсайта на магазина, Мария изчислила, че ще закупи телефона на кредит при 20% лихва за срок от 2 години. Колко ще надплати Мария, ако закупи телефона на изплащане?

Пример 6: Попълнете празните места в решението на задачата.

Футболистът получава заплата от 1 500 000 лв. за година. Данъкът върху дохода е 10%. След плащане на данъка, 5% от останалата сума се изплаща на агента на играча, 27 000 лв. са за глоба за неспортсменско поведение на терена и 20 000 лв. са за глоба за нарушаване на спортния режим. С останалите пари футболистът купува долари на цена от 1,78 лв. за 1 долар. Колко долара е купил футболистът?

Решение.

- 1) Футболистът плаща лв. данък и остават лв.
- 2) Платената сума на агента е лв. Остават му лв.
- 3) Платените глоби са общо лв.. Остават лв.
- 4) Купените долари са

Отговор: долари

Гимназиален етап – в 10. клас в образователния процес по математика се предоставя отлична възможност за актуализиране на знанията по темата и демонстриране на практическата насоченост, свързана с финансовата грамотност, при изучаване на системи линейни уравнения и прогресии.

На десетокласниците могат да се предложат следните задачи за решаване:

Пример 7: Банка предлага ипотечен кредит за закупуване на апартамент като обезпечението за кредита е самият апартамент. Периодът на погасяване е 25 години, а годишната лихва е 8%. Според условията на кредита, кредитополучателят трябва

да извърши плащане през първата година, което включва $\frac{1}{25}$ от основната сума на кредита и 8% лихва върху целия размер на кредита. През всяка следваща година, плащането включва $\frac{1}{25}$ от основната сума и 8% лихва върху оставащата непогасена част от кредита. Лихвата се преизчислява всяка година спрямо новата остатъчна сума.

Определете колко пъти общата сума, която кредитополучателят ще изплати на банката за целия 25-годишен период, надвишава първоначалния размер на кредита. Предсрочното погасяване на кредита не е разрешено според условията на банката.

Решение:

Нека размерът на ипотечният кредит е A лв. По етапно се попълва следната таблица по колони и редове:

Таблица 2

Решение на пример 7

Година	Част от основната сума	Лихва	Общо
Първа	$\frac{1}{25}A$	$0,08A$	$\frac{1}{25}A + 0,08A$
Втора	$\frac{1}{25}A$	$0,08 \cdot \frac{24}{25}A$	$\frac{1}{25}A + 0,08 \cdot \frac{24}{25}A$
Трета	$\frac{1}{25}A$	$0,08 \cdot \frac{23}{25}A$	$\frac{1}{25}A + 0,08 \cdot \frac{23}{25}A$
.....			
25-та	$\frac{1}{25}A$	$0,08 \cdot \frac{1}{25}A$	$\frac{1}{25}A + 0,08 \cdot \frac{1}{25}A$

Източник на Таблица 2: авторът

Сумата за връщане е:

$$25 \cdot \frac{1}{25}A + 0,08A \left(1 + \frac{24}{25} + \frac{23}{25} + \dots + \frac{1}{25} \right) = A \left(1 + 0,08 \cdot \left(\frac{1 + 2 + 3 + \dots + 25}{25} \right) \right) =$$

$$= A(1 + 0,08 \cdot 13) = 2,04A,$$

т.е. общата сума, която ще се върне, е 2,04 пъти повече от първоначално отпуснатата от банката като кредит.

Друг пример е следната задача:

Пример 8: Семейният бюджет се формира от заплатите на съпруга и съпругата, както и от стипендията на тяхната дъщеря, която е 240 лв. на месец. Ако заплатата на съпруга бъде удвоена, а заплатата на съпругата и стипендията на дъщерята останат непроменени, семейният бюджет ще нарасне с 50%. Ако обаче заплатата на съпруга се удвои, заплатата на съпругата се намали с 40%, а стипендията на дъщерята остане същата, семейният бюджет ще нарасне с 32,5%. Колко лева е общият семеен бюджет.

За решаването на разглежданата задача са необходими познания и развити умения за съставяне и решаване на уравнения чрез обозначаване на заплатите на съпруга и съпругата с променливи. Успоредно с това, се изискват умения за работа с проценти, което предполага разбиране на понятията процентно увеличение и намаление и прилагането им към конкретни ситуации.

Заклучение

Финансовата грамотност е от съществено значение в съвременния свят, където всеки ден се изправяме пред различни финансови решения, които могат да имат дългосрочни последици върху нашето благосъстояние. Независимо дали става въпрос за управлението на личните спестявания, планирането на семейния бюджет, вземането на кредити или избора на инвестиции, финансовата грамотност предоставя инструменти и знания, необходими за успешно справяне с тези предизвикателства.

Затова инвестирането във финансово образование и развитие на математическите умения е от първостепенно значение за всеки човек. Необходимо е още от ранна възраст да се набляга на финансовото обучение, за да се гарантира, че младите хора ще пораснат с необходимите умения и знания, за да се справят успешно с финансовите предизвикателства на живота. Освен това, продължаващото финансово образование през целия живот е от съществено значение, тъй като финансовите пазари и продукти постоянно се развиват и изискват актуални познания за ефективно управление.

В днешния свят, където финансовата информация е широко достъпна, но често трудна за разбиране, наличието на финансова грамотност може да направи разликата между финансов успех и провал. Затова всеки човек трябва да се стреми към подобряване на своята финансова грамотност, като непрекъснато развива своите знания и умения в областта на финансите. Това ще му позволи не само да избегне финансови капани, но и да се възползва от възможностите, които животът предлага, за постигане на дългосрочен финансов просперитет.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. MON, (2020). Natsionalno vanshno otsenyavane po matematika v kraja na 7.klas, https://www.mon.bg/nfs/2020/06/nvo-viikl-math_17062020.pdf

2. MON, (2024). Natsionalno vanshno otsenyavane po matematika v kraja na 10.klas, https://www.mon.bg/nfs/2024/06/nvo_10kl_math_12062024.pdf

3. NOVA TV, (2024). Uchenitsite u nas sa pod srednoto nivo po finansova gramotnost,

<https://nova.bg/news/view/2024/06/27/461145/%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%86%D0%B8%D1%82%D0%B5-%D1%83-%D0%BD%D0%B0%D1%81-%D1%81%D0%B0-%D0%BF%D0%BE%D0%B4-%D1%81%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BD%D0%BE%D1%82%D0%BE-%D0%BD%D0%B8%D0%B2%D0%BE-%D0%BF%D0%BE-%D1%84%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BD%D1%81%D0%BE%D0%B2%D0%B0-%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%BE%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82/>

4. Todorova, N. (2024). 8 finansovi zadachi, s koito otsenyavat 15-godishnite, <https://financialliteracy.thelittlechef.bg/8-%d1%84%d0%b8%d0%bd%d0%b0%d0%bd%d1%81%d0%be%d0%b2%d0%b8-%d0%b7%d0%b0%d0%b4%d0%b0%d1%87%d0%b8-%d1%81-%d0%ba%d0%be%d0%b8%d1%82%d0%be-%d0%be%d1%86%d0%b5%d0%bd%d1%8f%d0%b2%d0%b0%d1%82-15-%d0%b3%d0%be/>

5. TSOPUO, (2024). Doklad za finansovata gramotnost na uchenitsite v Bulgaria. Sofia: Tsentar za otsenyavane v preduchilishtnoto i uchilishtnoto obrazovanie.
6. Atkinson, A., & Messy, F. A. (2012). Measuring Financial Literacy: Results of the OECD / International Network on Financial Education (INFE) Pilot Study. OECD Working Papers on Finance, Insurance and Private Pensions, No. 15.
7. Brown, M., Collins, J. M., & Schmeiser, M. D. (2014). State Mandated Financial Education and the Credit Behavior of Young Adults. Federal Reserve Bank of Chicago Working Paper Series, WP 2014-07.
8. Mandell, L., & Klein, L. S. (2009). The Impact of Financial Literacy Education on Subsequent Financial Behavior. *Journal of Financial Counseling and Planning*, 20(1), 15-24.
9. OECD, (2018). PISA 2018 Results (Volume III): What Students Know and Can Do. Paris: OECD Publishing.
10. Remund, D. L. (2010). Financial Literacy Explicated: The Case for a Clearer Definition in an Increasingly Complex Economy. *Journal of Consumer Affairs*, 44(2), 276-295.

APPLICATION OF THE MATHEMATICAL OPTIMIZATION MODEL IN THE VARIOUS SECTORS OF THE ECONOMY

Assist. eng. Julieta Mihaylova, PhD
Technical University - Varna, Bulgaria

Abstract: One of the popular definitions of economics as a science is that it studies human behaviour as a relationship between objectives and scarce resources which have alternative uses. This paper proposes that the suitable formal method for such a research is mathematical optimization. Examples from different sectors of the economy are considered. It may be concluded that mathematical optimization is fundamental to economic theory.

Keywords: Mathematical Optimization; Economics; Economic Sectors

JEL code: C65

ВЪЗМОЖНОСТИ ЗА ПРИЛАГАНЕ НА МОДЕЛА НА МАТЕМАТИЧЕСКОТО ОПТИМИРАНЕ В РАЗЛИЧНИТЕ СЕКТОРИ НА ИКОНОМИКАТА

Ас. д-р инж. Жулиета Михайлова
Технически университет – Варна, България

Въведение

Едно от популярните определения за икономиката като наука е, че тя изследва човешкото поведение като връзка между целите и оскъдните средства, които имат алтернативна употреба (Robbins, 1945). Предполага се, че изборът между няколко алтернативи е рационален. Понятието рационален едва ли може да бъде определено точно, но интуитивно може да се твърди, че рационалният избор е най-добрият възможен избор. При това е възможно да съществуват различни критерии за „най-добър“. Ако приемем, че „най-добро“ решение и оптимално решение съобразно даден критерий са синоними, то можем да кажем, че икономиката като наука се занимава с намиране на оптимални решения.

През XX век е разработена в основни линии теорията на математическото оптимизиране. Общият вид на задачата на математическото оптимизиране е: Да се намери минимумът (или максимумът) на функцията (Bradley, Nax, & Madnanti, 1977):

$$z = f_0(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

при ограничения:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_2 \\ &\dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_m \end{aligned} \quad (2)$$

В някои случаи могат да се добавят и ограниченията:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (3)$$

В задачата на математическото оптимизиране ясно се разграничават следните елементи:

- критерии за оптималност - функцията (1);
- ограничения – неравенствата (2) и (3).

Към момента не съществува ефективен алгоритъм за решаване на общата задача на математическото оптимизиране. Решени са няколко частни задачи, между които:

1. Задачата на линейното оптимизиране. При нея функциите $f_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ..., $f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ са линейни. Решима е и задачата, в която допълнително са въведени изисквания за целочисленост на всички или на някои от променливите.
2. Задачата на квадратичното оптимизиране. При нея функцията $f_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е квадратична форма, а функциите в ограниченията (2) са линейни.

Целта на настоящия доклад е да систематизира приложенията на този абстрактен модел в различни сектори на реалната икономика. Математическото оптимизиране се разглежда като обща методология, подпомагаща рационалния избор между няколко алтернативи.

Приема се класификационната схема, при която икономиката се разделя на три сектора (Fisher, 1939), (Clark, 1960):

- първичен (добив на суровини);
- вторичен (производство на крайни продукти);
- третичен (сектор на услугите).

В последните години от третичния сектор се отделя т.нар. икономика базирана на знанието. За целите на настоящето изследване такова разделяне не е необходимо.

Оптимизационни модели в първичния сектор на икономиката

Първичният сектор на икономиката включва добиването на суровини. В това число влиза продукцията на добивната промишленост, на селското стопанство, рибарство и други. Като правило първичният сектор осигурява суровини и полуфабрикати за вторичния сектор на икономиката. В някои случаи съществува директната връзка между производителите от първичния сектор и крайните потребители (например част от селскостопанската продукция).

Производството на селскостопанска продукция се характеризира със сезонност на заетостта. Това създава условия за изоставащо развитие на регионите, които са ориентирани към производството на такава. За повишаване на качеството на живот на населението в тези региони е необходимо осигуряване на постоянна заетост (включително чрез осигуряване на нови работни места в неактивните селскостопански периоди). Неравномерната заетост на работната сила може да се преодолее като част от земеделската земя се задели за технически култури, които изискват разходи на труд в неактивния сезон. Задачата може да се реши чрез прилагане на метода на линейното оптимизиране (Yudin & Golshteyn, 1969).

Една от най-широко разпространените задачи е задачата за съставяне на оптимални хранителна дажба. Селскостопанските животни ежедневно се нуждаят от минимални количества различни хранителни вещества – белтъчини, въглехидрати, мазнини, минерали и витамини. Различните типове фуражи съдържат различни

количества от тези хранителни вещества и имат различна цена. Задачата се свежда до смесване на фуражите в такива пропорции, че да се осигурят необходимите хранителни вещества при минимална стойност на сместа. Независимо от своята простота при решаване на тази задача могат да се появят подводни камъни. На първо място, е необходимо да се отчитат предпочитанията на животните. На второ място, при затваряне на цикъла на селскостопанското производство е необходимо да се има предвид и възможността за използване (или утилизиране) на отпадъчния продукт при храненето – естествената тор (Gass, 1970).

Проблем свързан със задачата за съставяне на оптимална хранителна дажба е задачата за разпределение на посевните площи за производство на различни типове фуражи. В зависимост от категорията на земята и химичния състав на почвата различните терени са благоприятни за развитието на едни или други земеделски култури. За съставяне на рационалната дажба, както беше посочено по-горе, е необходимо определено съотношение на различни фуражи. При оптимално разпределение на посевните площи за различни култури чрез използване на метода на линейното оптимизиране се максимизират средните добиви от единица площ.

В селското стопанство сериозно влияние оказва изменението на климата. Необходимо е вземане на решение относно възможностите за адаптиране и избора на алтернативи за смекчаване на последствията. За оценка на икономическите аспекти на тези въпроси се използват методите на математическото оптимизиране (McCarl & Fei, 23).

Може да се отбележи използването на методите на линейното оптимизиране в миннодобивната промишленост. При изготвяне на график за изпълнение на минните дейности се прилагат моделите на смесеното целочислено програмиране (Khazaei & Puorrahimian, 2021). За осигуряване на необходимото качество на рудата (съдържание на химични елементи в определен диапазон) е необходимо планиране на добив от рудници или отделни участъци. Изготвянето на оптимален план за добива се извършва с решаване на задачата на линейното оптимизиране (Hristova, Pieva-Stoycheva, & Petkov, 2019).

Оптимизационни модели във вторичния сектор на икономиката

Вторичният сектор на икономиката включва предприятията, които произвеждат крайна, готова за потребление продукция или са ангажирани в строителството. При производството се използват суровини получени от първичния сектор или полуфабрикати, които са произведени от вторичния сектор, работна сила, енергия и т.н. Секторът потребява услуги генерирани от третичния сектор. Всички изброени по-горе са ресурси, които са неотрицателни и ограничени отгоре. Вземането на решение за това какво да се произвежда е избор от алтернативи при оскъдност на ресурсите и пряко кореспондира с предмета на икономиката като наука и с класическата задача на математическото оптимизиране. От това се определя широката възможност за прилагане на методите на математическото оптимизиране в сектора (Yudin & Golshteyn, 1969), (Gass, 1970).

Съществуват много частни задачи, които са предназначени за съставяне на оптимален план на производствения процес. Към тях спадат задачата за планиране на производството, при която се търси такова разпределение на наличните ресурси за производство на различни типове крайна продукция, че приходите да бъдат максимални.

В исторически план първият решена задача на линейното оптимизиране е задачата за разкрояване на материали (Kantorovich & Zalgaller, 1971). При нея критерият за оптималност е минимум на отпадъците при разкрояване. Трябва да се има предвид, че в зависимост от характера на разкроявания материал могат да се наложат модификации на задачата. Така например, при разкрояване на ролки целофан е забелязано, че изходният материал съдържа дефектни области, което налага корекция на плана в хода на неговото изпълнение (Gass, 1970).

Задачата за разкрояване на материали се разглежда в два варианта. При единия вариант се разкрояват еднакви линейни заготовки (например греди) на детайли с различна дължина. При втория вариант се разкрояват двумерни еднакви листове (например шперплат) на различни двумерни детайли.

Приложими в този сектор са и задачите за съставяне на шихти. Шихтата е смес от различни видове руди. В зависимост от съдържанието на химически елементи се получават различни сплави. За получаване на сплав с необходимите качества е нужно да се състави оптимална смес (шихта), като обикновено критерият е най-ниска себестойност. Задачата е подобна на тази за съставяне на дневна дажба. Обобщението на двете задачи е известно като задача за съставяне на оптимални смеси. В тази задача се проявява фундаменталният характер на линейното оптимизиране – една и съща математическа схема може да се използва при решаване на различни практически задачи в различни сектори на икономиката.

По подобен начин могат да се използват и други оптимизационни модели. Така например, задачата за разкрояване на линейни материали може да се използва при планиране на заетостта на машина при изпълнение на дейности с различна продължителност в рамките на еднакви работни дни. Дължината на работния ден съответства на дължината на заготовките, а времената за изпълнение на отделните дейности – на дължината на детайлите (Tokusheva, 2018).

Оптимизационни модели в третичния сектор на икономиката

Към третичния сектор се отнасят услуги като транспорт, търговия, финансови услуги, туризъм, образование и др.

В областта на транспорта е приложима транспортната задача на линейното оптимизиране. При нея са известни наличните количества продукти в определен брой изходни пунктове (производители, складове). Известни са и крайните пунктове (складове, магазини, крайни потребители), количествата от продукцията, които трябва да се доставят до всеки от тях, както и транспортните разходи за превоз между всеки от изходните и крайните пунктове. Задачата е да се направи такъв план за снабдяване на крайните пунктове, че всички потребности да са удовлетворени при минимални транспортни разходи.

Като пример за прилагане на линейното оптимизиране в областта на финансите може да е посочи построяването на инвестиционен портфейл в рамките на Модела за оценка на капиталовите активи/Capital Asset Pricing Model (МОКА/CAPM) (Watshasm & Parramore, 1997). Предполага се, че са известни очакваните доходи и мярката на систематичния риск за всеки актив. Необходимо е да се разпределят инвестициите във всеки актив така, че общият доход да бъде максимален и общият систематичен риск да не надвишава предварително зададена стойност. Приема се, че функцията на дохода е сума от произведенията на инвестицията в съответния актив и очакваната доходност, т.е. тя е линейна. Първото ограничение се изразява чрез

претеглената оценка на систематичния риск, която не бива да надвишава предварително зададената стойност (има вид на линейно неравенство). Второто ограничение изразява необходимостта всички средства да бъдат инвестирани, т.е. сумата от инвестициите в отделните активи да е равна на заделените средства (има вид на линейно уравнение). Така задачата се свежда до задачата на линейното оптимиране.

Друг подход при построяване на инвестиционен портфейл е минимизация на риска (Watshasm & Parramore, 1997). Общият риск се измерва чрез дисперсията. При пресмятане на общата дисперсия на няколко актива е необходимо да се отчита освен дисперсията на всеки актив и ковариацията между всеки две двойки потенциално участващи в портфейла активи. Дисперсията на портфейла в този случай ще се изрази чрез:

$$Z = W^T \Sigma W, \quad (4)$$

където:

$$W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_n \end{pmatrix} \text{ е вектор с инвестициите в отделните активи}$$

Σ е ковариационната матрица на отделните активи.

Изразът (4) може да се разглежда като целева функция, при която търсим минимум.

Общата доходност на портфейла може да се представи като сума от претеглените доходности на отделните активи. Желателно е тя да е не по-малка от предварително зададена стойност. По този начин се формира едно линейно ограничение.

Сумата от инвестициите в отделните активи трябва да бъде равна на планираните средства за инвестиции. Това формира второ линейно ограничение.

Изложеното до тук представлява класическа задача на квадратичното програмиране. Изразът (4) след преобразуване е квадратична функция. Посочените по-горе ограничения са линейни. Такива задачи могат да бъдат лесно решени.

Заклучение

Посочените примери показват, че моделите на математическото оптимиране могат да намерят приложение в различните сектори на икономиката. Формалният запис на целевата функция и ограниченията пряко кореспондира с основната задача на икономическата теория.

Задачата на математическото оптимиране, следователно, може да се разглежда като абстрактен модел на задачата на икономическата теория. Критерият за оптималност представя рационалния избор между няколко алтернативи. Ограниченията изразяват оскъдността на ресурсите и (в някои случаи) неотрицателната стойност на ресурсите.

Приложението на един и същ метод за решаване на различни типове задачи показва, че този метод има фундаментален характер. Следователно може да се направи изводът, че теорията на математическото оптимиране има фундаментално значение за икономическата теория.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Bradley, S. P., Hax, A. C., & Madnanti, T. L. (1977). *Applied Mathematical Programming*. Addison-Wesley.
2. Clark, C. (1960). *The Conditions of Economic Progress (3rd ed.)*. New York: Macmillan and Co.
3. Fisher, A. G. (1939). Production, Primary, Secondary and Tertiary. *The Economic Record*, 15(1), 24-38.
4. Gass, S. I. (1970). *An Illustrated Guide to Linear Programmig*. McGraw Hill Book Company.
5. Hristova, V., Ilieva-Stoycheva, K., & Petkov, M. (2019). An Economic and Mathematical Model for Determining Optimal Mining with Pre-determined Quality Indicators in a Mining Enterprise. *Journal of Mining and Geological Sciences*, 62(4), 77-79.
6. Kantorovich, L. V., & Zalgaller, V. A. (1971). *Ratsionalnyi raskroi promyshlennnykh materialov*. Novosibirsk: Nauka.
7. Khazaei, S., & Puorrahimian, Y. (2021). Mathematical Programming Application in Sublevel Caving Production Scheduling. *Mining*, 1(2), 180-191.
8. McCarl, B. A., & Fei, C. J. (2023). The Role and Use of Mathematical Programming in Agricultural, Natural Resource and Climate Change Analysis. *Annual Review of Resource Economics*, 15, 383-406.
9. Robbins, L. (1945). *An essay on the nature and significance of economic science (2nd ed.)*. London: Macmillan and Co.
10. Tokusheva, M. (2018). A Modification of the Linear Task of Cutting up Materials. *Izvestia Journal of the Union of Scientists - Varna*, 7(3), 161-167.
11. Watsham, T. J., & Parramore, K. (1997). *Quantitative Methods in Finance*. London: Thomson Learning.
12. Yudin, D. B., & Golshteyn, E. G. (1969). *Lineynoye Programirovaniye (Teoriya, Metody i Prilozheniya)*. Moskva: Nauka.

CREATING LINEAR MODELS OF ECONOMIC PROCESSES: MODELLING FUEL CONSUMPTION

Assist. eng. Julieta Mihaylova, PhD
Technical University - Varna, Bulgaria

Abstract: Mathematics is a fundamental discipline in higher education. It is essential that students are motivated and that their interest in the material is stimulated so that they can acquire the basic knowledge they need as fully as possible. In this paper, it is argued that presenting the material through practical examples that have applicable solutions would lead to increased student interest.

Keywords: System of Linear Equations; Approximation Method; Fuel Consumption

JEL code: C65

СЪЗДАВАНЕ НА ЛИНЕЙНИ МОДЕЛИ НА ИКОНОМИЧЕСКИ ПРОЦЕСИ: МОДЕЛИРАНЕ НА РАЗХОДА НА ГОРИВО

Ас. д-р инж. Жулиета Михайлова
Технически университет – Варна, България

Въведение

Математиката се разглежда като фундаментална наука, защото нейните модели намират приложение в различни области. За да се гарантира качествено висше образование е от изключително значение провежданото обучение по различните фундаментални дисциплини (Milkova, 2022). Всички фундаментални инструменти до голяма степен се отдалечават от конкретните приложни области и придобиват някакво ниво на абстрактност. Например, формулата $a = b \cdot c$ може да моделира различни процеси и явления. a , b и c са символи, които могат да заместват различни изказани на естествен език съждения като например:

<лицето на правоъгълник> = <дължината на основата> . <дължината на височината>;

<изминатият път> = <скорост на движение> . <времето за движение>.

Посочените два примера не изчерпват приложението на този елементарен алгебричен израз.

Абстракцията, следователно, води до универсалност на формалния израз, но увеличава дистанцията между практиката и теорията. Изучаването на математическата теория поради своята абстрактност затруднява възприемането и от студентите. Като резултат те губят мотивация и дори изграждат мнение, че тези знания не са необходими (Madzharova, 2022). Преодоляването на такива настроения може да се извърши чрез представяне на подходящи примери свързващи теоретичните знания с тяхното практическо приложение.

Употребата на математическите символи е подобна на употребата на думите. Математическите обозначения могат да се разглеждат като особен език със строго определени граматически правила, без никакви изключения. От тази гледна точка съставянето на математически израз прилича на превод от обикновен, естествен език на езика на математическите символи (Polya, 1957). Ако задачата бъде поднесена по

такъв начин, че нейното решаване да изисква такъв превод, тя убедително би показала полезността на теоретичните знания.

В настоящата разработка е направен опит за представяне на проблемите като практически ситуации, които могат да бъдат моделирани по начина изложен по-горе.

Моделиране чрез използване на системи линейни уравнения

Разглеждаме следната ситуация. Дадено лице притежава автомобил, с който извършва пътувания в градове и между тях. При шофирането собственикът забелязва, че при зареждане на едно и също количество гориво изминава различен брой километри. Съвсем логично той стига до заключението, че разходът на гориво е различен при шофиране по градски и извънградски пътища. Собственикът решава, че е полезно да знае какъв е разходът на автомобила при различни условия.

Предполага се, че е практически невъзможно да се проведе експеримент, при който резервоарът да бъде напълнен до горе и автомобилът да се движи само в градски или само в извънградски условия.

Пътуване в рамките на едно зареждане на гориво естествено може да бъде моделирано с уравнението:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, \quad (1)$$

където:

a_1 е пътът изминат в градски условия;

a_2 е пътът изминат извън града;

x_1 е разходът на гориво за единица път при шофиране в градски условия;

x_2 е разходът на гориво за единица път при шофиране в извънградски условия;

b е количеството изразходвано гориво.

Уравнението (1) е уравнение с две неизвестни, което означава, че има безброй решения. Практическа полза от него няма, но то е важно защото показва пътя на разсъжденията, който трябва да се следва, за да се стигне до практически полезно решение. Прилагайки знанията за системите линейни уравнения веднага се стига до извода, че е необходимо още едно такова уравнение. Прибавянето на второ уравнение води до система линейни уравнения от вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (2)$$

В тази система коефициентите a_{ij} представят изминатия път за i -тия преход и j -тото условие. Тук трябва да се подчертае, че е необходимо отношението между изминатите километри в градски и извънградски условия при двата прехода трябва да бъде различно. Ако отношението е едно и също, то системата няма единствено решение.

Пример 1. При преход от 19 километра в градски и 57 километра в извънградски условия са изразходвани 5,9 литра гориво. При преход от 20 километра в градски и 43 километра в извънградски условия са изразходвани 5,0 литра гориво. Да се определи разходът на гориво за 100 километра в градски и извънградски условия.

Използваме системата (2):

$$\begin{cases} 19x_1 + 57x_2 = 5,9 \\ 20x_1 + 43x_2 = 5,0 \end{cases}$$

Решението на системата е $x_1 \approx 0,0969$; $x_2 \approx 0,0712$. Трябва да се има предвид, че това е разход за един километър. За да се получи разход за 100 километра получените числа трябва да се умножат по 100. Така получаваме, че в градски условия разходът е 9,69 л/100 км., а в междуградски – 7,12 л/100 км.

Пример 2. При преход от 15 километра в градски и 44 километра в извънградски условия са изразходвани 5,75 литра гориво. При преход от 10 километра в градски и 23 километра в извънградски условия са изразходвани 3,2 литра гориво. Да се определи разходът на гориво за 100 километра в градски и извънградски условия.

Използваме системата (2):

$$\begin{cases} 15x_1 + 44x_2 = 5,75 \\ 10x_1 + 23x_2 = 3,2 \end{cases}$$

Решението на системата е $x_1 = 0,09$; $x_2 = 0,1$. Трябва да се има предвид, че това е разход за един километър. Получаваме, че в градски условия разходът е 9,0 л/100 км., а в междуградски – 10,0 л/100 км.

Решението на Пример 2 е вярно от абстрактно-математическа гледна точка, но противоречи на практическия опит. На всеки шофьор е известно, че консумацията на гориво в градски условия е по-голяма от консумацията в извънградски условия. Следователно примери като този биха довели до усещането за нещо неправилно, за грешка. Такъв пример не би спомогнал за повишаване на мотивацията на студентите.

Моделиране чрез апроксимация

Да допуснем, че собственикът на автомобила е отчитал движението при различни условия и разхода на гориво в повече от два прехода. Следвайки логиката на предишната задача можем да моделираме ситуацията със система от повече от две уравнения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m \end{cases}, \quad (3)$$

Такива системи се наричат предефинирани (Anton & Kaul, 2019). В общия случай предефинираната система няма решение. Записана в матричен вид предефинираната система има вида:

$$AX = B, \quad (4)$$

където:

A е матрицата от коефициентите пред неизвестните;

X е матрицата-стълб от неизвестните;

B е матрица-стълб от свободните членове;

Приблизително решение на предефинираната система може да се получи при следната последователност (Pinar, 2009):

1. Умножават се двете страни на матричното уравнение от ляво с транспонираната матрица A :

$$A^T A X = A^T B . \quad (5)$$

2. Намира се обратната матрица на матрицата $(A^T A)$.

3. Решението е:

$$X = (A^T A)^{-1} B . \quad (6)$$

Пример 3. В Таблица 1 са посочени изразходваните количества гориво при различни преходи. За целта на конкретния пример, приемаме, че в началото на всеки осъществен преход резервоарът на автомобила е изцяло пълен, а в края на прехода е изразходвано цялото налично количество гориво. Засечени са километрите изминати в градски и извънградски условия между всеки две зареждания „до горе“. Да се определи разходът на гориво за 100 километра в градски и извънградски условия.

Таблица 1

Изминати километри и изразходено гориво за осъществени преходи

	Изминато разстояние в градски условия (км.)	Изминато разстояние в извънградски условия (км.)	Изразходено гориво (л.)
Преход 1	128	396	40
Преход 2	80	420	40
Преход 3	100	404	40
Преход 4	160	332	40
Преход 5	40	520	40
Преход 6	240	220	40

Източник: Собствена разработка

Матричният вид на предефинираната система е:

$$\begin{pmatrix} 128 & 396 \\ 80 & 420 \\ 100 & 404 \\ 160 & 332 \\ 40 & 520 \\ 240 & 220 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Прилагайки (5) получаваме:

$$\begin{pmatrix} 117584 & 251408 \\ 251408 & 925456 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29920 \\ 91680 \end{pmatrix}$$

При решаване на матричното уравнение се получава: $x_1 \approx 0,1017$; $x_2 \approx 0,0714$. От тук следва, че средният разход на гориво в градски условия е 10,17 л/100 км., а в междуградски – 7,14 л/100 км.

Данните за изготвяне на практически примери трябва много внимателно да се подбират, за да може крайните резултати да бъдат близки до реалните. В противен случай ефектът

Заклучение

В заключение можем да кажем, че представянето на фундаменталните инструменти чрез практически примери от ежедневието би имало положителен ефект, що се отнася до мотивацията и по-доброто им разбиране от студентите. Различни примери биха могли да се представят на лекции и упражнения, както и да бъдат използвани като задачи за самостоятелна подготовка.

От изключително значение е при подбиране на данните да се подхожда внимателно, за да може крайните резултати да бъдат близки до реално съществуващите в практиката. Както беше представено в тази разработка, за някои задачи съществуват решения, които се разминават с реалните практики. Използването на примери, чиито решения противоречат на практическия опит е вероятно да има обратен ефект върху мотивацията и интереса на студентите към фундаменталните дисциплини.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Anton, H., & Kaul, A. (2019). *Elementary linear algebra* (12th ed.). Wiley.
2. Madzharova, T. (2022). Problems in Teaching of Mathematics in Engineering Specialities at Nikola Vaptsarov Naval Academy. *The Role of Fundamental Programs in Higher Education* (pp. 55-60). Varna: University of Economics.
3. Milkova, T. (2022). Importance of fundamental mathematics training when studying quantitative methods in logistics. *The role of fundamental programs in higher education* (pp. 61-70). Varna: Nauka i Ikonomika.
4. Pinar, M. C. (2009). Overdetermined system of linear equations. In C. A. Floudas, & P. M. Pardalos (Eds.), *Encyclopedia of optimization* (2nd ed.). Springer.
5. Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.

METHODS FOR ASSESSING THE RISK OF AN INVESTMENT PROJECT BUILT ON A PHOTOVOLTAIC SYSTEM

Imrel Nizam, PhD student
University of Economics - Varna, Bulgaria

Abstract: *The report examines risk and the management of risk factors in investment projects, with a focus on constructing a photovoltaic system for electricity generation in Bulgaria. The assessment of investment risk is crucial due to the high uncertainty and the scale of capital investments. The project includes identifying risk factors, quantitative measurement, planning management measures, and monitoring the execution of risk-related activities. Various approaches to risk measurement are introduced, including statistical methods such as variance analysis, which allow for assessing deviations in returns and forecasting future income. The report also explains specific risks associated with photovoltaic projects, such as technological risk (equipment and system selection), risks from weather conditions and the nature of solar radiation, financial risks from fluctuations in component prices, and business risk from market fluctuations. To minimize adverse effects, strategies such as monitoring, pre-negotiation with suppliers, and planning emergency actions are suggested.*

Keywords: *Risk, Investment projects, Returnability*

JEL code:

МЕТОДИ ЗА ОЦЕНКА НА РИСКА НА ИНВЕСТИЦИОНЕН ПРОЕКТ ЗА ИЗГРАЖДАНЕ НА ФОТОВОЛТАИЧНА СИСТЕМА

Докторант Имрел Низам
Икономически университет - Варна, България

Въведение

Практиката на оценяване и управление на риска в различни сфери на човешката дейност намира все по-широко приложение и в условията на пазарна икономика в България. Необходимостта от идентификация и оценяване на рисковите събития и предприемане на действия за справяне с риска са много полезни за насочване на бизнеса в правилната посока при за постигане на поставените цели – стратегически, тактически или оперативни.

Инвестиционните проекти са типични рискови проекти. Неопределеността относно бъдещето при тях е значително по-голяма в сравнение с много други видове проекти. Необходимостта от управление на риска може да се аргументира с особеностите на този вид проекти и свързаните с тях значителни рискове, в противен случай има голяма вероятност да не бъдат постигнати проектните цели в зададените времеви и ресурсни рамки. И е осъществимо поради това, че чрез прилагането на някои методи, които ще бъдат разгледани в доклада, може да се намали негативния ефект от възникване на потенциални рискови събития.

Целта на доклада е да се представи теоретичен и методичен инструментариум на оценка на риска при изграждане на фотоволтаична система за производство на електроенергия от възобновяеми енергийни източници и да се въведат методи за измерване на риска, включително статистически методи като дисперсионен анализ, които позволяват оценка на отклоненията във възвръщаемостта и предвиждане на

бъдещи доходи. С цел минимизиране на неблагоприятните ефекти се предлагат стратегии като мониторинг, предварително договаряне с доставчици и планиране на действия в извънредни ситуации.

Риск при реализиране на инвестиционен проект

Инвестиция в широк смисъл на думата се интерпретира като превръщане на ликвидните средства на предприятието в други имуществва. Инвестициите са „парични средства за закупуване на активи, които могат да осигурят получаване на доход, прираст на капитала и други положителни резултати за инвеститора в продължение на дълъг период“ (Николов, 1994). Обектите на капиталовложенията имат различен характер.

За намиране и анализиране „ефективността на инвестициите се използват различни методи като повечето от тях се основават на привеждането на доходите и инвестиционните разходи към определен момент от време, обикновено към началото на осъществяването на инвестицията или към момента на завършване.“ (Николаев и Милкова, 2023). Според инвестиционната теория даден капитал е толкова по-ценен, колкото по-рано се притежава. Същността на проблема се заключава в способността на капитала да нараства при инвестиране.

Инвестиционният риск е вероятността да се понесат загуби в резултат на инвестиции. Той включва различни фактори, като функционирането на пазара, икономически условия, политически събития и специфични рискове, свързани с определени активи или индустрии.

Разнообразните дейности при реализирането на инвестиционния проект могат да бъдат „проектиране, подготовка на фирмата за иновация, опитно производство и маркетингови дейности“ (Георгиев и Цветков, 1997), които могат да бъдат съчетани във времето, независимо от разнообразието и специфичните им особености.

Рискът при проектирането – дейностите са насочени основно към проектиране, технология на производство, изготвяне на технологична документация и др. Разработва се идеен проект с различни възможни варианти за техническо решение.

Рисковете при проектирането най-често се свързват със:

- ✓ Във фазата „идеен проект“ – рационален избор на вариант.
- ✓ Рационален избор на техническо решение.
- ✓ Конструкцията на новия продукт – недостатък, пропуск или несъответствие с изискванията на потребителите.
- ✓ Избора на неефективно или некачествено технологично оборудване и на доставчик/производител за него.

Рискът при подготовката на фирмата за инвестиция и иновация – дейностите са свързани с осигуряване на необходимите финансови средства за осъществяване на проекта, организационна и технологична подготовка и подготовка на персонала. Тук рисковете са изключително разнообразни по характер, но могат да бъдат групирани условно по следния начин:

- ✓ Нерационален избор на източници за финансиране на проекта по отношение на висока цена на финансирането и/или висок финансов риск.
- ✓ Неправилен избор на проектния екип.
- ✓ Нерационална организационна структура.

- ✓ Неправилен избор на кадри и направление за повишаване на квалификацията, неефективно и некачествено обучение.
- ✓ Недостатъчна информация за характера на иновацията.

Рискът при опитното производство и усвояването му

На база на работния проект се изработва опитен образец от новия продукт, който се подлага на изпитания по предварително проектирана методика за откриване и отстраняване на допуснатите технологични и конструкторски недостатъци и свързаните с тях корекции на работната документация.

При усвояване на производството, усилията на ръководителите са насочени към достигане на проектираните технически и икономически параметри на производствения процес. Рисковете могат да бъдат свързани с:

- ✓ Възможност да останат скрити и не проследени конструктивни и технологични недостатъци.
- ✓ Не достигнато качество.
- ✓ Удължаване периода на усвояване на производството и/или утежняване условията за работа в по-висока степен от предвидената.

Рискът при маркетинговите дейности – основно насочена към проучване на възможните пазари за новия продукт, на размера на целевия пазар и прогнозиране на пазарния дял, на съответствието между характеристиките на новия продукт и изискванията на потенциалните потребители, на насоките за бъдещо усъвършенстване на продукта, пазарни тествания на новия продукт и др.

Рисковете за проекта могат да бъдат:

- ✓ Прекалено оптимистични прогнози за обемите на целевите пазари и прогнозния пазарен дял за всеки от тях.
- ✓ Неточна оценка на изискванията на потребителите и очакваното съотношение „цена – търсене“ на новия продукт.

Управление и методи за оценка на риска при инвестиционен проект

Управлението на риска е задължителен елемент от процеса на цялостното управление на проекта и се извършва през целия му жизнен цикъл. Всеки един проект е динамичен и е свързан с непрекъснати промени във време, пари, участници, следователно винаги съществува определен риск, който трябва да бъде управляван.

Най-често практиките, свързани с управление на риска в проект се обособяват в няколко, неразделни сами по себе си, групи от дейности. За постигане на по-голяма яснота се диференцират в четири групи:

- Идентификация
- Количествено измерване
- Определяне на действията в отговор на рисковете
- Контрол на тези действия.

За измерване на инвестиционния риск се използват два подхода, изградени съответно на:

- исторически данни – установява се проявлението на риска в миналото, като се прави статистически анализ на динамичния ред, който е съставен от исторически данни за възвращаемостта на дадена инвестиция за еднакви периоди от време. Основният замисъл тук е, че и в следващите бъдещи периоди рискът ще запази своя размер.

- вероятностни данни – предварително се определят бъдещите числови стойности на нормата на възвращаемост, при различни проявления на обуславящите фактори. С помощта на регресионния анализ и историческите данни се определят прогнозните стойности и вероятностните очаквани резултати. Този метод не се използва много често в практиката, т.н. определянето на факторите има малко или много субективен характер.

Инвестиционният риск „се свързва с неопределеността на нормата на възвращаемост и може да се дефинира като възможното отклонение на реалната норма на възвращаемост от очакваната“ (Николаев, Атанасов и Мирянов, 2014). Дефиницията създава предпоставки за намиране на математико-статистически методи за количествена оценка на риска и последващото му анализиране – качествена оценка.

С голямо практическо приложение при измерване на инвестиционния риск е дисперсионният анализ чрез количествено измерване на колебливостта и варирането на членовете на статистическия ред. А ако този ред представлява „динамичен ред на нормата на възвращаемост, тази количествена мярка всъщност представлява измерител на риска“ (Николаев, Атанасов и Мирянов, 2014). Дисперсионният анализ използва следните показатели – ранг на вариацията, дисперсия, стандартно отклонение, коефициент на вариация, семи дисперсия и семистандартно отклонение.

Ранг (размах) на вариацията – намира статистическото разсейване като разлика между най-големия и най-малкия размер на възвращаемостта (вариращия признак). Изчислява се чрез формулите:

- в относителни величини,

$$r_{rel} = \frac{r_{max} - r_{min}}{\bar{r}} \times 100 \quad (1)$$

- в абсолютни величини,

$$r_{abs} = r_{max} - r_{min}, \quad (2)$$

където: r_{max} – най-голямата норма за възвращаемост;
 r_{min} – най-малката норма за възвращаемост;
 \bar{r} – средно претеглена възвращаемост.

При инвестиции с период повече от една година е възможно на практика през различните години възвращаемостта да не е еднаква. В такива случаи като сравнителен показател се използва **средната годишна възвращаемост**, която показва темпа на нарастване и се изчислява по три начина:

- средноаритметична възвращаемост,

$$\bar{r}_A = \frac{\sum_{t=1}^T r_t}{T} \quad (3)$$

- средногеометрична възвращаемост,

$$\bar{r}_G = \sqrt[T]{\prod_{t=1}^T r_t} \quad (4)$$

- среднохармонична възвращаемост,

$$\bar{r}_H = \frac{T}{\sum_{t=1}^T \frac{1}{r_t}} \quad (5)$$

където: r_t – възвращаемост през година t ;

T – брой на годините в инвестиционния период.

Разгледаните формули за средни величини се отнасят за величини от дискретен непрегглен вариационен ред – всички значения по признака участват с равни тегла в изчисленията. Съществуват и величини от дискретен прегглен вариационен ред, където някои от значенията участват с различни тегла. В зависимост от информацията с която се разполага, се избира формула съответно от прегглен или непрегглен вид.

Дисперсията е „мярка за степента, в която вариращият признак (възвращаемост) се отклонява от своята средна стойност“ (Мирянов, Петков, Йорданова, 2015) или мярка за разсейването около средното. Пресмята се по формулите:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad (6) \quad \text{или} \quad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n} \quad (7)$$

където r – възвращаемост на i -я период;

- средна възвръщаемост;

f_i – броят на наблюдаваните случаи;

n – брой периоди.

Стандартното отклонение е положителния квадратен корен на дисперсията. То е числова величина, която също като дисперсията отразява разсейването на множеството от наблюдения около средното. Тя е с размерност, каквато е самата случайна величина. В приложната статистика стандартното отклонение се изчислява по формулата:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (8)$$

където σ е стандартното отклонение.

При използване на втория вероятностен подход, се използват и следните формули:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (r_i - Er)^2 \cdot p_i \quad (9)$$

$$Er = \sum_{i=1}^n r_i \cdot p_i \quad (10)$$

където: E_r – очакваната възвращаемост или математическото очакване на възвращаемостта;

r_i – възвращаемостта при i -тото проявление на обуславящите фактори (състояние на икономиката);

p_i – вероятността за очаквания резултата при i -тото проявление на обуславящите фактори.

Дисперсията и стандартното отклонение са величините, които най-точно се доближават до теоретичното. Те изразяват отклонението от средната стойност (риска) в абсолютен вид, без да отчитат изменението на тази средна стойност. „Но при еднаква дисперсия инвестиционен актив с по-малка средна възвращаемост е по-рисков. Коефициентът на вариация отстранява този недостатък на дисперсията и стандартното отклонение като измерител на риска“ (Дочев и Николаев, 2007).

Формулата за определяне на **коефициента на вариация** е следната:

$$V_{\sigma} = \frac{\sigma}{r} \times 100 \quad (11)$$

„Коефициентът на вариация изразява рисковаността на единица доход.“ (Атанасов, Николаев, Мирянов, 2014). Той се използва като мярка за разсейването (колебанията) около средна норма. Колкото по-силна е вариацията, толкова по-голямо е разсейването на възможните резултати. Като относителна величина варира от 0 до 1. Когато вариационният коефициент приема по-високи стойности, тогава и колебанието е по-голямо.

Логично е да се мисли, че най-често използваните методи при управлението на проектните рискове са експертните. Методите за експертна оценка включват комплекс от логически и статистически процедури по преработката на информация, необходима за анализа и последващо вземане на решение в условията на риск. Централна фигура в експертната процедура се явява самият експерт – специалист, който чрез своите способности намира ефективно решение. Тези методи не са предмет на разработката.

Кратко описание на проекта

Настоящият инвестиционен проект е свързан с изграждане на фотоволтаична електроцентрала за производство на електрическа енергия, с инсталирана обща мощност 100 kWp в гр. Силистра.

Необходимата инвестиция за реализацията на инвестиционното намерение е в размер на 100 000 лева. Очакван живот на системата – 25 години. Минималният срок за изпълнение на проекта за изграждане и въвеждане в експлоатация на оборудването ѝ е до 6 месеца - подготвителни работи, доставка на оборудването, подготовка за монтиране на модулите и инверторите, монтиране и въвеждане в експлоатация на цялата централа.

Фирмата е с правна форма – дружество с ограничена отговорност. Размерът на внесените капитал е 20 000 лв. Предприятието към настоящия момент разполага с активи във вид на имоти, върху които се предвижда да се изгради фотоволтаичната електроцентрала. Тъй като дейността на фирмата е стартираща, едва след реализацията на настоящия проект, прогнозно се очаква годишно да бъдат произведени 163 200 kWh. За реализацията на проекта фирмата ще използва кредит в размер на 80 000 лева.

Климатичната зона около гр. Силистра е много благоприятна по отношение на слънчева радиация и инсталацията ще работи с максимална ефективност.



Фигура 2. Средно годишна слънчева радиация

Специфичните рискове, свързани с фотоволтаични проекти са:

Технологичен риск

Развитието на енергийни проекти, използващи нови и не напълно развити технологии на основата на възобновяеми енергийни източници като цяло е по-скъпо, дори в случаите, когато първичният енергиен източник е безплатен (в случая слънчева енергия), в сравнение с традиционните енергийни проекти. Затова и рискът е свързан с възможността да се избере некачествено оборудване /соларни панели, инвертори и други/, което може да доведе до по-ниска ефективност и преждевременна амортизация. Минимизирането на риска е чрез избор на утвърдени производители, проверка на техническите спецификации и съответните гаранции. Друг риск е неоптимален дизайн на системата – не е правилно проектирана или точно неправилен ъгъл на панелите, разположение или наклон, който може да се преодолее с консултация със специалисти.

Риск, свързан с характера на първичния енергиен източник или природни рискове

Неблагоприятните метеорологични условия – облаци, снежни покривки, градушки могат да намалят производителността на системата или да повредят панелите. Рискът, че слънчевата енергия или годишната часова продължителност на слънчевата радиоактивност може да не отговарят на необходимите критерии би се отразило върху разходите за експлоатация, техническа поддръжка и съответно до намалено генериране на електроенергия и намаляване на приходите от продажба на електрическа енергия. Но районът се характеризира с най-висока за страната годишна продължителност на слънчевото греене и липсващи мъгливи дни. Минимизирането на риска може да се осъществи с мониторинг на прогнозите за времето и използване на застраховки за защита от природни бедствия.

Финансови рискове

Промените в цената на материалите и по-конкретно увеличаване на разходите за закупуване на панели, инвертори и други компоненти, погрешни прогнози за производителността и доходността може да доведат до по-ниска рентабилност от очакваното. Преодоляването на подобни рискове може да се осъществи чрез сключване на фиксирани договори с доставчици и предварителни разчети за цялостната стойност на проекта.

Друг финансов риск, който е свързан с евентуалните неблагоприятни промени в конкретните пазарни и икономически условия, в които функционира предприятието, например преразходи по време на изграждането, особено когато технологията не е била активна на пазара. Преодоляването може да се осъществи чрез планиране на непредвидени ситуации: създаване на план за действие в случай на извънредни ситуации, което включва процедури за кризисно управление – ключово за минимизиране на вредите от негативни събития.

На база на информация на Българската независима енергийна борса са изчислени средни месечни цени и средна годишна цена /12 месеца назад/ на електрическа енергия за периода от месец октомври 2023г. до месец септември 2024г.

Таблица 1

Средни месечни цени и средна годишна цена /12 месеца назад/ на електрическа енергия.

Дневна цена на електрическа енергия на Българска независимата енергийна борса в пазарен сегмент "Ден напред"												
	2023 г.			2024 г.								
	Октомври	Ноември	Декември	Януари	Февруари	Март	Април	Май	Юни	Юли	Август	Септември
1	144,01	212,24	175,73	36,96	189,41	138,06	62,72	74,25	135,30	146,05	243,63	188,92
2	205,25	217,09	197,02	136,46	176,58	128,36	65,53	100,94	90,30	45,49	226,61	449,95
3	165,77	159,26	167,20	118,83	148,31	119,87	140,53	150,37	232,79	189,17	177,41	410,46
4	165,03	94,17	241,48	159,11	97,58	146,74	123,58	132,70	230,76	223,77	150,16	387,59
5	212,42	57,43	256,12	190,04	120,54	148,09	103,19	98,01	207,35	214,31	266,13	252,83
6	214,44	189,44	253,73	173,72	128,35	159,25	83,16	162,46	212,48	211,76	240,04	261,19
7	139,40	252,97	238,06	167,21	155,45	159,21	43,96	178,05	184,89	198,46	230,04	175,91
8	159,47	203,24	211,78	190,27	175,65	154,04	115,76	174,71	149,39	146,36	260,74	140,59
9	242,83	207,63	190,31	212,45	141,58	107,72	97,76	156,31	109,05	116,16	229,22	308,93
10	272,19	204,27	149,11	220,16	141,39	75,38	116,93	152,16	186,30	234,70	170,55	260,41
11	246,94	194,77	209,37	218,41	97,66	131,76	105,60	113,40	186,87	237,39	138,03	288,47
12	242,61	196,24	247,90	214,00	147,03	133,59	91,64	91,98	213,46	232,69	212,89	264,48
13	270,87	254,12	217,81	192,46	148,15	151,25	42,74	189,70	200,93	221,31	284,07	188,09
14	177,69	204,87	208,14	172,42	142,12	143,37	54,90	201,79	155,51	190,29	263,56	127,75
15	137,28	224,34	188,89	185,53	106,04	119,82	129,42	198,32	86,75	90,31	217,06	126,36
16	250,28	221,93	160,48	217,79	126,94	131,67	111,49	197,66	135,16	98,33	293,47	237,21
17	338,51	230,57	132,09	235,32	122,02	115,22	0,00	186,68	216,90	228,44	219,91	260,10
18	253,56	134,36	182,73	193,82	111,93	149,75	163,85	145,87	225,45	227,91	199,63	198,27
19	229,25	78,39	196,26	161,46	142,51	162,94	137,46	153,31	199,18	251,06	331,32	162,67
20	205,43	216,26	188,62	161,92	153,79	129,38	106,53	180,56	226,00	264,91	320,54	158,34
21	131,08	242,81	200,58	134,71	156,87	146,47	104,88	173,19	250,14	266,22	303,16	149,71
22	139,13	239,29	151,37	176,74	147,50	128,04	168,61	176,61	162,05	195,11	226,74	147,07
23	267,72	229,15	54,17	197,34	107,21	92,70	198,87	188,98	142,27	135,16	271,94	213,67
24	248,02	189,00	75,87	186,59	110,17	59,73	162,79	191,40	238,44	220,88	191,51	190,03
25	241,73	190,67	24,60	185,46	118,49	138,59	180,74	128,98	382,75	212,16	127,33	171,61
26	246,31	176,57	46,67	180,90	131,11	124,39	162,34	119,63	260,40	218,03	318,78	166,90
27	238,84	252,24	110,88	150,07	143,78	132,97	118,69	195,85	242,96	189,76	320,66	130,95
28	182,34	211,95	83,20	137,12	149,53	90,98	51,74	199,42	196,98	204,98	369,26	65,75
29	81,48	251,05	46,64	161,76	135,04	67,29	107,78	191,10	178,45	164,25	385,27	90,22
30	214,91	296,63	69,15	170,62		91,01	115,60	188,91	105,49	105,97	289,27	109,01
31	209,09		72,50	186,63		64,61		190,54		183,58	201,81	
Средна цена за месеца	208,83	201,10	159,63	175,04	136,99	123,94	108,96	160,77	191,49	189,19	247,77	209,45
Средна годишна цена												176,10

Източник: разработено от автора

Основни параметри на модела – първоначална инвестиция 100 000 лв., инсталирана мощност 100 kWp, очакван живот на системата 25 години, годишно производство на електроенергия 1 632 kWh за гр.Силистра, изкупна цена на енергията – средната годишна цена за България 0,17 лв., оперативни разходи 2 800 лв. на година, процент на амортизация 4%.

Разгледани и анализирани са 6 сценария на бизнес план с промени в ключовите параметри като изкупна цена на електроенергията и промяна в производителността на системата–капацитет и тяхното влияние върху възвращаемостта.

Оптимистични сценарии:

1. Цена на електроенергия – повишение на 0,18 лв.
Слънчева радиация - повишение 100% капацитет.
2. Цена на електроенергия – повишение на 0,18 лв.
Слънчева радиация се запазва 90% капацитет.

Реалистични сценарии:

1. Цена на електроенергия – не се променя 0,17 лв.
Слънчева радиация 90% капацитет.
2. Цена на електроенергия – не се променя 0,17 лв.
Слънчева радиация 100%.

Песимистични сценарии:

1. Цена на електроенергия – понижение на 0,16 лв.
Слънчева радиация се запазва 90% капацитет.
2. Цена на електроенергия – понижение на 0,16 лв.
Слънчева радиация - понижение 80% капацитет.

А/ Оптимистични сценарии:

Таблица 2

Допустими норми за проекта при цена 0,18 лв. и 100% максимален капацитет

	Показатели	Допустими норми	Показатели, след анализ на Бизнес плана
1	Нетна настояща стойност	$NPV > 0$	59 307,04
2	Вътрешна норма на възвращаемост	$IRR > 6\%$	17,06%
3	Индекс на рентабилност	$PI > 1$	1,59
4	Срок на откупуване	$PBP < 10$ години	5 г. 8 мес.

Източник: разработено от автора

Таблица 3

Допустими норми за проекта при цена 0,18 лв. и 90% капацитет

	Показатели	Допустими норми	Показатели, след анализ на Бизнес плана
1	Нетна настояща стойност	$NPV > 0$	41 739,99
2	Вътрешна норма на възвращаемост	$IRR > 6\%$	13,98%
3	Индекс на рентабилност	$PI > 1$	1,42
4	Срок на откупуване	$PBP < 10$ години	6 г. 6 мес.

Източник: разработено от автора

Б/ Реалистични сценарии:

Таблица 4

Допустими норми за проекта при цена 0,17 лв. и 90% капацитет

	Показатели	Допустими норми	Показатели, след анализ на Бизнес плана
1	Нетна настояща стойност	$NPV > 0$	32 010,54
2	Вътрешна норма на възвращаемост	$IRR > 6\%$	12,22%
3	Индекс на рентабилност	$PI > 1$	1,32
4	Срок на откупуване	$PBP < 10$ години	7 г. 1 мес.

Източник: разработено от автора

Таблица 5

Допустими норми за проекта при цена 0,17 лв. и 100% максимален капацитет

	Показатели	Допустими норми	Показатели, след анализ на Бизнес плана
1	Нетна настояща стойност	$NPV > 0$	48 496,55
2	Вътрешна норма на възвращаемост	$IRR > 6\%$	15,18%
3	Индекс на рентабилност	$PI > 1$	1,48
4	Срок на откупуване	$PBP < 10$ години	6 г. 2 мес.

Източник: разработено от автора

В/ Песимистични сценарии:

Таблица 6

Допустими норми за проекта при цена 0,16 лв. и 90% капацитет

	Показатели	Допустими норми	Показатели, след анализ на Бизнес плана
1	Нетна настояща стойност	$NPV > 0$	22 281,09
2	Вътрешна норма на възвращаемост	$IRR > 6\%$	10,40%
3	Индекс на рентабилност	$PI > 1$	1,22
4	Срок на откупуване	$PBP < 10$ години	7 г. 9 мес.

Източник: разработено от автора

Таблица 7

Допустими норми за проекта при цена 0,16 лв. и 100% капацитет

	Показатели	Допустими норми	Показатели, след анализ на Бизнес плана
1	Нетна настояща стойност	$NPV > 0$	37 686,05
2	Вътрешна норма на възвращаемост	$IRR > 6\%$	13,25%
3	Индекс на рентабилност	$PI > 1$	1,38
4	Срок на откупуване	$PBP < 10$ години	6 г. 9 мес.

Източник: разработено от автора

На база на тези допустими норми и показатели е направена оценка на инвестиционния риск – стандартно отклонение, дисперсия и коефициент на вариация.

Таблица 8

Възвращаемост в дни и години

№	Цена в лева	Възвращаемост в години		Възвращаемост в дни	
		Прогнозна слънчева радиация - максимален капацитет 100%	Настояща слънчева радиация - Капацитет 90%	Прогнозна слънчева радиация - максимален капацитет 100%	Настояща слънчева радиация - Капацитет 90%
1	0,16	6 г. 9 мес.	7 г. 9 мес.	2460	2825
2	0,17	6 г. 2 мес.	7 г. 1 мес.	2250	2585
3	0,18	5 г. 8 мес.	6 г. 6 мес.	2065	2370

Източник: разработено от автора

Таблица 9

Изчисляване на дисперсия, стандартно отклонение и коефициент на вариация

	Възвращаемост в години		Възвращаемост в дни	
	6 г. 2 мес.	7 г. 1 мес.	2258	2593
\bar{r} Средна възвращаемост				
σ^2 Дисперсия			26039	34539
σ Стандартно отклонение	5 мес.	6 мес.	161	186
$V\sigma$ Коефициент на вариация			7 %	7%

Източник: разработено от автора

Тези резултати показват как различни условия могат да повлияят на възвращаемостта и печалбата на даден проект. В оптимистичния сценарий увеличението на цената на електроенергията и по-високия капацитет водят до по-бърза възвращаемост и значително по-висока печалба. В песимистичния сценарий обаче, намалението на цената на електроенергията и намалението на капацитета удължават периода на възвращаемост и намаляват общата печалба.

Финансовият модел показва, че периодът на възвращаемост на инвестицията е между 6 и 7 години. На лице е умерена вариация във възвръщаемостта – времето за възвръщане на инвестицията не варира толкова драматично между сценариите. Разликата между най-благоприятния и най-неблагоприятния сценарий е около 1 година и 1 месец. Рискът за възвръщаемостта също е по-умерен, времето за възвръщане остава в по-предвидими граници. Това означава, че независимо от непредвидени неблагоприятни условия, инвестицията вероятно ще бъде възвръщана в рамките на 6 години или независимо от промените в пазарните условия, инвестицията ще се възвърне в разумен период.

Въпреки добрите резултати високата дисперсия подсказва, че трябва да се планират непредвидени разходи или доходи, за да се смекчат евентуални отрицателни ефекти върху проекта. Също така да се обмисли как да се намали несигурността – чрез сключване на дългосрочни договори за покупка на електроенергия, управление на оперативни разходи, и постоянен мониторинг на производителността на системата.

Финансовото моделиране на фотоволтаичния проект в гр. Силистра показва потенциал за добра възвръщаемост, но също така разкрива значителни рискове и вариации в крайния финансов резултат. Външни фактори като колебания в цената на електроенергията и оперативните разходи могат да окажат съществено влияние върху успеха на проекта. По-умерената дисперсия на периода на възвръщане показва, че времето за възвръщане на инвестицията е относително предвидимо. Като цяло проектът има потенциал за успех, особено при добре планирана стратегия за управление на оперативните разходи и дългосрочни договори за продажба на

електроенергия. Важна е подготовката за различни сценарии и управляване на риска чрез внимателно планиране и мониторинг.

Заключение

Изследването на риска в различни области на дейност ни дава възможност да разберем неговата същност и влияние върху процеса на вземане на решения.

Рискът е неразривна част от всяко начинание, а правилната му оценка и управление са ключови за успеха. То не само че позволява идентифициране и оценка на потенциалните заплахи, но също така осигурява стратегически подход за минимизиране на негативните последствия и максимизиране на възможностите. Ефективното управление на риска не само може да защити организацията от загуби, но и да отвори нови възможности за растеж и развитие.

Успешните стратегии за управление на риска изискват междудисциплинарен подход и ангажираност от всички заинтересовани страни.

Следователно, познанието и разбирането на риска са необходими условия за постигане на устойчивост и конкурентоспособност в съвременния свят.

В заключение, управлението на риска е динамичен и многопластов процес, който изисква постоянно адаптиране и подобряване. Само чрез задълбочено разбиране и активно управление на рисковете можем да изградим устойчиви и успешни организации, способни да се справят с предизвикателствата на съвременния свят.

Представените в този доклад данни и анализи са актуални към 30 септември 2024г. и отразяват наличната информация към този момент. С оглед на възможни промени в икономическите и техническите условия, данните могат да претърпят актуализация в бъдеще.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Atanasov, B., Nikolaev, R., Miryanov, R., Petkov, Y., Yordanova, V. (2014) *Matematika i optimizatsionni metodi*. Varna, Izd. „Nauka i ikonomika“.
2. Dochev, D., Nikolaev, R. (2007) *Teoria na riska*. Varna, Nauka i ikonomika.
3. Georgiev, Iv., Tsvetkov, Tsv. (1997) *Menidzhmant na firmente inovatsii i investitsii*, Sofia, UI „Stopanstvo“.
4. Miryanov, R., Petkov, Y., Yordanova, V. (2015) *Matematika i optimizatsionni metodi*. Varna, Izd. „Nauka i ikonomika“.
5. Nikolov, N. (1994) *Finansovi izchislenia*. Varna, Princeps, 1994.
6. Nikolaev, R., Milkova, T. (2023) *Osobenosti pri izbora na metod za otsenka na investitsii*. *Sbornik dokladi kragla masa*, „Industrialniyat biznes – perspektivi i vazmozhnosti“, Ikonicheski universitet – Varna, 27.10.2023g.<https://ibex.bg/>, 30.09.2024г.
7. <https://www.emde-solar.com/toplinna-karta>, 30.09.2024г.
8. <https://bds-bg.org/bg/project/show/bds:proj:121117>, 30.09.2024г.

**ФУНДАМЕНТАЛНАТА ПОДГОТОВКА
ВЪВ ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ**

Сборник с доклади
от международна научно-практическа конференция

**THE ROLE OF FUNDAMENTAL PROGRAMS
IN HIGHER EDUCATION**

Conference proceeding

Издателство „Наука и икономика“
Икономически университет – Варна
ул. „Евлоги Георгиев“ 24

ISSN 2815-3863



**КАТЕДРА „СТАТИСТИКА И
ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА“**