ФУНДАМЕНТАЛНАТА ПОДГОТОВКА ВЪВ ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ

Сборник с доклади от международна научно-практическа конференция

ФУНДАМЕНТАЛНАТА ПОДГОТОВКА ВЪВ ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ

THE ROLE OF FUNDAMENTAL PROGRAMS IN HIGHER EDUCATION

Сборник с доклади от международна научно-практическа конференция

Conference proceeding

ФУНДАМЕНТАЛНАТА ПОДГОТОВКА ВЪВ ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ

Сборник с доклади от
международна научно-практическа конференция,
организирана от катедра „Статистика и приложна математика“
при Икономически университет - Варна

21 октомври 2022 г.

THE ROLE OF FUNDAMENTAL PROGRAMS IN HIGHER EDUCATION

International Scientific-Practical Conference
Organized by department “Statistics and Applied Mathematics”,
Universityt of Economics - Varna

21 October 2022

2022
Издателство „Наука и икономика“
Икономически университет – Варна

Издаването на тази книга е по проект НПК-305/2022 г. и се финансира със средства от целева субсидия на държавния бюджет.

Публикуваните доклади не са редактирани и коригирани. Авторите носят пълна отговорност за тяхното съдържание и за грешки, допуснати по тяхна вина. Докладите са проверени за оригиналност.

The publication of this book is under Project № 305/2022 and is funded by a targeted subsidy to the state budget.

The published papers have not been edited and corrected. Authors are responsible for the content of their papers and errors committed by their fault. Papers are checked for originality.

ISSN 2815-3863

ОРГАНИЗАЦИОНЕН КОМИТЕТ

Председател:
Проф. д-р Росен Николаев – ръководител катедра „Статистика и приложна математика”
Членове:
Проф. д-р Веселин Хаджиев
Доц. д-р Радан Мирянов
Доц. д-р Танка Милкова
Доц. д-р Дико Суружон
Доц. д-р Теодора Запрянова
Доц. д-р Маргарита Ламбова
Гл. ас. д-р Йордан Петков
Гл. ас. д-р Деян Михайлов
Гл. ас. д-р Велина Йорданова
Гл. ас. д-р Димитрия Карадимова
Гл. ас. д-р Светлана Тодорова
Гл. ас. д-р Любомир Любенов
Гл. ас. д-р Ваня Стоянова
Гл. ас. д-р Славея Желязкова
Тижен Талиб
Жулиета Михайлова
Кирилка Петрова

ORGANIZING COMMITTEE

Chair:
Prof. Rosen Nikolaev, PhD – head of department “Statistics and Applied Mathematics”
Members:
Prof. Veselin Hadzhiev, PhD
Assoc. Prof. Radan Miryanov, PhD
Assoc. Prof. Tanka Milkova, PhD
Assoc. Prof. Diko Suruzhon, PhD
Assoc. Prof. Teodora Zapryanova, PhD
Assoc. Prof. Margarita Lambova, PhD
Chief Assist. Prof. Yordan Petkov, PhD
Chief Assist. Prof. Deyan Mihaylov, PhD
Chief Assist. Prof. Velina Yordanova, PhD
Chief Assist. Prof. Dimitria Karadimova, PhD
Chief Assist. Prof. Svetlana Todorova, PhD
Chief Assist. Prof. Lyubomir Lyubenov, PhD
Chief Assist. Prof. Vanya Stoyanova, PhD
Chief Assist. Prof. Slaveya Zhelyazkova, PhD
Tizhen Talib
Julieta Mihaylova
Kirilka Petrova

СЪДЪРЖАНИЕ

CONTENT

CERTAIN FEATURES IN THE CALCULATION OF NET WAGES

Prof. Rosen Nikolaev, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *The report analyses the formation of wages in the Republic of Bulgaria on the basis of the current legislation. Four other options are considered for possible calculation of social security and income tax and on this basis and on the net wage. Analysis, comparison, summary, conclusions and recommendations in this regard have been made. All theoretically justified productions are illustrated by a specific example. Emphasis is placed on the need for deep knowledge of the mathematical apparatus in order to gain a skill for real understanding and application of these different approaches.*

Keywords*: Net wages; Income tax; Social security contributions.*

JEL code: *C02*

НЯКОИ ОСОБЕНОСТИ ПРИ ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА НЕТНА РАБОТНА ЗАПЛАТА

Проф. д-р Росен Николаев
Икономически университет – Варна, България

Фундаменталната подготовка по математика е от съществено значение при изучаване на много от останалите фундаментални и специални дисциплини в различни специалности в обхвата на областта на висше образование Социални, стопански и правни науки, в частност в професионално направление Икономика. Считаме, че задълбочените познания по математика са от съществено значение за придобиване на знания и умения за осъществяване на редица дейности и процеси в икономиката. Използването на готови решения и формули в икономиката, без разбиране и без реално осъзнаване на същността и значението на използвания математически апарат в много случаи може да доведе до грешни изводи, некоректни тълкувания и умишлено или поради незнание, заблуждение на редица заинтересовани страни. За съжаление през последните години все по-често се наблюдава този процес на напълно грешно или не напълно коректно използване на дори елементарни понятия като процент и процентни изчисления от страна на управляващи, анализатори и журналисти. Това, случайно или умишлено, води до заблуждения в обществото, тъй като голяма част от това общество също не борави с математическия апарат на необходимото високо ниво.

Има много различни примери за това как липсата на добри познания по математика води до разпространяване на некоректни изводи и резултати в обществения, социален и политически живот на България.

Целта на автора в настоящия доклад е да представи някои математически зависимости, свързани с изчисляване на нетна работна заплата, както и различни възможности за нейното формиране, като очертае някои съществуващи некоректно използвани формулировки по отношение на прилаганата в момента политика и представи и други възможни методи за формиране на нетна работна заплата.

Тук ще направим уточнение, че не коментираме приетите закони и правила за формиране на работна заплата, а само някои неточности при формулиране на реално прилагания подход, които водят до волно или неволно заблуждение по отношение на процентите на удържаните осигуровки и данъци.

Може би са малко работещите хора, които знаят как се формира трудовото им възнаграждение. Известно е, че от брутната заплата се удържат осигуровките и данък общ доход, но малцина са запознати как точно се осъществяват тези изчисления.

Като начало ще въведем някои означения.

$Z_в$ - брутна заплата (в лв.);

Z_n - нетна заплата (в лв.);

p_0 - процент на осигуровките (в %);

p_d - процент на ДОД (данък общ доход) (в %);

O_s - осигуровки (в лв.);

D - данък общ доход (в лв.).

1. Според сега съществуващото законодателство в Република България от брутното възнаграждение първо се отчисляват осигуровките:

$$O_s = \frac{p_0}{100} Z_в \tag{1}$$

и това което остава за облагане с ДОД

$$Z_в - O_s = Z_в - \frac{p_0}{100} Z_в = Z_в \left(1 - \frac{p_0}{100}\right).$$

На този остатък ДОД е:

$$D = \frac{p_d}{100} Z_в \left(1 - \frac{p_0}{100}\right) \tag{1'}$$

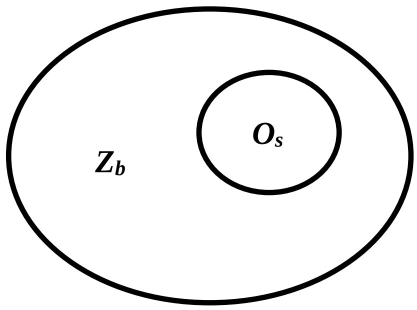
и за чистото трудово възнаграждение остава:

$$Z_n = Z_в \left(1 - \frac{p_0}{100}\right) - \frac{p_d}{100} Z_в \left(1 - \frac{p_0}{100}\right)$$

или

$$Z_n = Z_в \left(1 - \frac{p_0}{100}\right)\left(1 - \frac{p_d}{100}\right). \tag{1''}$$

Първото интересно, което прави впечатление е, че в момента в който се удържат осигуровките, самите те са включени вътре в брутното възнаграждение (фиг. 1) и на практика се удържат осигуровки и от осигуровките.



Фигура 1.

2. Нека се опитаме да намерим размера на O_s, но без в тях да се включват и осигуровките върху O_s, т.е.

$$O_s = \frac{p_0}{100}(Z_в - O_s) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{p_0}{100}\right)O_s = \frac{p_0}{100}Z_в$$

или

$$O_s = \frac{p_0 Z_в}{100 + p_0}$$

(2)

и тогава остатъкът за облагане с данък е

$$Z_в - O_s = Z_в - \frac{p_0 Z_в}{100 + p_0} \text{ или } \frac{100 Z_в}{100 + p_0}$$

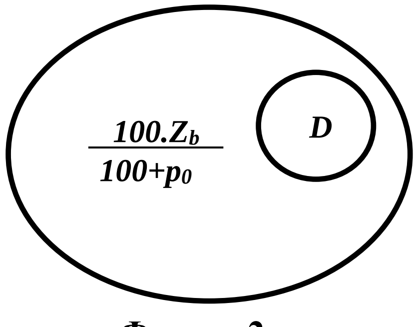
ДОД върху това е

$$D = p_d \cdot \frac{Z_в}{100 + p_0} \qquad (2')$$

и за чистото възнаграждение се получава $Z_n = \frac{100 Z_в}{100 + p_0} - p_d \cdot \frac{Z_в}{100 + p_0}$ или

$$Z_n = \frac{Z_в(100 - p_d)}{100 + p_0} \qquad (2'').$$

Ако внимателно погледнем в този случай, в момента на удържане на данъка, той самият е включен в сумата за облагане (фиг. 2).



Фигура 2.

3. Нормално е да няма данък върху самия данък, т.е.

$$D = \frac{p_d}{100}\left(\frac{100 Z_в}{100 + p_0} - D\right) \text{ или } \left(1 + \frac{p_d}{100}\right)D = p_d \cdot \frac{Z_в}{100 + p_0} \Leftrightarrow$$

$$D = \frac{100 p_d Z_в}{(100 + p_0)(100 + p_d)}. \qquad (3)$$

Осигуровките са същите като в т. 2, т.е.

$$O_s = \frac{p_0 Z_в}{100 + p_0}. \tag{3'}$$

За чистото възнаграждение получаваме

$$Z_n = \frac{100^2 Z_в}{(100 + p_0)(100 + p_d)}. \tag{3''}$$

Това е формулата за чистото трудово възнаграждение, ако няма данък върху данъка и осигуровки върху осигуровките.

Нека се върнем към стандартния начин за пресмятане на нетното трудово възнаграждение в Република България. При удържането на осигуровките, то такива се начисляват и върху данъка. Това например е основание държавните служители да не плащат осигуровки, тъй като данъкоплатците вече са им ги платили.

4. Ще разгледаме варианта без осигуровки върху данъка и без данък върху осигуровките. Трябва да решим следната система от две уравнения с две неизвестни:

$$\left| \begin{array}{l} D = \dfrac{p_d}{100}(Z_в - O_s) \\ O_s = \dfrac{p_0}{100}(Z_в - D) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 100D + p_d O_s = p_d Z_в \\ p_0 D + 100 O_s = p_0 Z_в \end{array} \right. .$$

След решаване на тази проста система за неизвестните D и O_s получаваме съответно:

$$D = \frac{Z_в (100 - p_0) p_d}{100^2 - p_0 p_d} \tag{4}$$

$$O_s = \frac{Z_в (100 - p_d) p_0}{100^2 - p_0 p_d} \tag{4'}$$

и за нетното възнаграждение получаваме:

$$Z_n = \frac{Z_в \left[100^2 + p_0 p_d - 100(p_0 + p_d)\right]}{100^2 - p_0 p_d}. \tag{4''}$$

Изхождайки от това, че все пак в този вариант има данък върху данъка и осигуровки върху осигуровките може да заключим, че и този вариант не е удовлетворителен. Положителното тук е, че няма осигуровки върху данъка и това е вариант, при който държавните служители би трябвало сами да си плащат осигуровките.

Сега ще предложим вариант, който считаме за оптимален и най-справедлив.

5. Без данък върху данъка и осигуровките и без осигуровки върху данъка и осигуровките.

Трябва да решим следната система:

$$\left| \begin{array}{l} O_s = \dfrac{p_0}{100}(Z_в - O_s - D) \\ D = \dfrac{p_d}{100}(Z_в - O_s - D) \end{array} \right. .$$

От тук лесно се забелязва зависимостта между данъка и осигуровките, а именно:

$$\frac{O_s}{D} = \frac{p_0}{p_d}. \tag{5}$$

След решаване на системата получаваме:

$$D = \frac{p_d Z_в}{100 + p_0 + p_d} \tag{6}$$

$$O_s = \frac{p_0 Z_в}{100 + p_0 + p_d} \tag{6'}$$

и нетното трудово възнаграждение е:

$$Z_n = \frac{100 Z_в}{100 + p_0 + p_d}. \tag{6''}$$

С цел онагледяване на теоретично изведените резултати, ще разгледаме конкретен пример.

Нека брутната заплата е в размер на 2000 лв. Според действащото законодателство в България общият процент на осигуровките е 13,78%, а ДОД е 10%. Ще разгледаме какво се получава при всеки от разгледаните варианти.

В случая: $Z_в = 2000$; $p_0 = 13{,}78$; $p_d = 10$.

1. Според сега действащото законодателство:
   От формула (1):
   $O_s = 0{,}1378.2000 = 275{,}60$ лв.
   От формула (1'):
   $D = 0{,}1.2000(1 - 0{,}1378) = 172{,}44$ лв.
   и от формула (1''):
   $Z_n = 2000.0{,}9.0{,}8622 = 1551{,}96$ лв.
2. Без осигуровки върху осигуровките:
   От формула (2):
   $O_s = \frac{13{,}78.2000}{113{,}78} = 242{,}22$ лв.
   От формула (2'):
   $D = \frac{10.2000}{113{,}78} = 175{,}78$ лв.
   и от формула (2''):
   $Z_n = \frac{2000.90}{113{,}78} = 1582$ лв.
3. Без данък върху данъка и осигуровки върху осигуровките.
   От формула (3):
   $D = \frac{100.10.2000}{110.113{,}78} = 159{,}80$ лв.
   От формула (3') ((2)):
   $O_s = \frac{13{,}78.2000}{113{,}78} = 242{,}22$ лв.
   От формула (3''):
   $Z_n = \frac{100^2.2000}{110.113{,}78} = 1597{,}98$ лв.

4. Без осигуровки върху данъка и без данък върху осигуровките.

От формула (4):

$$D = \frac{2000.86,22.10}{100^2 - 10.13,78} = 174,85\,\text{лв.}$$

От формула (4'):

$$O_s = \frac{2000.90.13,78}{100^2 - 10.13,78} = 251,51\,\text{лв.}$$

и от формула (4''):

$$Z_n = \frac{2000(100^2 + 10.13,78 - 100.23,78)}{100^2 - 10.13,78} = 1573,64\,\text{лв.}$$

5. Без данък върху данъка и осигуровките и без осигуровки върху данъка и осигуровките.

От формула (6):

$$D = \frac{10.2000}{123,78} = 161,58\,\text{лв.}$$

От формула (6'):

$$O_s = \frac{13,78.2000}{123,78} = 222,65\,\text{лв.}$$

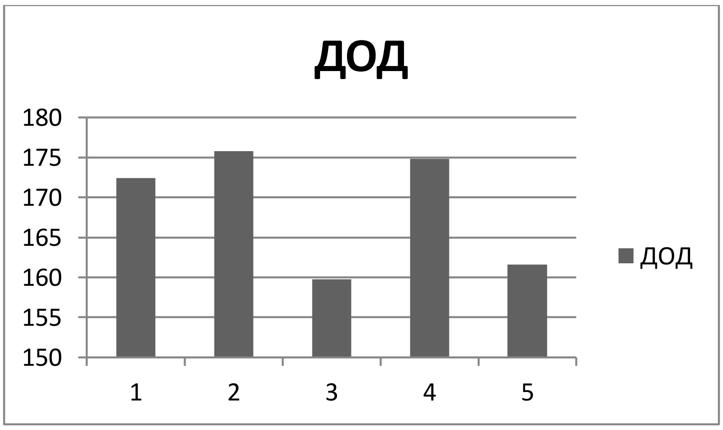
и от формула (6''):

$$Z_n = \frac{100.2000}{123,78} = 1615,77\,\text{лв.}$$

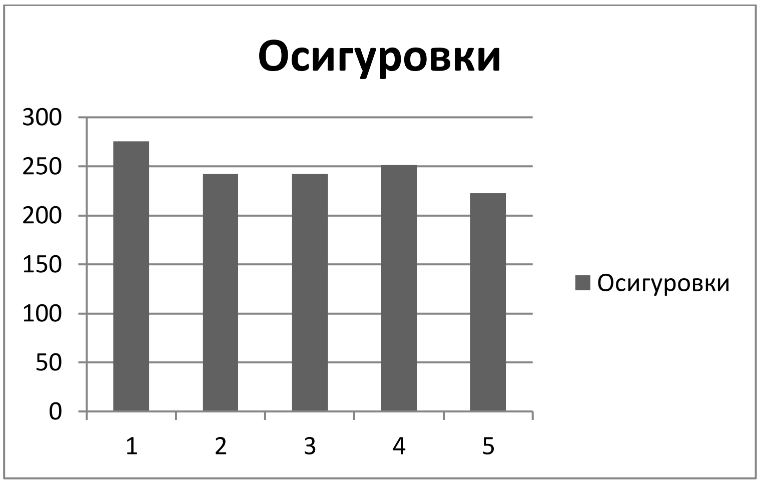
Нека оформим резултатите от петте варианта в една таблица (табл. 1).

Таблица 1

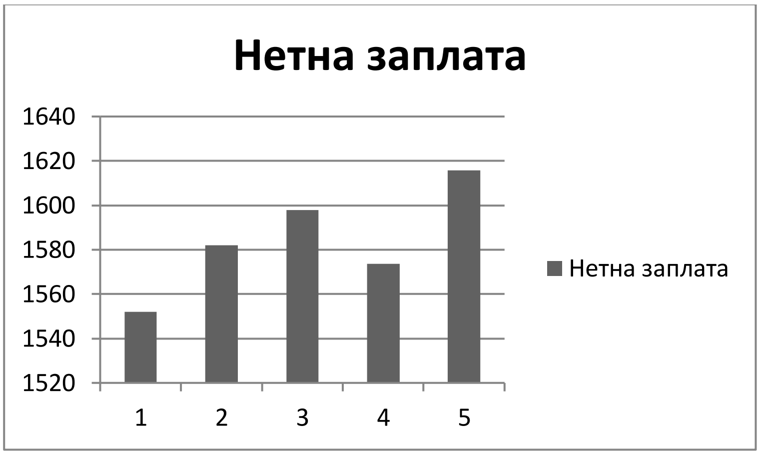
Вариант	ДОД (D)	Осигуровки (O_s)	Нетна заплата (Z_n)
1	172,44	275,60	1551,96
2	175,78	242,22	1582,00
3	159,80	242,22	1597,98
4	174,85	251,51	1573,64
5	161,58	222,65	1615,77



Фигура 3. ДОД.



Фигура 4. Осигуровки.



Фигура 5. Нетна заплата.

Това, което прави впечатление е, че най-лошият вариант за работниците е този, който е действащият реално в момента.

Друго характерно е, че в четвъртия вариант чистата сума също е малка, а данъкът е значително голям. Това е нормално, защото след като няма осигуровки върху данъка, то те са по-малки и като се приспаднат, сумата без тях, която се облага е по-висока, отколкото при първия вариант.

Един приемлив вариант е втория, когато няма данък върху данъка и осигуровки върху осигуровките, но данъкът в този случай е най-висок, а голямата сума за получаване се дължи на малката стойност на осигуровките.

Както вече беше споменато, най-справедливият вариант по наше мнение е последният. Нормално е суми, които се удържат по различни причини, да няма удръжки върху самите тях.

Както се вижда разликата между сега съществуващия вариант и справедливия, по наше мнение, в сумата за получаване при 2000 лв. брутна заплата е 1615,77-1551,96=63,81 лв.

През първото тримесечие на 2022 г. средната брутна заплата е 1593 лв. и наетите лица по трудово и служебно правоотношение е 2,27 милиона по данни на НСИ.

При първия вариант $Z_n = 1593\left(1-\frac{13{,}78}{100}\right)\left(1-\frac{10}{100}\right) = 1236{,}14$ лв., а при петия $Z_n = \frac{100.1593}{123{,}78} = 1286{,}96$ лв. и разликата е 50,82 лв. и за 2,27 млн.: 2,27.50,82=115361400 лв. ощетяване на месец на работещото население в България или 1384336800 лв. на година само заради сега съществуващия начин за изчисляване на работната заплата.

Нека в таблица обобщим и изведените формули за петте варианта (табл. 2).

Таблица 2

Вариант	D	O_s	Z_n
1	$\frac{p_d}{100}Z_в\left(1-\frac{p_0}{100}\right)$	$\frac{p_0}{100}Z_в$	$Z_в\left(1-\frac{p_0}{100}\right)-\frac{p_d}{100}Z_в\left(1-\frac{p_0}{100}\right)$
2	$\frac{p_d Z_в}{100+p_0}$	$\frac{p_0 Z_в}{100+p_0}$	$\frac{Z_в(100-p_d)}{100+p_0}$
3	$\frac{100 p_d Z_в}{(100+p_0)(100+p_d)}$	$\frac{p_0 Z_в}{100+p_0}$	$\frac{100^2 Z_в}{(100+p_0)(100+p_d)}$
4	$\frac{Z_в(100-p_0)p_d}{100^2-p_0 p_d}$	$\frac{Z_в(100-p_d)p_0}{100^2-p_0 p_d}$	$\frac{Z_в\left[100^2+p_0 p_d-100(p_0+p_d)\right]}{100^2-p_0 p_d}$
5	$\frac{p_d Z_в}{100+p_0+p_d}$	$\frac{p_0 Z_в}{100+p_0+p_d}$	$\frac{100 Z_в}{100+p_0+p_d}$

Предложените в доклада анализи и различни подходи за изчисляване на осигуровки и данък върху общия доход, оттам и формиране на трудово възнаграждение, могат да бъдат осмислени и интегрирани в практиката само от икономисти с високи познания и умения да прилагат математическия апарат.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Nikolaev, R., Suruzhon, D., Stoyanov, T., Zapryanova, T., Milkova, T., Miryanov, R. (2021). Prilozhna matematika. Varna: Nauka i ikonomika.
2. Zakon za danatsite varhu dohodite na fizicheskite litsa (https://lex.bg/laws/ldoc/2135538631)
3. Kodeks za sotsialno osiguryavane (https://lex.bg/laws/ldoc/1597824512)
4. Naredba za elementite na vaznagrazhdenieto i za dohodite, varhu koito se pravyat osiguritelni vnoski (https://www.lex.bg/laws/ldoc/-549450240)
5. Naredba za strukturata i organizatsiyata na rabotnata zaplata (https://www.lex.bg/laws/ldoc/2135542406)
6. https://nsi.bg/bg

DEVELOPMENT OF THE NUMBER NOTION FROM ALGEBRAIC EQUATION SOLVING POINT OF VIEW

Prof. Sava Grozdev, D.Sc.
Plovdiv University "Paisii Hilendarski", Bulgaria

Prof. Veselin Nenkov, PhD
Nikola Vaptsarov Naval Academy, Bulgaria

Abstract: *An approach is described to justify basic number sets by means of simple algebraic equations of first, second and third order. The main goal is to justify the introduction of complex number notion.*

Keywords: *Number; Equation*

JEL code: *C0*

Introduction. Numbers are essential in all basic human activities. Parallelly, the information in the form of number data is processed by various manipulations. The corresponding results lead to different scientific directions which are parts of higher education. Mathematics is included in it and studies basic chapters which are connected with the number notion and are applied in many professional domains that are taught to students (Prodanov, I. & I. Chobanov, 1976). Some of the mathematical applications concern differential equations solving (Manolov, Deneva, Genov & Shopolov, 1977). At the same time they are connected with the use of the number notion (Balk, Balk & Poluhin, 1988; Genov, Mihovski & Mollov, 1991; Markushevich & Markushevich, 1980; Nancheva & Stoyanov, 1977). For this reason it is suitable to develop a short retrospection of the number notion development and basic number sets before studying complex numbers. Since a lot of naturally generated problems are solved by means of equations, the present paper proposes an approach to the motivation of number notion development and creation of basic number sets by complex algebraic equations solving of first, second and third order.

Basic number sets and solving equations in them. The necessity of counting various objects in the surrounding environment has led to creating the *set of the natural numbers*

$N = \{1,2,3,4,5,6,7,8 \ldots\}$.

The basic actions with natural numbers include addition, subtraction, multiplication, division, comparison. Different problems could be solved in the set under consideration reducible to equation compositions. An example is the following problem.

Problem 1. A farmer breeds two goats and several sheep. How many sheep breeds the farmer if the total number of sheep and goats is 7?

If the number of the sheep is x, then it follows from the condition, that $x+2=7$. Consequently $x=7-2=5$, i.e. the sheep are 5.

Another problem which is reducible to the composition of an equation with the participation of natural numbers is the following one

Problem 2. The temperature at one o'clock pm in a December day was $6°C$. What was the temperature at 8 o'clock am if it raised by $10°C$ during the next 5 hours?

If the temperature at 8 o'clock am was $x°C$, it follows from the condition that $x+10=6$. Consequently $x=6-10$. It is impossible to execute this action in the set of the natural numbers N. That is why it is necessary to enlarge the set in such a way that the equation in question could be solved. The enlargement is the *set of the integers*

$$\mathrm{Z}=\{\ldots,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8\ldots\}.$$

In the set of the integers Z more equations could be solved. A problem with the participation of the basic action multiplication is the following one

Problem 3. The girls in a student group are twice as many as the boys. If all students in the group are 33, find the number of the boys.

If the boys are x, then the girls are $2x$. It follows from the condition that $x+2x=33$, i.e. $3x=33$. Consequently $x=\frac{33}{3}=11$. The solution is not leaving the set of the integers. Something more, it is from its subset N.

Another problem of a similar kind is the following one

Problem 4. Two breads are available to four people. How should the breads be distributed that everybody could receive one and the same quantity?

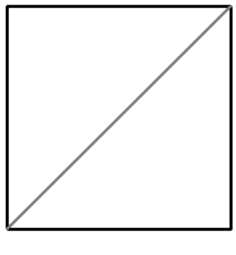
Let everybody receive a quantity equal to x. The condition is satisfied if $4x=2$. Consequently $x=2:4=\frac{2}{4}$. The result is not a number from Z, because the action $2:4$ is not possible in the set of the integers. This imposes an enlargement of the set of the integers in such way that the equation under consideration becomes solvable. Thus, we come to the *set of the rational numbers*

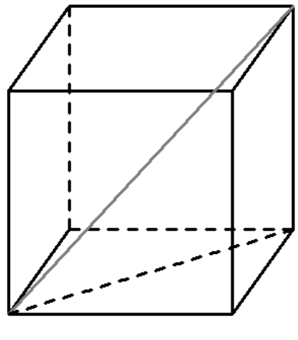
$$\mathrm{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,/\,a,b\in\mathrm{Z},\, b\neq 0\right\}.$$

We will consider the next three problems

Problem 5. If a sheet metal has the form of a square with side length $1\,m$, find the diagonal length of the square sheet.

If x is the diagonal length of the square, it follows from the Pythagorean theorem that $x^2=1^2+1^2$, i.e. the problem is reduced to the equation $x^2=2$.





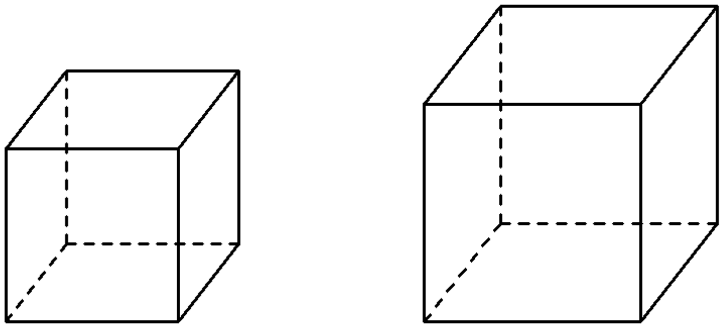
Problem 6. If the side length of a cube is $1\,m$, find the body diagonal length of the cube.

If x is the diagonal length of the cube, we have from the Pythagorean theorem that $x^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2$, i.e. the problem is reduced to the equation $x^2 = 3$.

A legend says that during an epidemy in the island of Delos an oracle has given an advice for stopping the epidemy to enlarge the cubic sacrifice twice without changing its form, i.e. to solve the next problem

Problem 7. (Cube duplication problem) By means of a ruler and compass find the edge of a cube with volume twice as large as the volume of a given cube (Genov, Mihovski & Mollov, 1991).

If the edge length of the given cube is 1, while the edge length of the second cube is x, then it follows from the condition that $x^3 = 2$.



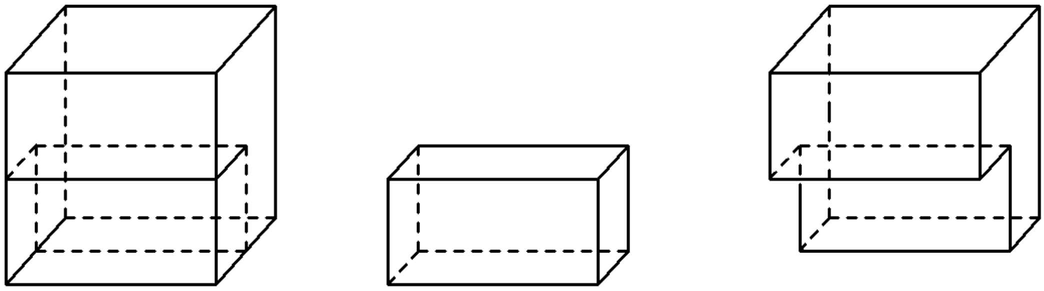
The above three equations have no solution in the set of the rational numbers. Suppose that the equation $x^2 = 2$ has a solution x, which could be represented in the form $x = \frac{p}{q}$ with integers p and q whose common divisor is not greater than 1. Consequently $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, i.e. $p^2 = 2q^2$. The last equality implies that p^2 is even and we conclude that p is even too. Thus, $p = 2p_1$ for $p_1 \in \mathrm{Z}$. After substituting we obtain that $q^2 = 2p_1^2$ and from here in the same way we conclude that $q = 2q_1$, where $q_1 \in \mathrm{Z}$. We find that the integers p and q have a common divisor 2, which is contradicts the assumption that x is rational.

In a similar way it follows that the equations $x^2 = 3$ and $x^3 = 2$ have no solution in the set of the rational numbers. Therefore, there are numbers which are not ratios of two integers. Such numbers are called *irrational numbers*. Thus, the solutions of the three equations under consideration are irrational numbers. Unifying the set of the rational numbers and the set of the irrational numbers we obtain the *set of the real numbers*. The actions addition, subtraction, multiplication, division and their properties move from the set of the rational numbers to the set of the real numbers.

It is well-known that not all equations of second order are solvable in the set of the real numbers. The main problem is connected with the square root of a negative number. A necessity appears of enlarging the set of the real numbers in order to solve the mentioned equations. On the other hand it is the necessity of having a possibility to solve equations of such a kind. The next problem suggests an answer.

Problem 8. A cube is divided into two parts P and Q. The solid P is a rectangular parallelepiped with one side being a square and the third edge being equal to the cube edge. Find the edge length of the cube if the volume of the parallelepiped P is three times less than the volume of the solid Q.

Let the cube edge be x. Then the volumes of the cube and P are x^3 and $x.1.1 = x$, respectively. It follows from the condition that the volume of Q is $3x$. Consequently, $x^3 = x + 3x$ and from here we obtain the equation $x^3 - 4x = 0$.



The last equation is of the kind $x^3 + px + q = 0$. It is known for it ((Balk, Balk & Poluhin, 1988; Genov, Mihovski & Mollov, 1991)), that the solution is given by the following Cardano formula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}.$$

In the case under consideration we have $p = -4$ and $q = 0$. Consequently $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -\frac{64}{27} < 0$ and it is not possible to find the value of $\sqrt{-\frac{64}{27}}$ in the set of the real numbers. On the other hand, the obtained equation could be written in the form $x(x+2)(x-2) = 0$. The last has three (integer) roots $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ and $x_3 = 2$. Only the solution $x_3 = 2$ has a geometric sense which means that the cube edge is equal to 2. The result shows that if we want to obtain the real solutions of the equation $x^3 - 4x = 0$ using Cardano formula, the expression $\sqrt{-\frac{8}{27}}$ should be meaningful and should lead to the solutions. Thus, a square root of a negative number is meaningful in third order equations solving. It is meaningful in second order equations too. The problem could be solved by enlarging the set of the real numbers, thus obtaining the *set of the complex numbers* C.

What follows after the short justification of the necessity to introduce complex numbers is the construction of the set of the complex numbers and executing the main actions with them (Balk, Balk & Poluhin, 1988; Genov, Mihovski & Mollov, 1991; Markushevich & Markushevich, 1980; Nancheva & Stoyanov, 1977; Prodanov, I. & I. Chobanov, 1976).

LITERATURE

1. Balk, M., G. Balk & A. Poluhin (1988). *Real applications of imaginary numbers*. Kiev: Radyanskaia shkola. (in Russian)
2. Genov, G., S. Mihovski & T. Mollov (1991). *Algebra with Number theory*. Sofia: Nauka i Izkustvo. (in Bulgarian)
3. Markushevich, A. & L. Markushevich (1980). Introduction to the theory of analytic functions. Sofia: Nauka i Izkustvo. (in Bulgarian)
4. Manolov, S., A. Deneva, A. Genov & N. Shopolov (1977). *Mathematics. Part* 3. Sofia: Technika. (in Bulgarian)
5. Nancheva, V. & N. Stoyanov (1977). *Mathematics. Part* 1. Sofia: Technika. (in Bulgarian)
6. Prodanov, I. & I. Chobanov (1976). *Higher mathematics for chemists* (1976). Sofia: Nauka i Izkustvo. (in Bulgarian)

USING DYNAMIC GEOGEBRA VISUALIZATIONS IN THE STUDY OF THE DEPENDENCIES OF TWO VARIABLES IN A UNIVERSITY MATHEMATICS COURSE

Professor Maria Shabanova, doctor of pedagogical sciences
Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov, Russia

Associate professor Larisa Udovenko, PhD
Moscow Pedagogical State University, Russia

Abstract: *The dependencies of two numerical variables constitute the traditional content of the university mathematics course. Mastering this content is important for students of economic universities.*
Understanding these topics is impossible without geometric interpretation. The GeoGebra dynamic mathematics system provides ample opportunities for creating geometric models of analytical dependencies. The software allows you to create 2D and 3D models that, depending on one or more parameters, experiment with them, display models in the form of augmented reality and explore some of their properties. We suggest using these opportunities not only to support students' activities in solving typical university course tasks.

Keywords*: GeoGebra; University course; Mathematical analysis; Economic education; Spatial models*

JEL code*: A22, C21*

INTRODUCTION

Functions of one and several variables are widely used in economics: production function, utility function, cost function, release function, demand function, consumption function and etc. Significant for the exploration of economic processes are the imaging of the domain of the function, level lines and graphs of the economic functions and the studding of the properties of functions of two variables. As proof, we will give an example of a wish expressed by the authors of the article (Nikolaev & Milkova, 2021).They propose to expand the list of issues included in the content of mathematical training programs for students of economic universities. They note that when studying the functions of two variables in an economic university, one cannot limit oneself to consider only planimetric models. This is due to the fact that in real situations, changes can allow not only variables, but also parameters. In this regard, spatial modeling of functions of two variables is included in the programs of teaching mathematics to students of economic universities: (Kremer, 2010; Bahtin, Ivanishko, Lebedev & Pindrik, 2012; Klushin, 2009).

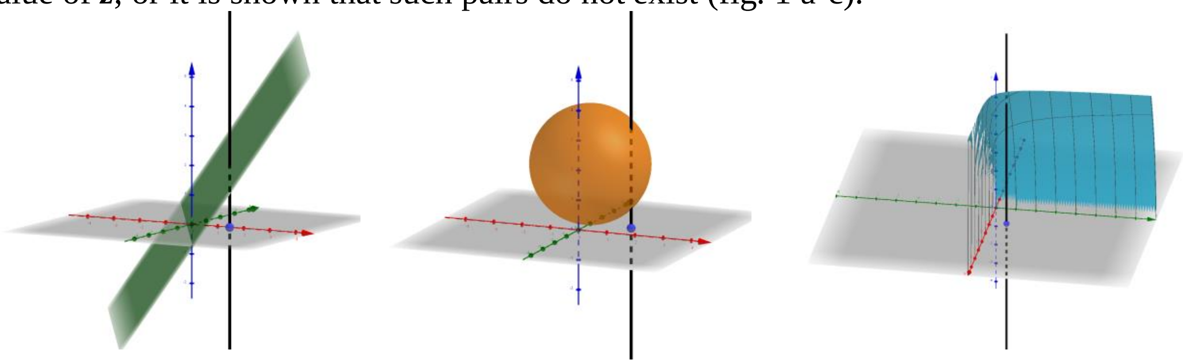
GEOGEBRA AS A TOOL FOR INVESTIGATING THE FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

Understanding the essence of the studied mathematical methods requires not only frequent reference to their economic application, but also visual monitoring of the progress and results of solving training tasks. We suggest using GeoGebra software to organize students' activities on visualization of functions of one, two and three variables.

The Geogebra website provides a large number of ready-made resources for visualization and assistance in learning the functions of two variables. We suggest not to limit ourselves to them, but to include students in the activity of creating their models, if they need it.
It is better to start studying the functions of two variables by setting tasks for their recognition. To set such problems, you can use the dependencies known to students, taken from the school geometry course and from the economics course.

Task 1. Let there be two variables x and y. If each pair $(x; y)$ from the set $D \subset R^2$ corresponds to a single value of the variable z, then it is said that a function $z = f(x; y)$ of the two variables is given.
Which of the following dependencies can be called a function of two variables:
a). $5x + 3y - 4z + 1 = 0$;
b). $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$
c). $z^3 = x^{1,5} \cdot y^{0,3}$?
The solution of the first two problems can be based on the knowledge that students received from school and university courses of analytical geometry and the skills to depict surfaces given by formulas. Students' difficulties in solving such problems are caused by doubts about the legality of using the knowledge gained while studying one area of mathematics in another.

The analytical solution of this task can be based on the use of knowledge of the general formulas of a plane, sphere, and as well as the Cobb– Douglas function (Cobb & Douglas, 1928), known in economics. In the absence of this knowledge, students can, based on the definition of the functions of two variables, evaluate the possibility of reducing the equation to the form: $z = f(x; y)$. This method requires that students have sufficiently well-developed skills of operations on one or both sides of the equation. Difficulties of formal transformations can become an obstacle to understanding the meaning of a new concept - a function of two variables. We propose to use at the first stage the capabilities of GeoGebra. Here you can build a graph by writing the equation in the program input line. Then you can conduct a simple and visual experiment, during which it will be proved that there is a pair $(x; y)$, which corresponds to more than one value of ***z***, or it is shown that such pairs do not exist (fig. 1 a-c).



a) $b)$ $c)$

Figure 1. The GeoGebra experiment for recognizing functions

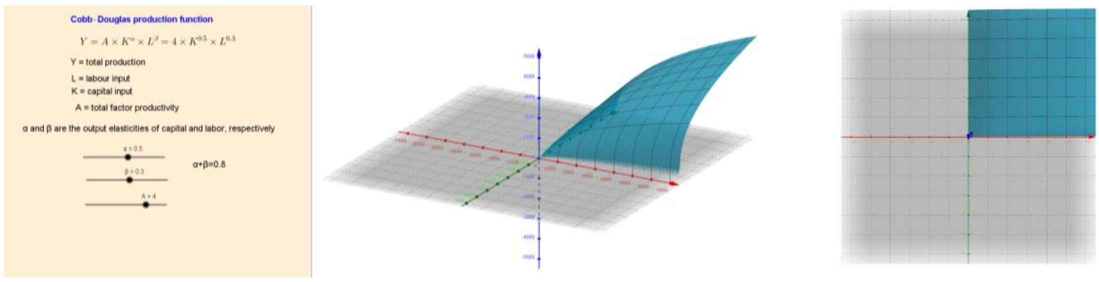
It is also good that such a check creates a way of action, but does not replace an analytical solution due to the limitations of the observed area. Finding the location of the point at which the perpendicular to the plane xOy has intersections with the graph of the function naturally leads to the formulation of the problem of finding the domain of the function.

Task 2. Investigate the dependence of the domain of definition of the Cobb-Douglas function on the parameters α and β: $Y = A \times K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$, $Y -$ where production volume, L – labour input; K–financial costs.

Figure 2 (a) presents a resource for studying the dependence of the domain of definition of the Cobb-Douglas function on the parameters α and β.

The image of this area for a function with parameters: $\alpha = 0.5$; $\beta = 0.3$ is shown in Figure 2 (b).

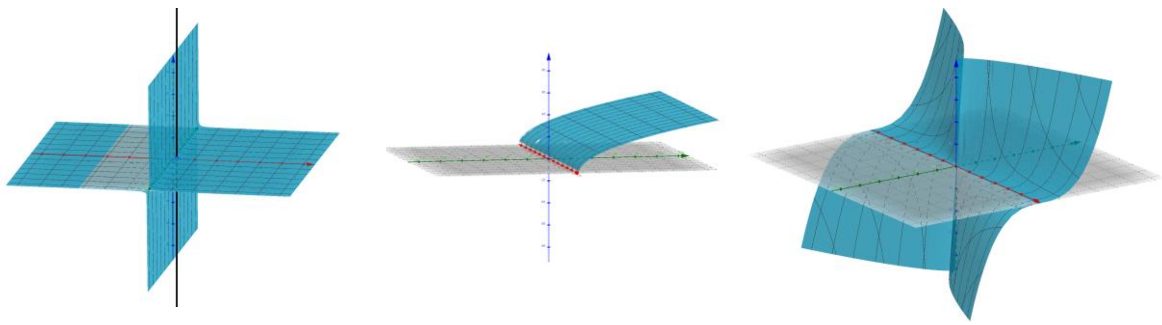
Analytically, the domain of definition of this function is described as a system of inequalities: $\begin{cases} K \geq 0 \\ L \geq 0 \end{cases}$.



a) b)

Figure 2. The domain of existence of the Cobb-Douglas function

Freeing the range of values of the parameters A, α and β in the Cobb-Douglas production function from the constraints set by their economic meaning allows us to obtain and investigate a generalized function of two variables given by the equation: $z = A \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta}$(fig.3).



$A = 4, \alpha = -1, \beta = 0$ $A = 4, \alpha = 0, \beta = 0.5$ $A = 4, \alpha = -2, \beta = 3$

Figure 3. Graphs of the function $z = A \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta}$ for different sets of parameter values

The next step in the study of the functions of two variables is the allocation of level lines, i.e. the geometric location of points in space for which the values of the function of two variables are the same. The skills to identify and describe the level curves are very important for economists, since the level line describes many pairs of parameter values that give the same economic effect. Level curves of production functions are called isoquant, i.e. indifference curves, since they determine sets of factors leading to the release of the same volume of goods. An analytical search of level curves requires the ability to solve equations of two variables with a parameter. Many students do not have this skill.

Task 3. Find and build level curves of the function: $z = x^{0.5} \cdot y^{0.3}$.

Solution: $a = \sqrt{x} \cdot \sqrt[10]{y^3}$

$a = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y \geq 0 \\ y = 0, x \geq 0 \end{array}\right.$ – coordinate semi – axes;

$a < 0 \Longrightarrow \emptyset$

$a > 0 \Longrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{a^{10}}{x^5}}, x > 0$ – positive branches of hyperboles.

GeoGebra allows you to depict level curves as traces left by implicitly defined curves: $a = \sqrt{x} \cdot \sqrt[10]{y^3}$ with the selected step of iterating over parameter values and as curves of intersection of the function graph with the plane $z = a$ (fig. 4).

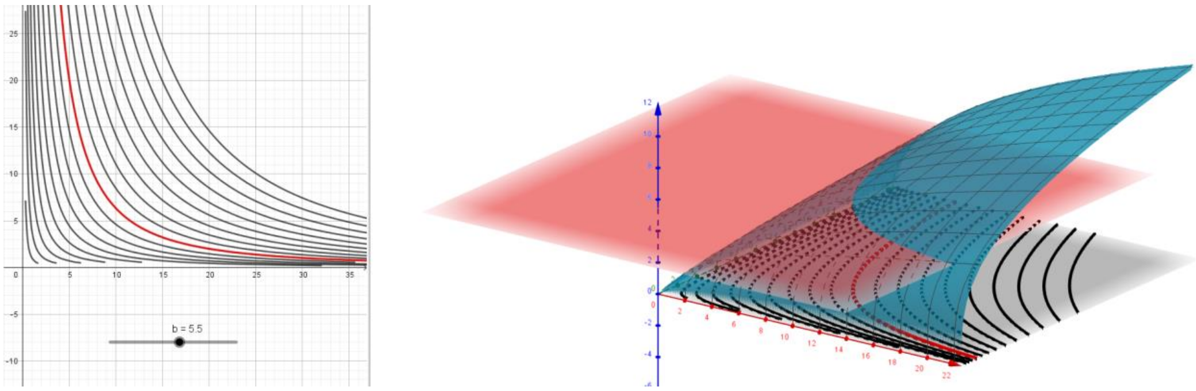
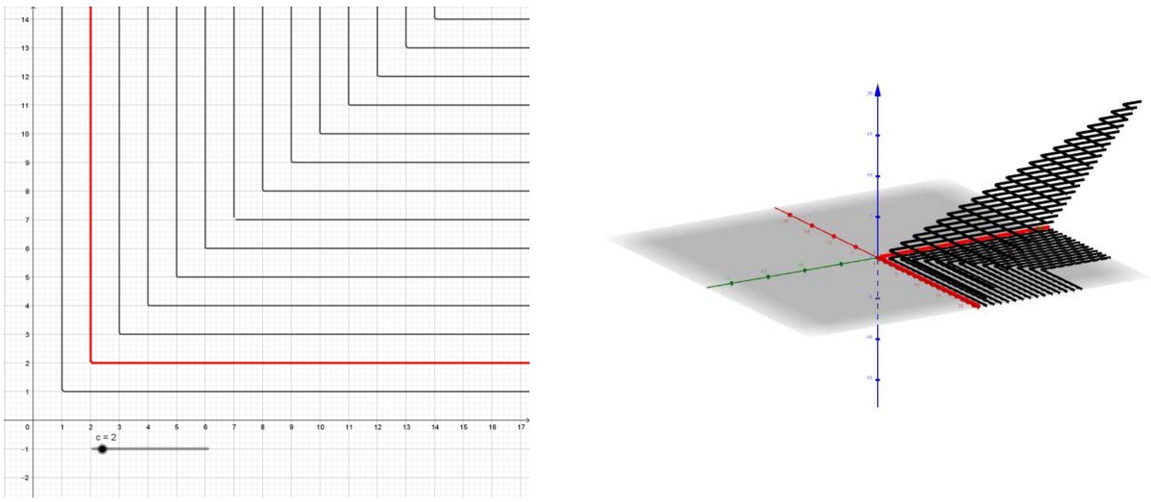


Figure 4. Dynamic model of the level curves

Students should be able not only to depict functions with level curves, but also to correctly understand such images. To form this skill, the tasks of restoring a function from an image of its graph using level curves are useful.

Task 4. Draw a graph of a function of two variables defined by a set of level lines shown in Figure 5 (a), then make up a formula that defines this function.



a) Level curves to task 3 b) The result of solving the task 3.

Figure 5

Task 4 introduces students to another production function, called the Leontief production function ″input-output″ (Leontief, 1944). The mathematical interest in it is connected with the fact that it is piecewise given: $z = \begin{cases} x, 0 \leq x < y \\ y, x \geq y \geq 0 \end{cases}$. The graph of this function is a union of two side faces of a regular quadrangular pyramid.

Another important task for students of economic fields of study is to find the maxima and minima of a function of two variables. The analytical solution of this problem requires the ability to implement the following algorithm:

1. Find partial derivatives of a function: z'_x; z'_y.
2. Find critical points as solutions to a system of equations: $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$.
3. Find partial derivatives of the second order: z''_{xx}; z''_{yy}; z''_{xy}; z''_{yx}.
4. For each critical point $(x_i; y_i)$, calculate the values of second-order partial derivatives: $A = z''_{xx}(x_i; y_i)$; $B = z''_{xy}(x_i; y_i) = z''_{yx}(x_i; y_i)$; $C = z''_{yy}(x_i; y_i)$.
5. Find the value of the expression: $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$ (the Hess determinant of the 2nd order).
6. Make a conclusion:

If $\Delta > 0$, then at the point $(x_i; y_i)$ the function has an extremum. Moreover, if $A > 0$, then it is the minimum, if $A < 0$, then it is the maximum.
If $\Delta < 0$, then there is no extremum at the point $(x_i; y_i)$ of the function.
If $\Delta = 0$, then the question of the presence of an extremum at the point $(x_i; y_i)$ remains open (additional research is needed).

7. Find the values of the function at the extremum points.

Task 5. Investigate the extremes of the function $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

The analytical solution of this task gives three critical points, two of which are local minima of the function. This is confirmed by the solution according to the algorithm described above.

Step 1. Find partial derivatives of the first order:

$$z'_x = 4x^3 - 4x + 4y$$
$$z'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

Step 2. Find the critical points:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0, \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0, \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y, \\ y^3 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y, \\ y\,(y^2 - 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (0; 0), \\ (\sqrt{2}; -\sqrt{2}), \\ (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \end{array} \right.$$

Step 3. Find the partial derivatives of the second order:

$z''_{xx} = 12x^2 - 4$
$z''_{xy} = 4$
$z''_{yy} = 12y^2 - 4$

$z''_{yx} = 4$

Step 4. Use the Hesse determinant to study the z function at the extremum:

Point ($-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$):

$z''_{xx}(-\sqrt{2};\ \sqrt{2}) = 20$

$z''_{xy}(-\sqrt{2};\ \sqrt{2}) = 4$

$z''_{yy}(-\sqrt{2};\ \sqrt{2}) = 20$

$z''_{yx}(-\sqrt{2};\ \sqrt{2}) = 4$

$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 384 > 0.$

The point $(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$ is the minimum point of the function.

Point ($\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$):

$z''_{xx}(\sqrt{2};\ -\sqrt{2}) = 20$

$z''_{xy}(\sqrt{2};\ -\sqrt{2}) = 4$

$z''_{yy}(\sqrt{2};\ -\sqrt{2}) = 20$

$z''_{yx}(\sqrt{2};\ -\sqrt{2}) = 4$

$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 384 > 0.$

The point $(\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$ is the minimum point of the function.

Point (0; 0):

$z''_{xx}(0;\ 0) = -4$

$z''_{xy}(0;\ 0) = 4$

$z''_{yy}(0;\ 0) = -4$

$z''_{yx}(0;\ 0) = 4$

$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0.$

With respect to the point (0; 0), it is impossible to say whether it is an extremum point or not. In such cases, additional research is required.

Additional research can be based on a direct verification of the definition of the extremum of the function.

Consider the value of the function z on the bisector y=x in the neighborhood of the point (0; 0). We get $z(x,x) = 2x^4 - 2x^2 + 4x^2 - 2x^2 = 2x^4 > 0$.

The value of the function z on the bisector $y = -x$

$z(x,-x) = 2x^4 - 2x^2 - 4x^2 - 2x^2 = 2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4) > 0$ for $|x| > 2$.

The function takes negative values of $z(x,-x) < 0$ in the vicinity of the point (0; 0) for $|x| < 2$.

Thus, following the definition of the extremum, the function, taking both positive values and negative values in the vicinity of the point (0; 0), does not have an extremum at this point.

The use of GeoGebra allows you to delegate the finding of partial derivatives to a computer, and also replace the use of the criterion by directly checking the behavior of the function at the found critical points using a graph (fig.6).

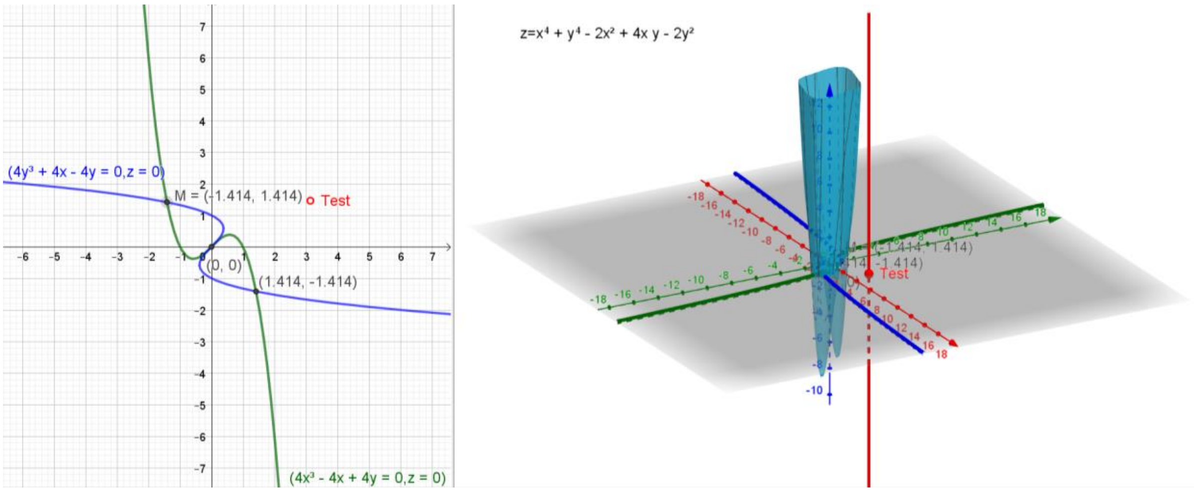
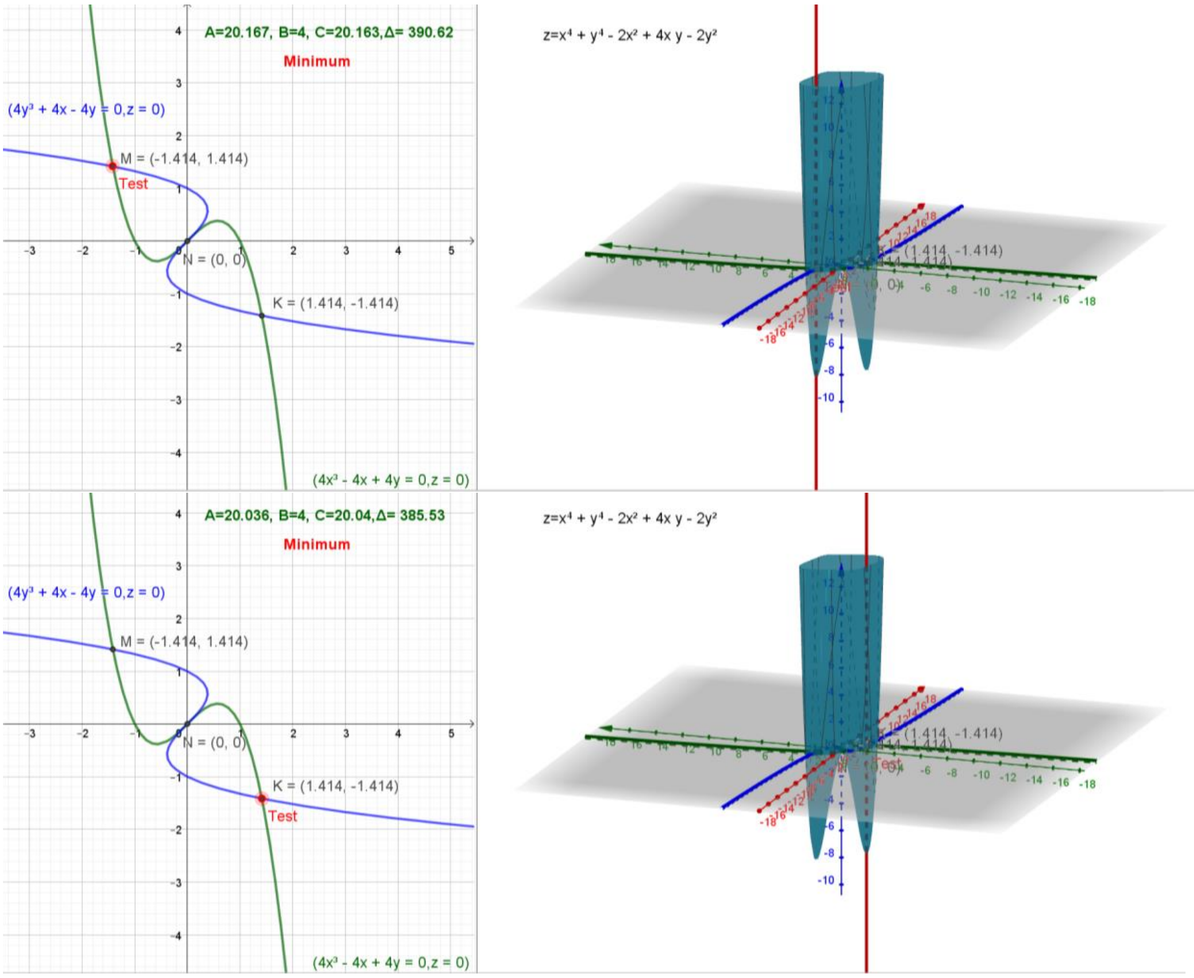
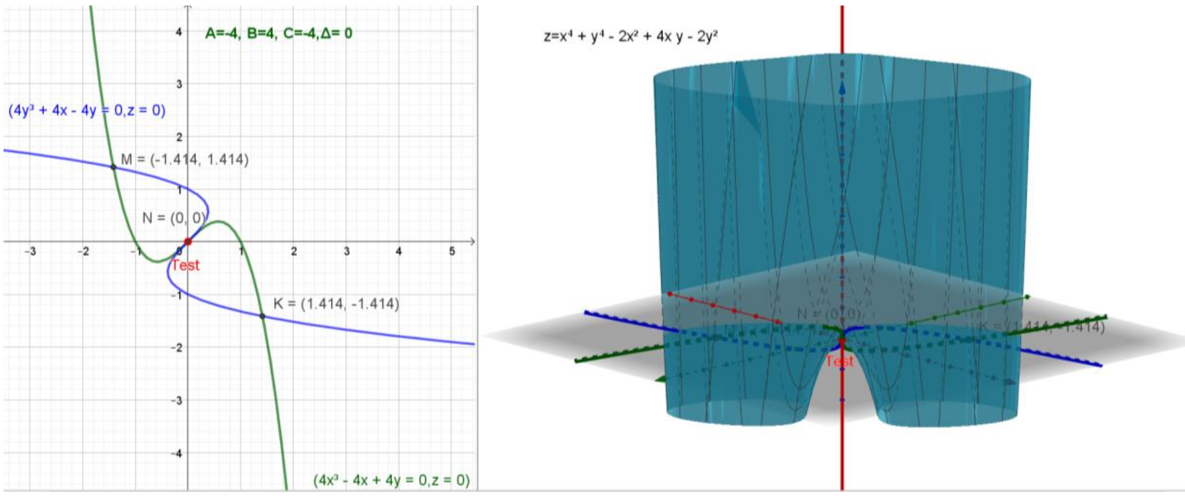


Figure 6. Graphs of the function from task 4 and the first order partial derivatives

In Figure 6, the points M, N and K are the critical points of a given function. Their coordinates are displayed with the selected accuracy. Critical points are found as intersection points of graphs of equations: $z'_x = 0$ and $z'_y = 0$. The "Test" point can move freely. In order to evaluate the behavior of the function in the vicinity of any of the critical points found, it is enough to put the "Test" point and consider the graph of the function (fig.7).



a) M, K are minimum points of the function



b) The algorithm does not allow to determine the nature of the behavior of the function at point N

Figure 7. Dynamic worksheet for computer testing of control points

Shabanova, 2022

Computer calculations show that the above algorithm for finding extremes does not give an answer about the nature of the behavior of the function at point N. To visually determine the behavior of a function at point N, it is better to use the augmented reality effect (fig.8).

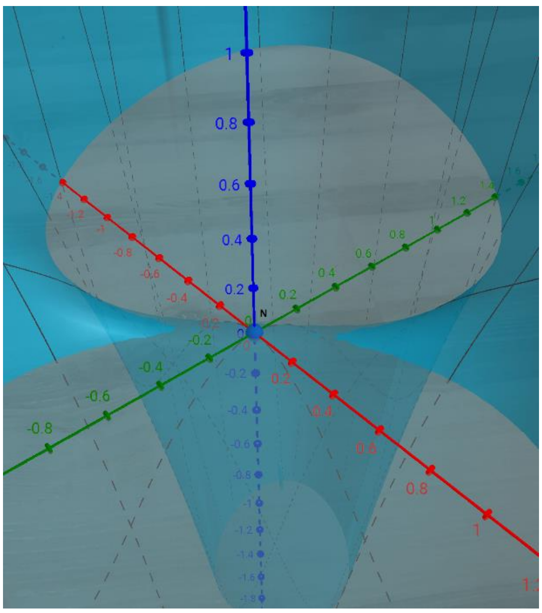


Figure 8. View of the graph of the function in the vicinity of point N (display in Augmented Reality)

Figure 8 shows that the point N is not an extremum point. Visual cues encourage students to search for an analytical justification.

Optimization problems are very common in economic practice, the solution of which requires the search for conditional extremums of the function.

Task 6. The volume of production is determined by the production function: $Y = 5 \cdot K^{0,25} \cdot L^{0,75}$ and the budget limit is set by the condition: $80 = 10 \cdot K + 10 \cdot L$.

It is necessary to determine what the allocation of resources should be, ensuring maximum output.

The analytical solution of the problem is connected with the use of the method of indefinite Lagrange multipliers.

1. Let's make a Lagrange function with a parameter λ: $l(K, L, \lambda) = 5 \cdot K^{0,25} \cdot L^{0,75} + \lambda \cdot (80 - 10\mathrm{K} - 10\mathrm{L})$.

2. We will find the critical points from the solution of the system: $\begin{cases} l'_K = 0 \\ l'_L = 0 \\ l'_\lambda = 0 \end{cases}$:

$$\begin{cases} \frac{5}{4} K^{-0,75} \cdot L^{0,75} - 10\lambda = 0 \\ \frac{15}{4} \cdot K^{0,25} \cdot L^{-0,25} - 10\lambda = 0 \\ K + L = 8. \end{cases}$$

Therefor: $K = 2, L = 6, \lambda = \frac{\sqrt[4]{27}}{8} \approx 0,285$.

3. The choice of $K = 2, L = 6$ provides the largest production volume: $5 \cdot 2^{0,25} \cdot 6^{0,75} \approx 22,795$.

With computer computation, this task can be solved by selecting a level line relating to a straight line (fig.9).

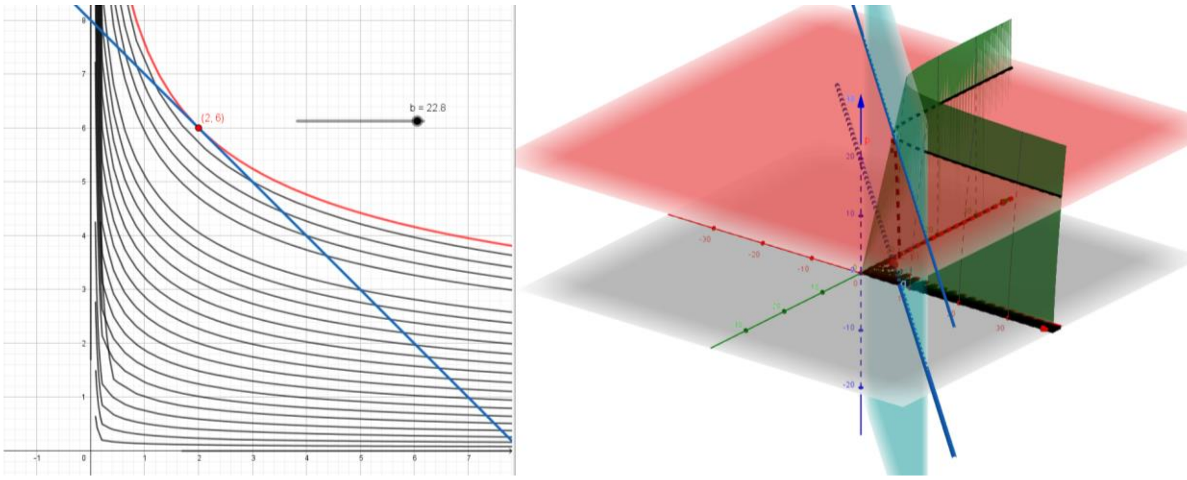


Figure 9. Computational solution of the problem of finding the conditional extremum of the production function

ENDNOTES

1. Functions of two or more variables are a fairly common mathematical model of economic processes. In this regard, the methods of their research should not be excluded from the mathematics course for students of economic fields of training.

2. GeoGebra allows you to support the solution of almost all tasks for the study of functions of two variables: create models of graphs of functions of two variables, represent them with level lines, conduct observations and computer experiments, perform calculations, use the augmented reality effect.

3. The use of GeoGebra makes it easier for students to understand the ideological foundations of the considered methods of studying the functions of two variables, contributes to their rapid development.

REFERENCES

1. Bahtin. V. I., Ivanishko I. A., Lebedev A. V., Pindrik O. I. (2012). Metod mnozhitelej Lagranzha : metod. posobie dlya studentov spec. 1-31 03 01-03 «Matematika (ekonomicheskaya deyatel'nost')». Minsk : BGU, 40p.
2. Cobb C. W.& Douglas P. H. (1928). "A theory of production," American Economic Review, vol. 18, pp. 139–165.
3. GeoGebra website. Available at: <https://www.geogebra.org/> [Accessed 7 September 2022].
4. KlyushinV.L. (2009). Vysshaya matematika dlya ekonomistov: Ucheb. Posobie.,M.: INFRA-M, 448 p.
5. Leontief, Wassily. (1944). Output, Employment, Consumption, and Investment The Quarterly Journal of Economics, Volume 58, Issue 2, pp. 290-314.
6. Nikolaev, R., Milkova, T. (2021). Two-Dimensional Problem for Using the Resources with Inconstant Expense Rates. Izvestia Journal of the Union of Scientists - Varna. Economic Sciences Series, 10(1), pp.141-148.
7. Kremer N.SH. (2010). Vysshaya matematika dlya ekonomistov: uchebnik dlya studentov vuzov, obuchayushchihsya po ekonomicheskim special'nostyam / [N.SH. Kremer i dr.]; pod red. prof. H.SH. Kremera. 3-e izd. M.: YUNITI-DANA, 479 p.
8. Shabanova M. (2022). Tochki ekstremuma funkcii dvuh peremennyh [online] Available at: < https://www.geogebra.org/m/rvnbpv6y > [Accessed 7 September 2022].

CONSTRUCTION OF A NORMAL CURVE BASED ON EMPIRICAL DATA USING THE CASIO fx-CG20 GRAPHING CALCULATOR

Marat Gabidullin, student
Moscow Regional Social and Economic Institute, Russia

Ulyana Rozanova, student
Moscow Regional Social and Economic Institute, Russia

Alexander Lukankin, PhD
Moscow Regional Social and Economic Institute, Russia

Abstract: *Most of the seemingly diverse intellectual tasks that students face in the learning process can be solved through the development of conceptual thinking. Conceptual thinking can be formed only by systematically studying the basics of natural sciences. When studying mathematical statistics, students face a number of difficulties. You can help the student by explaining the material on the example of practical problems and in comparing attempts to solve them, which requires a lot of study time for calculations. Modern models of scientific calculators are called "calculators" only by force of habit. The software of the CASIO fx-CG20 graphical calculator is an analogue of the Excel computer program and the popular MathCad math package. The calculator is distinguished by its versatility, ease of operation, compactness and, most importantly, mobility.*

Keywords*: Fundamental mathematical knowledge; Information technology; CASIO*

JEL code: *C88*

ПОСТРОЕНИЕ НОРМАЛЬНОЙ КРИВОЙ ПО ЭМПИРИЧЕСКИМ ДАННЫМ ПРИ ПОМОЩИ ГРАФИЧЕСКОГО КАЛЬКУЛЯТОРА CASIO fx-CG20

Марат Габидуллин, студент
Московский региональный социально-экономический институт, Россия

Ульяна Розанова, студент
Московский региональный социально-экономический институт, Россия

К. ф.-м. н. доц. Александр Луканкин
Московский региональный социально-экономический институт, Россия

Введение

Реформирование Российского и Болгарского высшего профессионального образования затруднено не только сложным многообразием и масштабностью необходимых перемен, но и отсутствием у реформаторов единых представлений о стратегических приоритетах и темпах этого процесса. Отличительной чертой нашего образования всегда был высокий уровень естественно-математической подготовки. Большинство из кажущегося многообразия интеллектуальных задач, возникающих перед студентами в процессе обучения, может быть решено с помощью развития *понятийного мышления*. Сформировать понятийное мышление можно только систематически изучая основы естественных наук. Обучающиеся должны усвоить не отдельные сведения, а основы наук в определенной системе. Для этого необходимы стабильные (утвержденные на ряд лет) программы и учебники, разработанные как *единая система*. Без качественного естественно-математического образования личности не будет.

При изучении математической статистики студенты сталкиваются с рядом трудностей. Часто студент не может понять, с какой целью автор учебника применяет тот или иной сложный аппарат, те или иные громоздкие рассуждения и как можно было к этому прийти. Можно помочь обучающемуся, пояснив материал на примере практических задач и в сопоставлении попыток их решения, что требует больших затрат учебного времени на вычисления. Примером известного средства обучения, которое хорошо зарекомендовало себя в обучении математике, физике, экономике и другим учебным предметам, в тех разделах, где требуется проводить достаточно сложные вычисления, является калькулятор. Калькулятор применяется в обучении более 30 лет и является едва ли не первым массовым средством информатизации образования вообще. Современные же модели научных калькуляторов называются «калькулятором» лишь в силу привычки. На самом деле по своим функциональным характеристикам это уже математический микрокомпьютер. Программное обеспечение графического калькулятора CASIO fx-CG20 является аналогом компьютерной программы Excel и популярного математического пакета MathCad. В принципе, все расчеты можно было бы провести в этих пакетах, но калькулятор отличается своей многофункциональностью, удобством действий, компактностью и, самое главное, мобильностью.

Метод произведений

Рассмотрим возможности графического калькулятора CASIO CG-20 для построения нормальной кривой по эмпирическим данным.

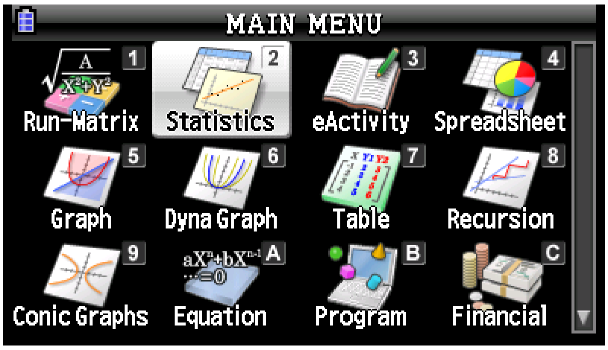
В результате первичной обработки статистических данных о росте студентов института получено распределение (табл. 1)

Таблица 1

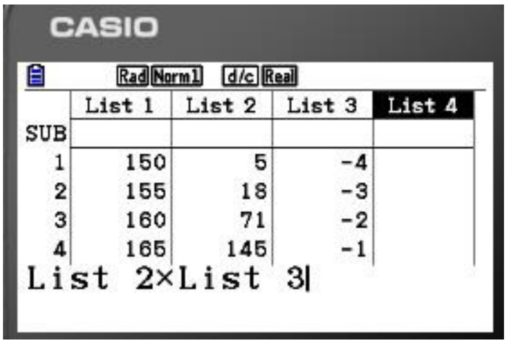
Выборка равноотстоящих вариант

150	155	160	165	170	175	180	185	190
5	18	71	145	173	141	81	35	8

Пользуясь методом произведений, найдем $\bar{x}$ и σ. В главном меню калькулятора выберем режим Statistics (фиг.1) и введем данные:



Фиг. 1. Вид главного меню.



Фиг.2. Ввод исходных данных.

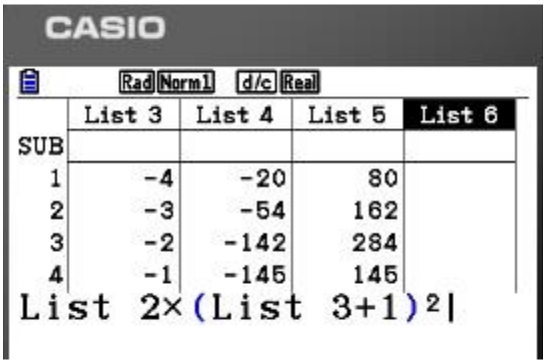
1. В первый столбец таблицы (List 1) записывают первоначальные варианты, располагая их в возрастающем порядке.
2. Во второй столбец (List 2) записывают частоты вариант.

3. В третий столбец записывают условные варианты $u_i = \frac{x_i - C}{h}$, причем в качестве ложного нуля C выбирают варианту, которая расположена примерно в середине вариационного ряда, и полагают шаг h равным разности между любыми двумя соседними вариантами; практически третий столбец можно заполнить так: в клетке строки, содержащей выбранный ложный нуль, пишут 0; в клетках над нулем пишут последовательно – 1, – 2, – 3 и т. д., а под нулем - 1, 2, 3 и т. д.;

4. Умножаем частоты на условные варианты и записываем их произведения $n_i u_i$ в четвертый столбец. В командной строке набираем: List 2 × List 3 (рис. 2). Для этого нажимаем клавиши: [SHIFT][1][2][×][SHIFT][1][3].

5. Умножаем частоты на квадраты вариант и записываем их произведения $n_i u_i^2$ в пятый столбец (List 5). Заметим, что для вычисления произведений $n_i u_i^2$ пятого столбца удобно числа $n_i u_i$ четвертого столбца умножить на u_i.

6. Умножаем частоты на квадраты условных вариант, увеличенных каждая на единицу, и записывают произведения $n_i(u_i + 1)^2$ в шестой столбец (List 6). Делаем это нажатием клавиш: [SHIFT][1][2][×][( ] [SHIFT][1][3][+][1][ )][x^2][EXE] (фиг. 3).



Фиг. 3. Вычисление произведения $n_i(u_i+1)^2$.

7. Суммируют все частоты (List 2) и их сумму (объем выборки n) записывают в нижнюю клетку столбца. Для этого устанавливаем курсор в последнюю ячейку List 2; нажимаем на кнопку [OPTN] (в результате изменяются экранные кнопки); нажимаем [F1](LIST); два раза нажимаем [F6](►); далее [F1][SHIFT][1][2]. В командной строке получилась запись: Sum List 2. Нажимаем [EXE]. В выбранной ячейке результат: 677.

8. Аналогично сложив все полученные числа в List 4, их сумму $\sum n_i u_i$ помещают в нижнюю ячейку List 4.

9. Сложив все полученные числа List 5, их сумму $\sum n_i u_i^2$ помещают в нижнюю ячейку.

10. Сложив все полученные числа List 6, их сумму $\sum n_i(u_i+1)^2$ помещают в нижнюю ячейкку столбца. Отметим, что шестой столбец служит для контроля вычислений: если сумма $\sum n_i(u_i+1)^2$ окажется равной сумме $\sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n$, то вычисления проведены правильно (таб. 2).

Таблица 2

Вычисление выборочных среднего и дисперсии

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
150	5	-4	-20	80	45
155	18	-3	-54	162	72
160	71	-2	-142	284	71
165	145	-1	-145	145	0
170	173	0	0	0	173
175	141	1	141	141	564
180	81	2	162	324	729
185	35	3	105	315	560
190	8	4	32	128	200
	n = 677		$\sum n_i u_i = 79$	$\sum n_i u_i^2 = 1579$	$\sum n_i(u_i+1)^2 = 2414$

Проведем контроль:

$$\sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n = 1579 + 2 \cdot 79 + 677 = 2414 = \sum n_i (u_i + 1)^2.$$

Следовательно, вычисления проведены правильно.

После того как расчетная таблица заполнена и проверена правильность вычислений, вычисляют условные моменты:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n},\ \ M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n}.$$

Далее вычисляем выборочные среднее и дисперсию:

$$\bar{x} = M_1^* h + C,\ \ S_0 = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2.$$

Вычислим условные моменты первого и второго порядков:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{79}{677} = 0{,}116,\ \ M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{1579}{677} = 2{,}332.$$

Найдем шаг: $h = 155 - 150 = 5$.

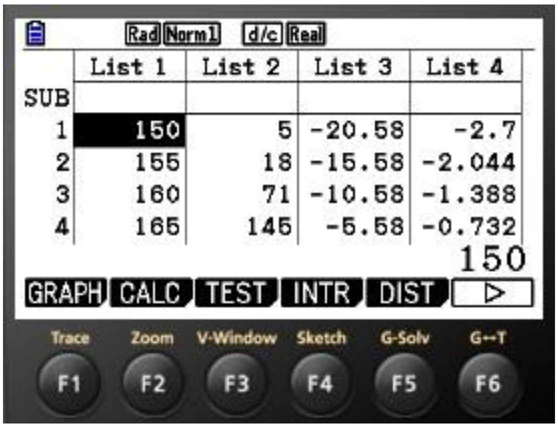
Вычислим искомые выборочные среднее и дисперсию:

$$\bar{x} = M_1^* h + C = 0{,}116 \cdot 5 + 170 = 170{,}58,$$

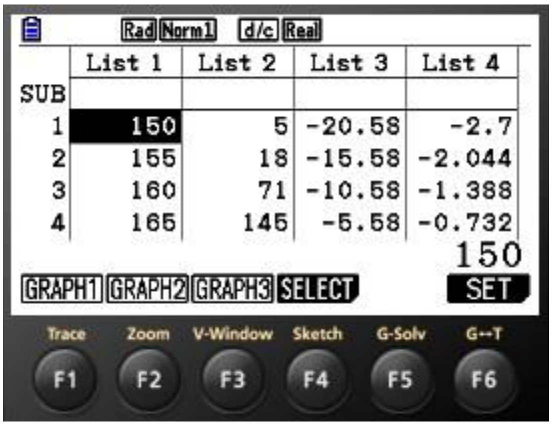
$$S_0 = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2 \approx 57{,}97,\ \sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1} S_0} \approx 7{,}62.$$

Статистическая проверка гипотезы

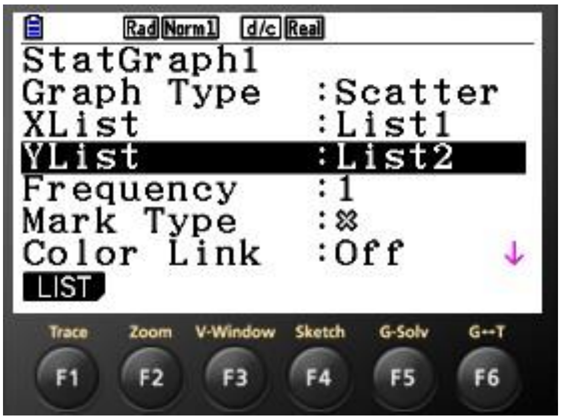
Изобразим пары чисел (List 1; List2) в виде точек на координатной плоскости. Для этого выбираем [F1](GRAPH) (фиг.4). Нажатием [F6](SET) открываем меню настроек (фиг. 5 - 6). В строке “Graph Type” выбираем вариант “Scatter”. По строкам перемещаемся при помощи джойстика. Выберем координаты. Для этого в строке XList укажем List 1, а в YList – List 2. В строке Mark Type можно выбрать вариант метки (например, F2). Нажатием клавиши [EXIT] возвращаемся к экрану рис. 5 и выбираем [F1]. В результате получаем изображение точек (фиг. 7).

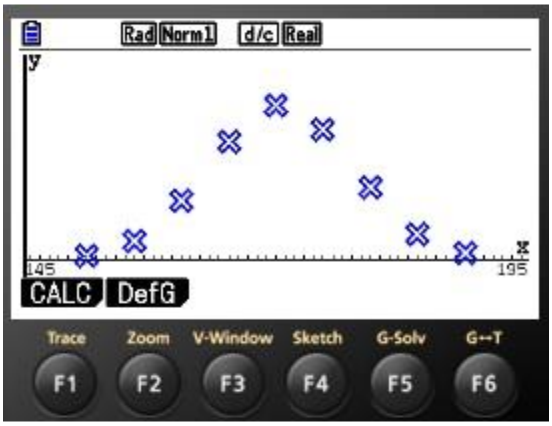


Фиг. 4



Фиг. 5





Фиг. 6 ***Фиг. 7***

Полученная двумерная генеральная совокупность позволяет предположить, что случайная величина распределена нормально. Для проверки этого предположения воспользуемся критерием согласия Пирсона. Рассмотрим нулевую гипотезу H_0 (генеральная совокупность распределена по закону Гаусса) и альтернативную H_1 (генеральная совокупность не распределена по закону Гаусса). Проведем проверку гипотез при уровне значимости 0,05 и 0,01. При помощи калькулятора составим расчетные таблицы 3 и 4:

Таблица 3

Рассчетная таблица

$[x_i; x_{i+1})$	(-∞; 152,5)	[152,5; 157,5)	[157,5; 162,5)	[162,5;167,5)	[167,5; 172,2)	[172,5; 177,5)	[177,5; 182,5)	[182,5; 187,5)	[187,5; +∞)
n_i	5	18	71	145	173	141	81	35	8
p_i	0,01	0,03	0,10	0,20	0,26	0,22	0,12	0,05	0,01
n_i'	7	20	68	135	176	149	81	34	7

Для вычисления теоретических частот используем таблицу значений функции Лапласа. Из полученной таблицы видно, что эмпирические и теоретические частоты различаются. Случайно ли расхождение частот? Возможно, что расхождение случайно (незначимо) и вызвано либо малым числом измерений, либо способом их группировки, либо другими причинами. Возможно, что расхождение частот неслучайно (значимо) и вызвано тем, что теоретические частоты вычислены исходя из неверного предположения о нормальном распределении генеральной совокупности. Вычислим $\chi^2_{эмп}$, для чего, при помощи калькулятора, составим ещё одну таблицу 4:

Таблица 4

Расчетная таблица

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	n_i^2	$\dfrac{n_i^2}{n_i'}$
1	5	7	-2	4	0,5714	25	3,5714
2	18	20	-2	4	0,2	324	16,2
3	71	68	3	9	0,1323	5041	74,132
4	145	135	10	100	0,7407	21025	155,74
5	173	176	-3	9	0,0511	29929	170,05
6	141	149	-8	64	0,4395	19881	133,42
7	81	81	0	0	0	6561	81
8	35	34	1	1	0,0294	1225	36,029
9	8	7	1	1	0,1428	64	9,1428
$\sum$	677	677			2,29		679,29

$$\chi^2_{эмп} = \sum_i \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} \approx 2{,}29$$

Проведем контроль: $\frac{n_i^2}{n_i'} - n = 679{,}29 - 677 = 2{,}29.$

Вычисления проведены правильно.

Найдем число степеней свободы: k = 9 – 2 – 1 = 6.

По таблице критических точек распределения χ^2 по уровню значимости и числу степеней свободы находим:

$$\chi^2_{кр}(0{,}05;6) = 12{,}6;\ \chi^2_{кр}(0{,}01;6) = 16{,}8.$$

Так как $\chi^2_{эмп} < \chi^2_{кр}$ - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Таким образом, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое и данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

Построение нормальной кривой

Для построения нормальной кривой по данным наблюдений можно воспользоваться алгоритмом:

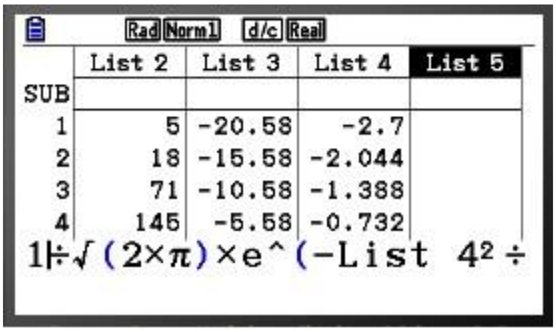
1) Зная $\bar{x}$ и σ, находим ординаты y_i (выравнивающие частоты) теоретической кривой по формуле

$$y_i = \frac{nh}{\sigma}\varphi(u_i),$$

где n – сумма наблюдаемых частот, h – разность между двумя соседними вариантами, $u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$ и $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$.

2) строим точки (x_i; y_i) в декартовой прямоугольной системе координат и соединяем их плавной кривой.

Вычислим выравнивающие частоты (фиг. 8).



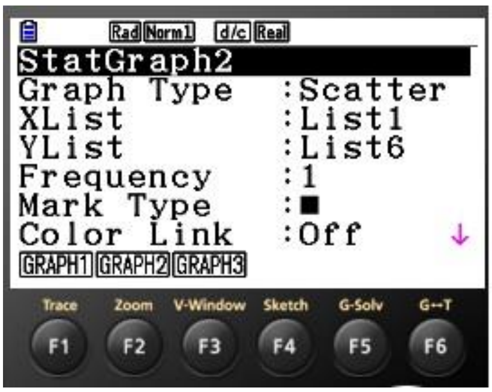
Фиг. 8. Вычисление выравнивающих частот

Таблица 5

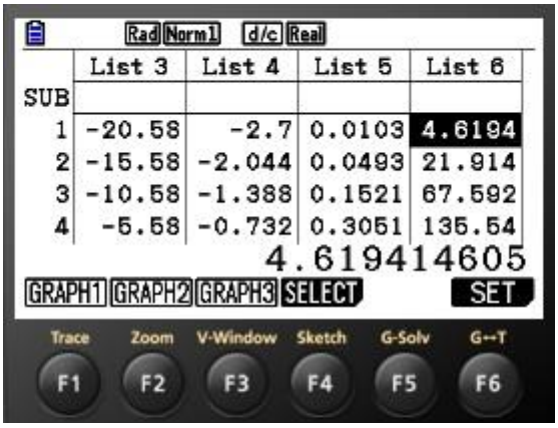
Вычисление выравнивающих частот

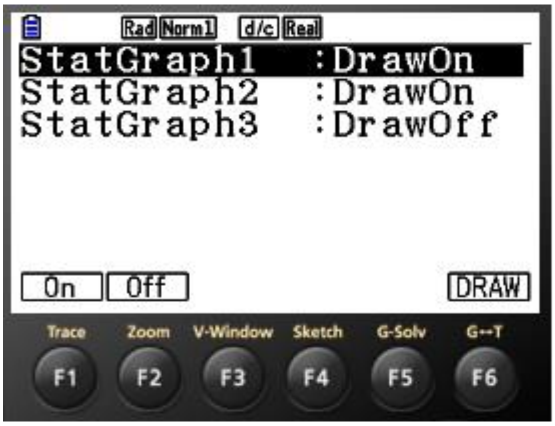
x_i	n_i	$x_i - \overline{x}$	u_i	$\varphi(u_i)$	y_i
150	5	– 20,58	– 2,7	0,0103	4,619
155	18	– 15,58	– 2,04	0,0493	21,914
160	71	– 10,58	– 1,39	0,1521	67,592
165	145	– 5,58	– 0,73	0,3051	135,54
170	173	– 0,58	– 0,08	0,3977	176,7
175	141	4,42	0,58	0,3371	149,77
180	81	9,42	1,23	0,1858	82,539
185	35	14,42	1,89	0,0665	29,571
190	8	19,42	2,54	0,0155	6,888

По координатам List 1 и List 2 построим точки (как это было показано выше). Затем переведем курсор в позицию StatGraph1 и «F2» выберем режим настройки второго графика. Для второго графика установим настройки как показано на фиг. 9. Затем клавишей «EXIT» вернемся в исходное окно настройки графиков функций (фиг. 11) и клавишей «F4» перейдем в режим выбора графиков для построения (фиг. 10). В открывшемся окне StatGraph1 имеет параметр «DrawOn», т.е. «строить». В остальных установлен «DrawOff», т.е. «не строить». Чтобы построить одновременно сразу два графика нужно параметр для второго графика установить в «DrawOn» клавишей «F1» (фиг.12). Затем клавишей «F6» построим графики (фиг.13).



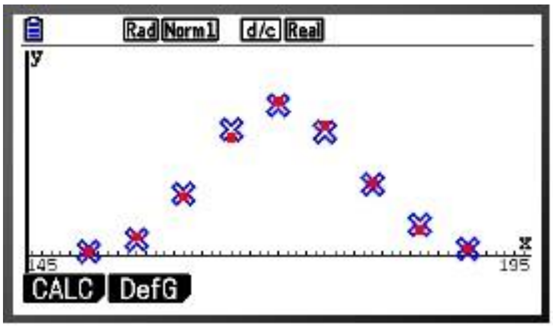
Фиг. 9 ***Фиг.10***





Фиг. 11 ***Фиг.12***

На фиг. 13 построены нормальная (теоретическая) кривая по выравнивающим частотам и полигон наблюдаемых частот Сравнение графиков показывает, что построенная теоретическая кривая удовлетворительно отражает данные наблюдений. Следует обратить внимание на то, что локальный максимум теоретической кривой не совпадает с максимальным значением выборки (часто распространенная ошибка, допускаемая студентами, строящими график функции «от руки»).



Фиг. 13. Эмпирические и теоретические точки

Близость выравнивающих частот к наблюдаемым подтверждает правильность допущения о том, что обследуемый признак распределен нормально.

Заключение

Нами был проведен анализ роста студентов АНО ВО МРСЭИ, их учёт и статистическое распределение. Для анализа статистических данных был применен калькулятор CASIO fx-CG20, который очень упрощает работу при решении задач, помогает экономить время и избегать вычислительных ошибок.

В связи с этим хотелось бы отметить, что ведущая роль математики в образовании обусловлена тем, что именно она вырабатывает навыки ДОБЫВАТЬ знания через формирование логико-доказательной базы, методов решения задач и т.д. Наш опыт применения калькуляторов в учебном процессе показал: дидактические возможности встроенного программного обеспечения CASIO fx-CG20 не уступают известным пакетам MathCad, Mathematica, Excel и т.п., а по удобству применения учебном процессе и цене значительно превосходят персональный компьютер. Применение указанных технологий позволяет использовать статистические данные из открытых источников, что меняет содержание традиционных учебных курсов. Все это дает возможность преподавателям МРСЭИ обновить содержание традиционно читаемых математических и экономических курсов и готовить конкурентноспособных специалистов.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Gmurman V. E. (2005). Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika: Ucheb. posobiye dlya vuzov / V.E. Gmurman. – 11-ye izd., ster. – M.: Vyssh.shk., – 479 s.
2. Minayeva S. S., Nikitina N. S., Smekalin D. O., Grudzinskiy A. V. /pod redaktsiyey Vostroknutova I. E. (2011). Resheniye zadach po statistike s ispolzovaniyem malykh vychislitelnykh sredstv: metodicheskiye rekomendatsii k izucheniyu statisticheskogo materiala v 7 – 9 klassah. –M.: Navigator, -116 s.

PARTICIPATION OF THE UNIVERSITY OF ECONOMICS – VARNA IN THE NATIONAL MATHEMATICS OLYMPIAD FOR UNIVERSITY STUDENTS (2016-2022)

Prof. Rosen Nikolaev, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Chief Assist. Prof. Yordan Petkov, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *In this paper, an attempt has been made to outline the place and role of the University of Economics - Varna in the most significant student math competition in Bulgaria - the National Mathematics Olympiad for University Students. Therefore, the performance of the students in the last six editions of the competition was tracked. The role of university teachers in the Olympiad is demonstrated through a selection of problems that have been proposed and found a place in the competition themes over the years. Methodological solutions to these problems are also presented.*

Keywords*: Education; Mathematics; Methodology; Olympiad*

JEL code: *C00, I23*

УЧАСТИЯ НА ИКОНОМИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА В НАЦИОНАЛНАТА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА (2016-2022 Г.)

Проф. д-р Росен Николаев
Икономически университет – Варна, България

Гл. ас. д-р Йордан Петков
Икономически университет – Варна, България

Въведение

Националната студентска олимпиада по математика (НСОМ) е най-голямото и престижно състезание по математика между студенти от бакалавърски и магистърски програми в България. Ясен показател за значимостта ѝ е както нарастващият брой участващи университети от страната, така и привличането на чуждестранни участници през последните години. Олимпиадата се организира от 1974 г. от висшите училища в страната със съдействието на Министерството на образованието и науката, Националното представителство на студентските съвети в Република България и Фондация „Еврика”. Съгласно регламента на състезанието (2022 (1)), целта му е да се повишава интересът на студентите към математиката и да се създават условия за обмен на опит сред преподавателските екипи. Форумът събира най-добрите студенти с интереси в областта на математиката от цялата страна. Те се разпределят в три състезателни групи в зависимост от хорариума по математически дисциплини, изучавани в първи курс: *група А* – математика, информатика и компютърни науки (≥ 420 учебни часа); *група Б* – природни и технически науки, сигурност и отбрана (≤ 420, но ≥ 241 учебни часа); *група В* – всички неизброени в групи *А* и *Б* (≤ 240 учебни часа). В последната група попадат всички специалности в Икономически университет – Варна. Конспектите на трите групи (2022 (2)) включват теми от фундаменталните математически дисциплини, заложени в учебните планове на специалностите от различни научни направления в различните висши училища, като алгебра, аналитична геометрия, анализ и теория на вероятностите.

Икономически университет – Варна е редовен и един от най-активните участници в НСОМ. Студенти от висшето училище традиционно заемат челни места в група *В*, в която основни конкуренти са Стопански факултет на СУ „Климент Охридски“, Висше училище по застраховане и финанси и УНСС.

Подборът и подготовката на студенти от Икономически университет – Варна за участие в олимпиадата преминава през провеждането на два вътрешни подборни кръга и допълнителни занятия с избраните студенти върху темите, включени в конспектите на състезанието (Господинова и Ангелов, 2015; Николаев, Петков и Господинова, 2016). Дългогодишен отговорник за провеждане на вътрешните кръгове, за подготовката, както и ръководител на отборите за националната олимпиада е проф. д-р Росен Николаев. От 2006 г. тези функции се изпълняват предимно от гл. ас. д-р Йордан Петков, а през 2022 г. ръководител на отбора е гл. ас. д-р Деян Михайлов. По отношение участието на членове на катедрата в организирането и провеждането на НСОМ, през разглеждания период проф. д-р Росен Николаев е неизменно член на Националната комисия – основен ръководен орган за организиране и провеждане на олимпиадата, както и на Националното жури. Член на Националната комисия и Националното жури през 2021 г. и 2022 г. е и гл. ас. д-р Йордан Петков.

Настоящият доклад има предимно обзорен характер и цели да представи участието на ИУ-Варна в НСОМ както от страна на студентите-състезатели, така и от страна на преподаватели от катедра „Статистика и приложна математика“. Той представлява естествено продължение на публикация на същите автори от 2015 г. (Николаев и Петков, 2015).

1. Представяне на студентите от Икономически университет - Варна на НСОМ в периода 2016 - 2022 г.

Ще направим кратка ретроспекция на представянето на студентите от ИУ-Варна на НСОМ през последните шест години.

На проведената през 2016 г. олимпиада ИУ-Варна участва с два отбора – един в група *Б* и един в група *В*. В отборното класиране и в класирането по висши училища в група *В* отборът на ИУ-Варна зае второ място след Стопански факултет на СУ „Климент Охридски“. В индивидуалното класиране на същата група бяха спечелени 1 сребърен и 3 бронзови медала. Бронзов медал завоюва и един от участниците в група *Б*.

През 2017 г. ИУ-Варна е представен от един отбор в група *В* с четири участника. Както в отборното класиране, така и в класирането по висши училища, те печелят първо място, следвани от Стопански факултет на СУ „Св. Климент Охридски” и Висше училище по застраховане и финанси. В индивидуалното класиране са завоювани 1 златен медал (първо място) и 2 бронзови медала.

През 2018 г. отборът на ИУ-Варна заема второ място в отборното класиране и класирането по висши училища на група *В*, след Технически университет - Варна и с равен брой точки с Висшето училище по застраховане и финанси. В индивидуалното класиране на същата група са спечелени 1 златен, 1 сребърен и 3 бронзови медала.

През 2019 г. ИУ-Варна е представляван от отбор с пет участника в група *В*. Всички те печелят отличия в индивидуалното класиране – 3 сребърни и 2 бронзови медала. Това се оказва достатъчно да заемат и първите места в отборното класиране и класирането по висши училища в тази група.

На домакинската олимпиада през 2021 г. ИУ-Варна участва с отбор от четирима студенти в група *В*. Спечелени са 1 сребърен и 1 бронзов медал. Университетът заема втори места в отборното класиране и в класирането по висши училища - след Стопански факултет на СУ „Св. Климент Охридски”.

На Националната студентска олимпиада по математика през 2022 г. ИУ-Варна участва с един отбор в група *В*, като заема трето място в отборното класиране и в класирането по висши училища - след УНСС и Стопански факултет на СУ „Св. Климент Охридски”. Спечелени са и три отличия в индивидуалното класиране – 1 златен и 2 сребърни медала.

Направената равносметка дава основание да заключим, че представянето на студентите от Икономически университет - Варна на НСОМ продължава да бъде изключително успешно и през разглеждания период. В последните шест издания на олимпиадата те са завоювали общо 23 медала, от които 3 златни, 8 сребърни и 12 бронзови. Освен това отборите на университета са попадали 6 пъти в челната тройка на отборните класирания и класиранията по висши училища, като два пъти са печелили първо място, три пъти второ място и един път трето място.

2. Участие на преподаватели от катедра „Статистика и приложна математика“ в организирането и провеждането на НСОМ в периода 2016-2022 г.

Представители на катедра „Статистика и приложна математика“ продължават традицията да участват дейно в организирането и провеждането на НСОМ през разглеждания период.

Икономически университет – Варна е домакин и основен организатор на НСОМ-2021, която се проведе след едногодишно прекъсване, предизвикано от Covid-19 пандемията и беше посветена на 100-годишнината на висшето училище.

Освен това, както беше споменато, представители на катедрата участват неизменно в Националното жури на състезанието, като седем задачи, предложени от тях, са избирани в състезателните теми за групи *Б* и *В*. Това прави приблизително 12% от всички състезателни задачи за последните шест години.

При съставянето и предлагането на задачи за НСОМ авторите са се водили от следните свои разбирания, подкрепяни и от други техни колеги (Гроздев и Ненков, 2014):

- Задачите за олимпиада трябва да дават възможност за проявяване на творчество и нестандартно мислене от страна на състезателите. Ето защо е желателно те да предполагат наличието на повече от един метод за намиране на решение.

- Освен състезателен характер, олимпиадите имат и сериозен принос за повишаване на подготовката на част от студентите и учениците. Затова е важно задачите да бъдат такива, че да имат характер на малко научно изследване, като до решението на състезателна задача следва да се достига с използване на знания от различни дялове на математиката.

В по-нататъшното изложение ще представим на вниманието на читателя тези авторски задачи, придружени с методически решения. Решения на някои от тях са предложени и в други публикации с участието на авторите (Гроздев, Николаев и Ненков, 2017; Гроздев и кол., 2018; Йорданов и кол., 2022).

Задача 1 (НСОМ-2016, група Б). Дадена е детерминантата

$$D_n(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

а) Да се реши уравнението $D_3(\cos t)=0$.

б) Да се докаже, че $D_n(x)=(x-1)^{n-1}(x+n-1)$ и да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)=D_n(x)$.

Решение.

а) $$D_3(\cos t)=\begin{vmatrix} \cos t & 1 & 1 \\ 1 & \cos t & 1 \\ 1 & 1 & \cos t \end{vmatrix}=\cos^3 t-3\cos t+2=0 \Leftrightarrow (\cos t-1)^2(\cos t+2)=0$$

$\Rightarrow \cos t=1 \Rightarrow t=2l\pi, l\in\mathbb{Z}$.

б) Прибавяме всички стълбове от втория до n-тия към първия стълб на детерминантата и получаваме

$$D_n(x)=\begin{vmatrix} x+n-1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x+n-1 & x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x+n-1 & 1 & x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x+n-1 & 1 & 1 & x & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x+n-1 & 1 & 1 & 1 & \dots & x & 1 \\ x+n-1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

Сега умножаваме първия ред по (-1) и го прибавяме към останалите. Детерминантата се преобразува в триъгълна и

$$D_n(x)=\begin{vmatrix} x+n-1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-1 \end{vmatrix}=(x+n-1)(x-1)^{n-1}.$$

При $n=1$, $f(x)=x$ и няма локални екстремуми. При $n>1$, $f'(x)=n(x-1)^{n-2}(x+n-2)$. Ако n – четно, то функцията $f(x)$ намалява за $x\in(-\infty,2-n)$ и расте за $x\in(2-n,+\infty)$. Следователно $f_{\min}(x)=f(2-n)=(1-n)^{n-1}$. Ако n – нечетно, то функцията $f(x)$ расте за $x\in(-\infty,2-n)\cup(1,+\infty)$ и намалява за $x\in(2-n,1)$. Следователно $f_{\min}(x)=f(1)=0$ и $f_{\max}(x)=f(2-n)=(1-n)^{n-1}$.

Задача 2 (НСОМ-2016, група В). Дадени са точките A(-1,-1) и B(3,3) и окръжност $k: x^2+(y-5)^2=R^2$ с радиус R.

а) Да се намери R, така че правата AB да се допира до k.

б) Ако R=1 и точка C лежи на k, да се намери минималното лице на триъгълник ABC.

Решение.

а) Уравнението на правата AB е $y = x$. Системата

$$\left|\begin{array}{l} y=x \\ x^2+(y-5)^2=1 \end{array}\right.$$

трябва да има единствено решение, т.е. дискриминантата на уравнението $2x^2-10x+25-R^2=0$ трябва да е равна на нула, или $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

б) Лицето на триъгълник ABC е равно на

$$S(h_c)=\frac{|AB|.h_c}{2}=2\sqrt{2}h_c$$

и е минимално, когато дължината на височината h_c е минимална. Следователно точка C лежи на по-близката допирателна t към окръжността, успоредна на правата AB: $y=x$. Уравнението на t е $y=x+n$, като n намираме от условието системата

$$\left|\begin{array}{l} y=x+n \\ x^2+(y-5)^2=1 \end{array}\right.$$

да има единствено решение, т.е. $n=5-\sqrt{2}$. Тогава $h_c=d(AB,t)=\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ и

$$\min S(h_c)=S\left(\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=2(5-\sqrt{2})..$$

Забележка. Подточка б) може да се реши и чрез условен екстремум на функция. Ако означим $C(x_c, y_c)$, то следва да се намери минимумът на функцията $S(x_c, y_c)$ при условие $x_c^2 + (y_c - 5)^2 = 1$.

Задача 3 (НСОМ-2017, група Б). Дадена е функцията $f(x) = e^x$.

а) Да се намери уравнението на права t_1, която е допирателна към графиката на $f(x)$ в точка с абсциса x=0.

б) Да се докаже, че правата $t_2 : y = ex$ е допирателна към графиката на $f(x)$.

в) Да се намери лицето на фигурата, ограничена правите t_1 и t_2, и от графиката на $f(x)$.

Решение.

а) Тъй като $f(0) = 1$ и $f'(x) = e^x$, $f'(0) = 1$, то t_1 има уравнение $y - 1 = 1.(x - 0)$ или $t_1 : y = x + 1$.

б) Равенството $e^x = ex$ е изпълнено за x=1 и тогава допирателната към графиката на $f(x)$ в точка с абсциса 1 е $y - e = e.(x - 1)$, т.е. t_2.

в) Ще използваме точките O, A(1,0), B(1,e), C(0,1) и пресечната точка $D\left(\dfrac{1}{e-1}, \dfrac{e}{e-1}\right)$ на t_1 и t_2.

Нека S_0 е лицето на криволинейния трапец $\left| \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le e^x \end{array} \right.$.

Тогава търсеното лице е $S = S_0 - S_{\Delta OAB} - S_{\Delta COD}$. Намираме:

$$S_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1,\ S_{\Delta OAB} = \frac{e}{2},\ S_{\Delta COD} = \frac{1}{2(e-1)}.$$

Сега $S = \dfrac{e^2 - 3e + 1}{2(e-1)}$.

Задача 4 (НСОМ-2017, група В). Дадени са матриците $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$ и $B = \begin{Vmatrix} x & -2y \\ y & x \end{Vmatrix}$, където x и y са реални числа.

а) Да се намери детерминантата D на матрицата $A.B$.

б) Да се докаже, че точките $M(x,y)$, за които уравнението $3D.u^2+D.u+3=0$ няма реални корени, лежат във вътрешността на елипса. Да се определят дължините на осите на елипсата.

в) Ако $x^2 + y^2 \ne 0$ и $A^{2018}.B = B^{2018}.A$, да се докаже, че $A^{2017} = B^{2017}$.

Решение.

а) За детерминантите на A и B имаме съответно $\det A = 3$ и $\det B = x^2 + 2y^2$. Следователно $D = \det A . \det B = 3\left(x^2 + 2y^2\right)$.

б) Дискриминантата на уравнението $3D.u^2+D.u+3=0$ е

$D_0 = D^2 - 36D = 9\left(x^2 + 2y^2\right)\left(x^2 + 2y^2 - 12\right)$.

Разглежданото уравнение няма реални корени, когато $D_0 < 0$. Следователно е изпълнено неравенството $x^2 + 2y^2 - 12 < 0$. Последното неравенство записваме във вида

$$\frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} < 1.$$

Следователно точките $M(x,y)$ лежат във вътрешността на елипсата $\frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} = 1$, полуосите a и b на която имат дължини $a = 2\sqrt{3}, b = \sqrt{6}$. Дължините на осите ѝ са $2a = 4\sqrt{3}, 2b = 2\sqrt{6}$.

в) Равенството $A^{2018}.B = B^{2018}.A$ записваме във вида $A^{2017}.\left(A.B\right) = B^{2017}.\left(B.A\right)$. Тъй като $A.B = B.A = \begin{pmatrix} x+2y & 2(x-y) \\ -(x-y) & x+2y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $A^{2017} = B^{2017}$.

Задача 5 (НСОМ-2019, група B). Дадена е матрицата $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a,b \in N$.

а) Да се намери A^3.

б) Да се намери A^n, $n \in N$.

б) Да се докаже, че ако ab се дели на $a+b$, то и сумата от елементите на матрицата A^{2019} се дели на $a+b$.

Решение.

а) Намираме последователно $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a\left(a+b\right) \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$ и $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a\left(a^2+ab+b^2\right) \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$.

б) Допускаме, че $A^n = \begin{pmatrix} a^n & a.\sum\limits_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}.b^i \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.

Тогава $A^{n+1} = A^n.A = \begin{pmatrix} a^{n+1} & a.\sum\limits_{i=0}^{n} a^{n-i}.b^i \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}$. От принципа на пълната математическа индукция следва, че допускането е вярно.

в) Сумата от елементите на матрицата A^{2019} е равна на

$S = a^{2019} + b^{2019} + a\left(a^{2018} + a^{2017}b + ... + ab^{2017} + b^{2018}\right) = (a+b)P + a\left(a^{2018} + b^{2018}\right) + a.abQ.$

Тъй като ab се дели на $a+b$, то $ab = R(a+b)$ и $S = (a+b)P + a\left(a^{2018} + b^{2018}\right) + a.(a+b)QR = (a+b)\left(P + aQR\right) + a\left(a^{2018} + b^{2018}\right)$.

Тъй като първото събираемо се дели на $a+b$, то е достатъчно да покажем, че $a^{2018} + b^{2018}$ се дели на $a+b$. От развитието на $(a+b)^{2018}$ в Нютонов бином имаме:

$(a+b)^{2018} = a^{2018} + C_{2018}^1 a^{2017} b + C_{2018}^2 a^{2016} b^2 + ... + C_{2018}^{2017} ab^{2017} + b^{2018}$.

Очевидно лявата страна на равенството се дели на $a+b$. Освен това, всяко от събираемите в дясната страна, с изключение на първото и последното, също се дели на $a+b$ (по условие ab се дели на $a+b$). Следователно и $a^{2018}+b^{2018}$ се дели на $a+b$.

Задача 6 (НСОМ-2021, група В). Дадени са функциите

$$f(x)=ax^3-2bx^2+(4+c)x+d-2 \text{ и } g(x)=x^3-2x^2+ax-2a-3b+1,$$

където a, b, c и d са реални параметри. Да се намерят стойностите на параметрите a, b, c и d, за които всяка от функциите има в точката $x=1$ локален минимум, равен на 5.

Решение.

От условието следва, че:

$$\begin{cases} f(1)=a-2b+c+d+2=5 \\ g(1)=-a-3b=5 \\ f'(1)=3a-4b+c+4=0 \\ g'(1)=-1+a=0 \end{cases}.$$

Решението на системата е $a=1; b=-2; c=-15; d=13$.

Наистина, всяка от функциите $f(x)=x^3+4x^2-11x+11$ и $g(x)=x^3-2x^2+x+5$ има локален минимум при $x=1$, тъй като $f'(1)=0$ и $f''(1)=12.1+8=20>0$, $g'(1)=0$ и $g''(1)=12.1-4=8>0$.

Задача 7 (НСОМ-2022, група В). Точка M лежи върху графиката на функцията $f(x)=3x^3$, а точка N лежи върху графиката на функцията $g(x)=x-2$.

а) Да се намери броят на пресечните точки на на графиките на $f(x)$ и $g(x)$.

б) Да се намери минималната дължина на отсечката MN, при условие че точките M и N имат неотрицателни абсциси.

Решение.

а) Уравнението $f(x)=g(x)$ е еквивалентно на $3x^3-x+2=0$ или $(x+1)(3x^2-3x+2)=0$ с единствено решение $x=-1$. Следователно двете графики имат една пресечна точка: $(-1,-3)$.

<u>Забележка</u>. Броят на пресечните точки може да се определи и като се изследва функцията $F(x)=3x^3-x+2$.

б) Минималната дължина на отсечката MN е равна на разстоянието от правата $g: y=x-2$ до допирателната t към графиката на функцията $f(x)$, успоредна на g. Ъгловият коефициент на правата g е $k_g=1$, а $f'(x)=9x^2$. От равенството $1=9x^2$ и условието за неотрицателност на абсцисата на точка M намираме $x=\frac{1}{3}$, $y=3.\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{9}$, т.е. $M\left(\frac{1}{3},\frac{1}{9}\right)$ и следователно най-малката стойност на $|MN|$ е равно на разстоянието от M до правата g или

$$\min|MN|=\left|\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-2}{\sqrt{2}}\right|=\frac{8\sqrt{2}}{9}.$$

Заключение

Казаното дотук затвърждава констатацията, че катедра „Статистика и приложна математика” продължава да работи активно с талантливи студенти от всички специалности на Икономически университет – Варна с интереси в областта на математиката, като тяхната подготовка и участие в Националната олимпиада заемат важна част от нейната дейност. Това намира отражение както при съставяне на учебните планове по задължителните математически дисциплини, така и при съставяне на учебници и учебни помагала, като целта е нашите студенти да получат същата възможност за подготовка както техните колеги от другите висши училища. Не на последно място считаме, че традициите и успехите в това и други подобни състезания са добра мотивация за студентите да работят по-усилено в областта на математиката и средство да се преодолее отливът на желаещи да се занимават с тази наука, което ще даде положително отражение и в другите области на познанието.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Gospodinova, N., A. Angelov. (2015). Nyakoi osobenosti pri podbora i podgotovkata na studenti ot Ikonomicheski universitet - Varna za Natsionalnata studentska olimpiada po matematika. // Matematikata kato fundamentalna i prilozhna nauka : Sb. s dokl. ot mezhdunar. nauch.-prakt. konf. : Posvetena na 45 g. kat. "Prilozhna matematika". - Varna : Univ. izd. Nauka i ikonomika. - s. 409 - 417.
2. Grozdev, S., V. Nenkov. (2014). Nyakoi metodicheski podhodi za systavyane na zadachi za olimpiadi. „Matematika i informatika“, kn. 3, s. 309-316.
3. Grozdev, S., Nikolaev, R., Nenkov, V. (2017). Natsionalna studentska olimpiada po matematika. Matematika i informatika, Sofia: Az Buki, 3, s. 291 – 294.
4. Grozdev, S., Nikolaev, R., Stoilova, S., Nenkov, V. (2018). Chetirideset i peta natsionalna studentska olimpiada po matematika. Matematika i informatika, Sofia: Az Buki, 61, 3, 294 - 298.
5. Nikolaev, R., Y. Petkov. (2015). Myasto i rolya na Ikonomicheski universitet - Varna v Natsionalnata studentska olimpiada po matematika. // Matematikata kato fundamentalna i prilozhna nauka : Sb. s dokl. ot mezhdunar. nauch.-prakt. konf. : Posvetena na 45 g. kat. "Prilozhna matematika". - Varna : Univ. izd. Nauka i ikonomika. - s. 343 - 366.
6. Nikolaev, R., Y. Petkov, N. Gospodinova. (2016). Studentski matematicheski systezaniya. Izdatelstvo "MOOREA".
7. Nsom.fmi.uni-sofia.bg. (2022). [online] Available at: <https://nsom.fmi.uni-sofia.bg/sites/default/files/images/%D0%A0%D0%95%D0%93%D0%9B%D0%90%D0%9C%D0%95%D0%9D%D0%A2%202020.pdf> [Accessed 17 September 2022]. (1)
8. Nsom.fmi.uni-sofia.bg. (2022). [online] Available at: < https://nsom.fmi.uni-sofia.bg/konspekt > [Accessed 17 September 2022]. (2)
9. Yordanov, I., Gushev, V., Petkov, Y., Nikolaev, R., Grozdev, S. (2022). Natsionalna studentska olimpiada po matematika‘2022 - metodicheski resheniya na zadachite za grupa „V“. Matematika Plyus, Sofiya: Asotsiatsiya za razvitie na obrazovanieto, 30, 2, 40-47.

PROBLEMS IN TEACHING OF MATHEMATICS IN ENGINEERING SPECIALITIES AT NIKOLA VAPTSAROV NAVAL ACADEMY

Assoc. Prof. Tatyana Madzharova, PhD
Department Mechatronics, Nikola Vaptsarov Naval Academy, Bulgaria

Abstract: *The article analyzes the problems in teaching of mathematics of the students and cadets from the computer and marine engineering specialties. The usefulness of mathematics for the formation of professional competences in these specialties and its importance for the future professional career of the trainees are indicated. The experience of the teachers and the difficulties they had to overcome is shared. There are given some recommendations for improving the teaching process in order to increase the motivation and effectiveness of mathematics education.*

Keywords*: Professional competences; Teaching of mathematics; Experiens*

JEL code: *I21, I23*

ПРОБЛЕМИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА В ИНЖЕНЕРНИТЕ СПЕЦИАЛНОСТИ ВЪВ ВВМУ „Н. Й. ВАПЦАРОВ“

Доц. д-р Татяна Маджарова
Катедра Мехатроника, ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“, България

Въведение

Морската индустрия бележи ръст в последните години. Увеличава се броят на корабите. Тази тенденция се потвърждава от дългосрочните прогнози за развитието на този сектор. Този факт води до необходимостта от повече висококвалифицирани кадри, а следователно и от качествено морско образование.

Основна цел на обучението на морски специалисти е придобиването на социална и професионална компетентност, способност да управляват съвременни технологични средства и хора, да се ориентират във всякакви, включително екстремни, ситуации и да вземат правилните ефективни решения. Образователната институция трябва да осигури условия за формиране на личност с висока обща култура, фундаментална професионална подготовка, готовност за самостоятелно овладяване на нови знания и овладяване на ново оборудване и технологии в процеса на обучение.

Корабният механик и електромеханик трябва да бъде еднакво квалифициран за решаване на практически проблеми, свързани с различни видове дейности – корабоплаване и риболов, техническа експлоатация на кораба и търговско-икономически и правни дейности. Когато корабът е в морето, проблемите трябва да бъдат решени от морския специалист, тъй като там всеки отговаря за определени видове дейности и е невъзможно да се получи квалифицирана помощ отвън. Следователно морските специалисти трябва да имат добра методическа подготовка, която изисква развитие на аналитично мислене, използване на знания по различни теми и търсене на ефективни начини за решаване на тези проблеми.

Математиката има голям принос за развитието на аналитичното мислене и осигурява фундаменталната подготовка за изучаването на инженерните дисциплини. Затова е залегнала в учебните планове на всички технически университети (Grigoryeva, 2009).

1. Проблеми в обучението по математика

Слаба подготовка по математика от средното училище на преобладаващата част от студенти и курсанти

Основният проблем, с който се сблъскваме още в началото, е слабата подготовка по математика и липса на желание за учене на новоприетите студенти и курсанти от средните училища. Още в училище, а след това и в университета обучаемите не осъзнават значението на математиката за потенциалната им професионална кариера. Учениците, които изберат да не приемат математиката на сериозно или да я игнорират в гимназията и университета, губят много бъдещи възможности за кариера. Те по същество обръщат гръб на повече от половината пазар на труда (Akakpo, 2016).

Навлизането на информационните технологии в икономиката и бита на хората доведе до появата на нови професии, които са по – предпочитани и добре заплатени на пазара на труда. Морските професии вече не са така атрактивни и желани от младите хора. Така в последните години във Висшето военноморско училище „Н. Й. Вапцаров“ се приемат за студенти кандидати с по – нисък бал. При това единици от кандидатите са избрали да се явят на матура по математика. Повечето от приетите студенти имат съществени пропуски от средното училище и срещат трудности при обучението си по тази дисциплина.

Липса на градивни контакти със средните училища

Контактите между ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“ и средните училища се свеждат до кандидатстудентските кампании, на които учениците се запознават със специалностите и възможностите за професионална реализация. Има средни училища, в които учениците традиционно избират да продължат образованието си във ВВМУ. Организирането на подготвителни курсове от преподаватели по математика във ВВМУ ще бъде полезно за кандидатстващите. Така преходът от средното към висшето училище ще бъде по – лесен и проблемите с обучението им по математика в голяма степен ще се решат (Dishlieva, 2014).

Липса на мотивация за изучаване на математиката в инженерните специалности

Математическите дисциплини се изучават в първи и втори курс, т.е. в началото на тяхното обучение. Все още те нямат представа от специалността, която са избрали и важността на математиката за инженерните дисциплини, които им предстои да изучават. Голяма част от тях смятат, че изучаването на математиката е ненужно. Често пъти те задават въпроса „За какво ми трябва да уча математика? На кораба аз няма да решавам интеграли“. Липсата на мотивация за учене е изключително важен проблем, с който се сблъскваме. В първи и втори курс те все още не изучават специални дисциплини и е трудно да им се дадат примери от специалността, за да се мотивират. Възможността да преминат по –

нагоре с невзети изпити по математика е причина много от тях изобщо да не се явяват на изпит или да се явят, но без да влагат усилия да се подготвят.

В специалностите Информационни и комуникационни технологии и Киберсигурност, където по учебен план се започва с изучаването на специални дисциплини и студентите и курсантите са приети с по – висок бал не се наблюдава такава тенденция. Там причините за трудността при усвояването на математическите знания са единствено поради натрупани пропуски в обучението им в средното училище.

Намаляване на хорариума часове по математика

Изискванията на Международната морска организация (IMO) наложиха да се включат в учебните планове на бъдещите корабни механици и електромеханици редица дисциплини, които са важни за бъдещата им професионална подготовка. Това наложи да се намали хорариумът по фундаменталните дисциплини, в това число и на математиката. В същото време преподавателите по инженерните дисциплини настояват да се запази изучаваният материал в почти същия обем. Така учебният материал в лекциите беше преструктуриран – отпаднаха доказателствата на теореми и някои примери, които спомагаха да се изясни преподаваният материал и да се направи връзка с инженерните дисциплини, които използват този математически апарат. Слабата подготовка от средното училще и намаленият брой практически занятия във ВВМУ създават за някои от студентите непреодолими трудности при подготовката им за изпити по математическите дисциплини.

Липса на контакти между преподавателите от катедрата и колегите от профилиращите катедри

Преподавателите по математика в катедра Мехатроника са висококвалифицирани – с много добра научна и методическа подготовка. Те са професионалисти в областта на математиката, но не са достатъчно компетентни в морските науки. В учебната литература по математика много рядко се намират подходящи примери от инженерните дисциплини. Засилването на контактите с колеги от профилиращите катедри би било от полза както за обучението по математика на бъдещите механици и електромеханици, така и за обучението по инженерните дисциплини.

2. Препоръки за повишаване на ефективността на обучението по математика

Задълбочаването на връзките със средните училища с организирането на курсове и оказване на методическа помощ на учителите ще повиши подготвеността на бъдещите студенти и курсанти за усвояването на математиката в курсовете във ВВМУ.

При обучението по математика се използват традиционните за тази образователна степен методи – лекции, практически занятия, контролни работи и самостоятелна работа на студентите и курсантите.

Наред с дефинирането на математическите понятия и формулирането на основните твърдения на лекциите по математика студентите получават представа за историческото развитие на математическите науки, за задачите, поставени им от естествените науки за разрешаване, за връзката на математиката с практиката, за неизбежността на развитието ѝ и много други. За да се постигнат тези цели се стремим да поставим студентите в активна позиция. Проблемното изложение на учебния материал позволява да се повиши познавателния интерес и активността на обучаемите.

Използването на информационните технологии по време на лекцията ще спести време, ще даде възможност за онагледяване на математическите понятия и теореми, ще подпомогне студентите и курсантите в усвояването на преподавания материал и ще повиши мотивацията им.

Дейността на морския специалист има колективен характер. Следователно, формирането на такива лични качества като способност за общуване (бизнес комуникация), зачитане на мнението на другите, подчиняване на техните интереси на интересите на екипа, отговорност за обща кауза, способността да влезеш в позицията на друг и да разбереш начина му на мислене, способността да защитиш своята гледна точка и т.н. е от особено значение за развитието на професионалната компетентност на морския специалист. Всички тези качества се постигат в резултат на колективно решаване на образователни проблеми в практическите занятия. По време на практическите занятия протича активен процес на формиране на специалисти. Знанията, получени в лекционния курс, се задълбочават и разширяват, теорията се свързва с практиката и приложенията към други науки. Стабилното и съзнателно усвояване на теорията е невъзможно без решаване на задачи и упражнения, които използват понятията и теоремите, представени в лекционния курс. По време на практическите занятия студентите работят самостоятелно или на дъската. Решенията на поставените задачи се обсъждат, предлагат се различни варианти за решение, посочва се кое от тях е рационално. Така те се научават да изразяват решението на компетентен математически език, научават се да следват логиката на разсъждение, посочват се често допускани грешки (Gudelj, 2021).

За да се контролира нивото на усвояване на материала и да се повиши ефективността на обучението в практическите занятия в програмите по математическите дисциплини са предвидени контролни работи. Резултатите от тях се вземат при формиране на изпитната оценка. Преди всяка контролна работа на студентите и курсантите се възлагат индивидуални задачи за самостоятелна работа. Отговорното изпълнение на възложените задачи за самостоятелна работа е предпоставка за успешно постигане на целите на обучението по математика. Ролята на самостоятелната работа при формирането на професионалната компетентност на бъдещия морски специалист е изключително голяма.

От първостепенно значение за ефективността на обучението е засилването на градивните контакти между преподавател и обучаем. Регулярно провежданите консултации със студенти и курсанти дават възможност на преподавателя да установи и попълни някои пропуски в знанията им и да ги подпомогне в усвояването на математическото съдържание. Създаването на служебни мейли на студенти, курсанти и преподаватели в периода на противоепидемичната обстановка в страната даде възможност за по–тесни контакти между преподавател и обучаеми. Студентите задават въпроси, търсят помощ от преподавателя, получават от него допълнителни материали за подготовката си.

В своята работа преподавателят трябва да работи за повишаване на ангажираността на студентите в процеса на обучение.

Усилията на преподавателите са насочени главно към овладяването на учебното съдържание от слабите студенти. Те са основната маса и проблемите, свързани с ефективността на обучението по математика са свързани главно с тях. Необходимо е във всяка студентска група и всяко класно отделение от курсанти да се създаде едно ядро от знаещи студенти. Студентските олимпиади по математика и компютърна математика се една такава форма. Те засилват интереса на студентите и курсантите към математиката. Опитът показва, че студентите и курсантите, които успешно се представят на тези олимпиади, продължават да разширяват своите знания, включват се в проекти по астрономия на Европейската космическа агенция и НАСА, където също заемат призови места. Тяхното представяне мотивира и други техни колеги да разработват реферати, да участват в проекти, в студентски научни сесии и др.

Едно изследване на удовлетвореността от обучението по математика в морските университети в Хърватия, Латвия, Естония и Полша показва, че преподавателите са недоволни от резултатите на студентите на изпитите по математика и от основните знания на студентите, придобити в гимназията. Те предлагат за решаване на този проблем в университетите да бъде включен допълнителен курс по начална математика за студенти с ниско ниво на основни знания, придобити в гимназията.

Резултатите от проучването също показват, че преподавателите използват предимно традиционни методи и инструменти като бяла дъска и маркери, заедно с презентации на Power Point в процеса на преподаване. Тези методи все още издържат, но не са толкова привлекателни за днешните студенти. Преподавателите доста рядко използват ИТ инструменти като уеб страници, тестове и онлайн тестове, видеоклипове, анимации и математически компютърни програми. Много студенти оценяват използваните от преподавателите методи като неподходящи и безинтересни. Преподавателите също рядко свързват теорията и решаването на математически задачи с реални проблеми. Следователно студентите не разбират, че математиката е не само теория, формули, теореми и т.н., но и способността за решаване на реални проблеми.

Проблемите и трудностите в преподаването на математическите дисциплини в инженерните специалности на ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“ са идентични с тези на колегите от морските университети в Хърватия, Латвия, Естония и Полша (Gudelj, 2021).

Заключение

В настоящето преподавателите са изправени пред големи предизвикателства – от една страна студентите и курсантите постъпват със слаба подготовка и липса на навици за учене, а от друга страна морският бизнес има нужда от все по-квалифицирани кадри, с добра инженерна подготовка и познания за работа с високите технологии на съвременните кораби. Трябва да се търсят иновативни подходи в обучението, за да се провокира интересът на обучаемите за овладяване на математическите знания.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Akakpo, G. (2016). The role and relevance of mathematics in the maritime industry, African Journal of Educational Studies in Mathematics and Sciences, Vol. 12, pp. 75-86.
2. Dishlieva, K. (2014). Nyakoi prichini za niskiya uspeh po matematika v tehnicheskite universiteti I predlozheniya za tyahnoto preodolyavane, *Journal of Science and Education Policy*, Vol.8, Number 1, pp. 192-215.
3. Grigoryeva, E. (2009). Formirovanie profesionalyno vazhnih kachestv morskih inzhenerov pri obuchenii po matematike, Astrahan: Avtoreferat.
4. Gudelj, A., et al. (2021). Survey of maritime student satisfaction: a case study on the international student survey to identify the satisfaction of students in mathematical courses, *Pedagogika – Pedagogy*, Vol. 93, Number 6s, pp. 9-23.

IMPORTANCE OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS TRAINING WHEN STUDYING QUANTITATIVE METHODS IN LOGISTICS

Assoc. Prof. Tanka Milkova, PhD
University of Economics – Varna , Bulgaria

Abstract: *Mathematics training in the foundation of higher education in economics is essential in view of this, to create prerequisites for the possibility of learning and skills for the handling of students, with different concepts and methods from the special and specialized disciplines in each specialty. This report will address several key elements of the Applied Mathematics curriculum that are directly related to some of the models and methods being studied under Quantitative Methods in Logistics and which, without fundamental mathematics preparation, will not be absorbed by students at the required level.*

Keywords*: Mathematics; Quantitative methods; Logistics; Training*

JEL code: *C02*

ЗНАЧЕНИЕ НА ФУНДАМЕНТАЛНАТА ПОДГОТОВКА ПО МАТЕМАТИКА ПРИ ИЗУЧАВАНЕ НА КОЛИЧЕСТВЕНИ МЕТОДИ В ЛОГИСТИКАТА

Доц. д-р Танка Милкова
Икономически университет – Варна, България

Обучението по различните фундаментални дисциплини е от съществено значение за осигуряването на качествено висше образование. В зависимост от същността на изучаваната специалност са необходими различни фундаментални познания, но те винаги следва да са подбрани и организирани в различни дисциплини така, че да осигуряват необходимите познания на студентите, които да им позволят да изучават специалните дисциплини на необходимото високо ниво. Изучаването в дълбочина на специалните дисциплини и възможността да бъдат осъзнати смисъла и логиката на процесите е необходимо за изграждането на добре подготвени и адаптивни специалисти във всяко едно направление (Николаев и Станчева, 2015 (1); Николаев и Станчева, 2015 (2); Николаев и Станчева, 2014; Николаев, Ангелов и Йорданов, 2014; Николаев и Господинова, 2014; Николаев и Господинова, 2013; Николаев, 2011; Николаев и Каракулаков, 2007). Вниманието ни в настоящия доклад ще бъде насочено към фундаменталната дисциплината Приложна математика (Николаев и кол., 2021), която се изучава във фундамента на всички специалности от областта на висше образование „Социални, стопански и правни науки“ в Икономически университет – Варна. Ще бъде разгледано значението на тази фундаментална дисциплина за успешното усвояване на специалните знания по дисциплината Количествени методи в логистиката, изучавани от студентите в специалност Логистика.

Целта на автора в настоящия доклад е да покаже връзката между фундаменталната дисциплина Приложна математика и специалната дисциплина Количествени методи в логистиката, изучавана от студентите в специалност

Логистика в Икономически университет – Варна. За постигане на тази цел ще бъдат разгледани някои конкретни количествени модели и методи в логистиката и ще бъде показано, че за тяхното успешно усвояване и прилагане с разбиране са необходими различни познания от фундаменталната дисциплина Приложна математика.

Моделите и методите от количествените методи в логистиката, както и използваният в тях математически апарат няма да бъдат описвани детайлно, а по-скоро от гледна точка на това, да се изясни връзката между тях и значението на познаването на математическия апарат за доброто възприемане и разбиране на количествените модели и методи.

Първо ще разгледаме един от основните модели в областта на количествените методи в логистиката[1], а именно задачата на линейното оптимиране и нейното приложение за конструиране на оптимална производствена програма (Атанасов и Милкова, 2011). С илюстративна цел тук ще представим един конкретен пример за определяне на оптимална производствена програма при производство на два продукта с използване на четири ресурса. Ще отбележим само, че задачата за съставяне на оптимална производствена програма може да се обобщи за случая на производство на n вида продукти с използване на m вида ресурси.

Пример. За производство на два вида продукта P_1 и P_2 се използват четири вида ресурси R_1, R_2, R_3 и R_4. Наличностите от ресурси, количеството единици ресурси, изразходвано за производството на единица от всеки продукт, са дадени в таблица 1 (стойностите са условни).

Таблица 1

Видове ресурси, наличности, разходни норми

Видове ресурси	Наличности	Разходни норми за единица продукт	
		P_1	P_2
R_1	14	2	1
R_2	16	1	2
R_3	15	3	–
R_4	21	–	3

Източник: *Съставена от автора*

Печалбата от реализацията на единица продукт от вида P_1 и P_2 е съответно, 2 лв. и 3 лв. Необходимо е да се състави план за производство на продуктите P_1 и P_2, при който печалбата от тяхната реализация ще бъде максимална.

Трябва да подчертаем, че за построяването на икономико-математическия модел на задачата са много важни и необходими познания от аналитичната геометрия и умението да се използват възможностите на аналитичната геометрия за моделиране на икономически явления и процеси.

На първо място за да се състави икономико-математическия модел се въвеждат променливите x_1 и x_2, които ще изразяват броя единици продукти

[1] Този модел се преподава и по дисциплината Количествени методи в управлението пред студенти от специалност Мениджмънт в Икономически университет – Варна.

съответно от вида P_1 и P_2, които трябва да бъдат планирани за производство. Следва да се моделират и ограничителните условия на задачата. За производство на тези продукти се използват $(2x_1 + x_2)$ единици ресурси от вида R_1, $(x_1 + 2x_2)$ единици от вида R_2, $3x_1$ единици ресурси от вида R_3 и $3x_2$ единици ресурси от вида R_4. Тъй като тези ресурси са в ограничено количество – съответно 14, 16, 15 и 21 единици, то връзката между използването на ресурсите и техните наличности се определя посредством системата неравенства

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 3x_1 \qquad \le 15, \\ \qquad 3x_2 \le 21. \end{cases} \tag{1}$$

По смисъла на самата задача за променливите е в сила условието

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0. \tag{2}$$

Сумарната печалба Z се формира от $2x_1$ лв. от реализацията на продукта P_1 и $3x_2$ лв. – от реализацията на продукта P_2, т.е.

$$Z = 2x_1 + 3x_2, \tag{3}$$

което на практика е целевата функция в модела, т.е. линейната форма, на която следва да се търси максимумът.

По този начин се достига до линейния икономико-математически модел на задачата с целева функция (3) и ограничителни условия (1) и (2). Целта е да се определят такива стойности на променливите x_1 и x_2 (в общия случай *n* на брой променливи), които максимизират линейната форма (3) и в същото време удовлетворяват условия (1) и (2).

Тук са от съществено значение знанията за системи линейни уравнения и неравенства, за да може да се осъзнае смисълът на понятието допустим план (решение, програма, стратегия) на задачата, а именно съвкупността от числени стойности на неизвестните величини x_1 и x_2 (в общия случай *n* на брой), които удовлетворяват системата от ограничителни условия. Допустим план, за който целевата функция приема екстремалната си стойност, се нарича оптимален.

Аналитичната геометрия е в основата и на алгоритъма за определяне на оптимален план на задачата. Този алгоритъм се нарича графичен метод и позволява представяне на всички закономерности на модела в правоъгълната координатна система, което позволява да бъде нагледно осмислен и напълно осъзнато значението на оптималното решение. Графичният метод се реализира чрез следните стъпки:

а) построява се областта на решение на дадената система линейни неравенства;

1. Областта на решение на неравенство от вида $a_1x_1 + a_2x_2 \le a_0$ $(a_1x_1 + a_2x_2 \ge a_0)$, където $a_0 > 0$, е полуравнината, съдържаща (несъдържаща) началото на координатната система, определена от граничната права $a_1x_1 + a_2x_2 = a_0$, включително точките от тази права.

2. Областта на решение на неравенство от вида $a_1x_1 + a_2x_2 \le 0$ $(a_1x_1 + a_2x_2 \ge 0)$ се определя по следния начин: граничната права на неравенството $(l : a_1x_1 + a_2x_2 = 0)$ минава през началото на координатната система; ако координатите на произволна точка (например, $M(1;0)$) от едната полуравнина, определена от правата l, удовлетворява неравенството $a_1x_1 + a_2x_2 < 0$ $(a_1x_1 + a_2x_2 > 0)$, неговата област е полуравнината, в която лежи тази точка; ако тези координати не удовлетворяват неравенството, неговата област на решение е другата полуравнина, определена от правата l, включително и точките от тази права.

3. Областта на решение на дадена система линейни неравенства с две неизвестни е общата част на полуравнините, определящи областите на решение на съставящите я неравенства.

4. Областите на решение на дадена система линейни неравенства с n неизвестни ($n \ge 3$) е общата част на полупространствата, представляващи областите на решение на съставящите я неравенства.

б) построява се множеството от точки, чиито координати анулират линейната форма, т.е. лежат на правата $l : c_1x_1 + c_2x_2 = 0$;

в) построява се вектор $\vec{c}(c_1, c_2)$ показващ посоката на растене на Z (векторът $\vec{c}(c_1, c_2)$ е перпендикулярен на правата l);

г) придвижва се правата l успоредна сама на себе си, докато срещне точка от областта на решенията:

– ако това придвижване е станало по посока на вектора $\vec{c}$, функцията достига своя минимум в тази точка;

– ако това придвижване е станало в посока, обратна на посоката на вектора $\vec{c}$, функцията достига своя максимум в тази точка;

д) ако X_1^* е последната точка, която среща правата l от областта при успоредното придвижване по посока на вектора $\vec{c}$, то в точката X_1^* линейната форма достига своя максимум;

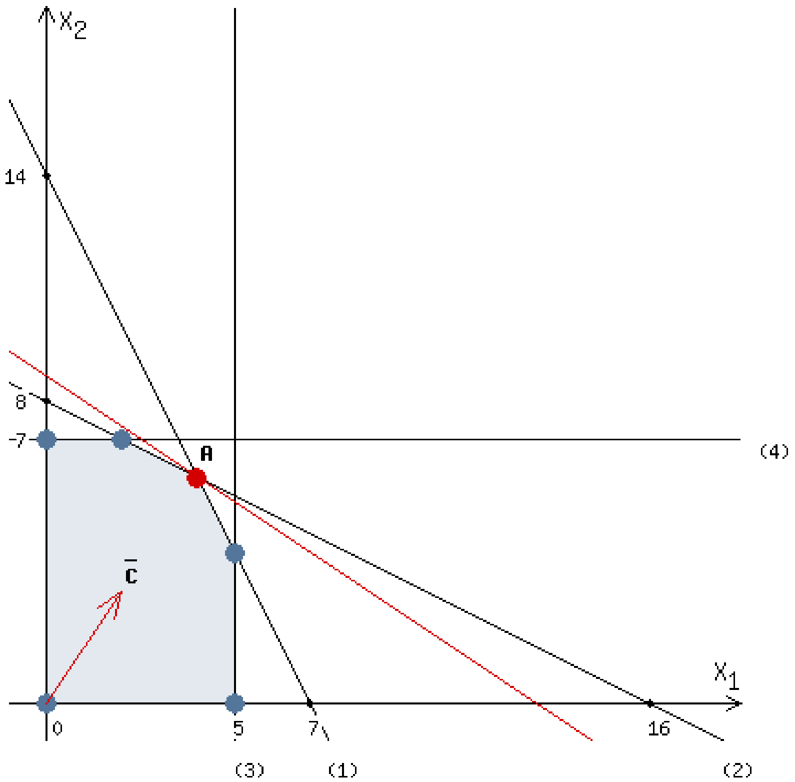
е) ако X_2^* е първата точка, която среща правата l от областта при успоредното придвижване по посока на вектора $\vec{c}$, то в точката X_2^* линейната форма достига своя минимум;

ж) ако при това придвижване на правата l по посока на вектора $\vec{c}$ тя съвпада с някои от граничните прави, то линейната форма приема екстремалната си стойност за всички точки от областта на решенията, които са изпъкнала линейна комбинация на кои да са две точки от тази област;

з) намират се координатите на точките, в които Z достига своята екстремална стойност. Заместват се x_1 и x_2 в Z с получените стойности за x_1 и x_2.

и) ако при придвижване на правата l по посока на вектора $\vec{c}$ не се достига крайна точка, то задачата няма решение поради неограниченост на целевата функция. Същото важи и при придвижване по посока на вектора $-\vec{c}$.

Прилагайки този алгоритъм е намерено решението на представения по-горе пример. Графично решението е изобразено на фиг. 1. Оптималният план на задачата е $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ и $Z = 26$, което означава, че от първия продукт трябва да се произведат 4 единици, от втория продукт трябва да се произведат 6 единици, а това ще осигури максималната възможна печалба от 26 единици.



Фиг. 1. Графично решение на задачата за оптимална производствена програма
Източник: *Съставена от автора*

Разбирането на фундаменталния математически апарат на аналитичната геометрия позволява прилагане на методите на линейното оптимиране с цел определяне на оптимална производствена програма, разбиране и правилно осмисляне на решението, както и дава възможност за модифициране и адаптиране на моделите за всякакви специфични особености на конкретния икономически проблем.

На следващо място ще акцентираме на значението от познанията за функция на една и на повече променливи и умението да се конструират и изследват функции. Умението за свободно боравене с този математически апарат е от съществено значение при изучаване на един от фундаменталните в количествените методи в логистиката модел за управление на запасите при детерминирано търсене, известен като формула на Уилсън (Атанасов и Дочев, 2005; Дыбская и кол., 2008; Стерлигова, 2012). Формулата на Уилсън първоначално е разработена в два варианта, когато не се допуска и когато се допуска недостиг на запаси. Основната идея се свежда до това да се конструира функция, която отчита всички основни разходи за управление на запасите. Доказва се, че тази функция има минимум и с помощта на математическия апарат се определя оптималната стойност на размера на една доставка от запаса, която осигурява минимума на общите разходи. Накратко този модел може да се представи по следния начин:

1) Формула на Уилсън, когато не се допуска недостиг от запаса.

Нека някаква фирма съгласно договорни задължения трябва да предостави на свои клиенти R единици изделия равномерно за период от време T. Фирмата трябва да реши какъв ще бъде интервалът за изпълнението на поредните доставки и техният обем. Доставките се правят през равни интервали от време, всички доставки трябва да са с еднакъв обем и запасът се изразходва равномерно през периода между две доставки. За решаването на поставения проблем се въвеждат означенията:

q – обем на доставката;

c_q – разходи за организиране на една доставка;

c_r – разходи, свързани със съхранението на единица изделие в продължение на единица време;

t – интервал от време между две поредни заявки;

n – брой на доставките, които ще бъдат направени през периода T.

Тогава $n = \frac{R}{q}$, а $t = \frac{T}{n} = \frac{Tq}{R}$.

Приема се, че интервалът от време t има за начало момента, когато в склада на фирмата има q изделия, и край – при отсъствие на запас в склада. Тогава $\frac{q}{2}$ е средното ниво на запаса, тъй като след получаването на поредната заявка запасът намалява равномерно до пълно изчерпване. Следователно разходите за съхранение на запаса за периода t ще бъдат $\frac{c_r}{2R}Tq^2$. Разходите за една доставка изделия са равни на $\frac{c_r}{2R}Tq^2 + c_q$. За определянето на общите разходи за време T ще трябва разходите за една доставка да се умножат по техния брой и така се достига до функцията

$$S = \left(\frac{c_r}{2R}Tq^2 + c_q\right)\frac{R}{q} = \frac{c_r}{2}Tq + \frac{c_q R}{q}, \qquad (4)$$

която представлява функция на една променлива, а именно променливата q, изразяваща обема на една доставка. Първото събираемо в дясната страна на (4) нараства с увеличението на обема на доставката, а второто събираемо – намалява. Това означава, че функцията на общите разходи S има минимум и следва да се определи при какъв обем на една доставка ще се получи той.

За да бъде правилно разбран смисълът на този модел, начинът на конструиране на функцията на общите разходи и значението на определяне на нейния минимум е необходимо студентите да са добре запознати с теоретичните математически постановки за функция на една променлива. Още по-съществено е да са запознати с понятието производна и приложението му при изследване на функция и определяне на нейните екстремуми. За да се определи минимумът на функцията S трябва да се диференцира (4) спрямо q и да се приравни на нула (необходимо условие за съществуване на екстремум) $\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{c_r}{2}T - \frac{c_q R}{q^2} = 0$. Оттук се определя, че $q^* = \sqrt{\frac{2c_q R}{c_r T}}$, т.е. за така намерената стойност q^* функцията S има минимум, тъй като $\frac{\partial^2 S}{\partial q^2} = \frac{2c_q R}{q^3} > 0$ (т.е. втората производна е по-голяма от нула).

След определяне на оптималната стойност q^* се определят и оптимални стойности за брой доставки, интервал от време между доставките, минимум на общите разходи или изработва се цялостна стратегия за управление на запаса. В много случаи се налага този модел да бъде модифициран и адаптиран, за да бъде адекватен на конкретната ситуация, което налага студентите да познават добре математическия апарат, за да могат самостоятелно да решат един реален практически проблем от този характер.

2) Формула на Уилсън, когато се допуска недостиг от запаса.

В този случай се предполага, че част от потребностите не се задоволяват своевременно, а се отлагат. Удовлетворяването на потребностите се осъществява в момента на получаване на следващата заявка. Естествено това отлагане е свързано с разходи, които са пропорционални на обема на тази част от потребностите. Въвежда се нов параметър c_u, изразяващ разходите от отлагане на задоволяването на потребителите с единица изделия за единица време. Интервалът от време между две доставки се разделя на две части, първата се отнася за времето през което има запас, а втората се отнася за времето през което липсва запас. Предвид това, че при постъпване на поредната доставка част от нея се потребява незабавно, то максималният размер на запаса във всеки един момент е по-малък от q и се означава с променлива s. След осъществяване на поредица от аналогични разсъждения отново се конструира функция на общите разходи за управление на запаси, която обаче е функция на две променливи, а именно q и s. Тази функция има вида

$$S(q,s) = \frac{c_r T s^2}{2q} + \frac{c_q R}{q} + \frac{(q-s)^2}{2q} c_u T \ . \qquad (5)$$

Отново възниква потребност от умения за боравене с математическия апарат, за да може да се осъзнае и с разбиране да се приложи методът за търсене на локални екстремуми на функция на две променливи. Този метод е свързан с намиране на първите частни производни спрямо q и s на функцията $S(q,s)$ и тяхното приравняване на нула:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial q} = -\frac{s^2}{2q^2} c_r T + \frac{sq - s^2}{q^2} c_u T - \frac{c_q R}{q^2} = 0 \, , \\ \frac{\partial S}{\partial s} = \frac{c_r T s}{q} - \frac{(q-s)}{q} c_u T = 0 \, . \end{cases}$$

След решаване на системата и доказване, че функцията има минимум се определя, че минималните общи разходи за управление на запаси в този случай ще се получат при размер на една доставка $q^* = \sqrt{\frac{2c_q R}{c_r T}} \cdot \sqrt{\frac{c_r + c_u}{c_u}}$ и тогава

$s^* = \sqrt{\dfrac{2c_q R}{c_r T}} \cdot \sqrt{\dfrac{c_u}{c_r + c_u}}$. Отново следва да се определи цялостна оптимална стратегия за управление на запасите.

Тук отново трябва да подчертаем, че познаването на математическия апарат е наложително, за да може да бъде осъзната логиката на построяване на функцията на общите разходи, нейният смисъл и съдържание на отделните разходни компоненти, както и за да могат да се правят модификации, подходящи за конкретни практически ситуации.

На последно място в настоящата разработка, но не последно въобще и не последно по важност, ще се спрем на значението на теория на вероятностите и случайни величини, заложени във фундаменталната подготовка по Приложна математика, за усвояване на още един модел от количествените методи в логистиката приложим при управление на запасите при случайно търсене (Атанасов и Дочев, 2005). От самото наименование на модела проличава, че той е приложим при наличие на случайни процеси. Известно е, че случайни процеси се моделират и управляват с помощта на елементи от теорията на вероятностите и математическата статистика.

Моделът за управление на запасите при случайно търсене има следната постановка. Предполага се, че фирмата трябва да закупи някакъв вид оборудване. Една от основните резервни части на оборудването е специфична и скъпоструваща, и се налага заедно с основното оборудване да се поръчат и няколко бройки от тази резервна част. Ако се закупят повече бройки, то излишните не се използват или се продават на много ниски цени, което води до загуби. Ако тази резервна част липсва, то се налага извънредното й доставяне, но вече на значително по-висока от първоначалната цена. Означава се с s големината на запаса. Предполага се, че търсенето q за интервала от време T е случайна величина, с известен закон на разпределение $P(q)$ на вероятностите:

q	0	1	2	…	s	…	N
$P(q)$	$P(0)$	$P(1)$	$P(2)$	…	$P(s)$	…	$P(n)$

Възможни са два случая:

1. Търсенето q е по-малко или равно на нивото на запаса, т.е. $q \le s$. Запасът покрива търсенето и $s-q$ бройки ще носят загуби поради излишък c_1 за една единица от тази резервна част.

2. Търсенето q е по-голямо от нивото на запаса, т.е. $q > s$. В този случай възниква необходимост от извънредно попълване на запаса от $q-s$ единици, което води до допълнителни разходи (поради недостиг) от c_2 за една единица от запаса.

Предварително не е известно търсенето q, но се знае разпределението на вероятностите $P(q)$. Тези вероятности се определят на база статистика за вече минали периоди, където пък се налага владеенето на статистически методи. За да се намерят очакваните разходи при дадено ниво на запаса s, трябва да се съберат стойностите на разходите за всяко q, умножени по съответните вероятности $P(q)$. Така се получава функцията на общите разходи, която зависи от размера на запаса, т.е. от променливата s:

$$Q(s) = c_1 \sum_{q=0}^{s} (s-q) P(q) + c_2 \sum_{q=s+1}^{n} (q-s) P(q).$$

Очевидно е, че за да се моделира поставеният проблем и да се конструира правилно функцията на общите разходи $Q(s)$ са необходими известни познания за вероятности и случайни величини. Елементи от теория на вероятностите се използват и за да се определи минимумът на тази функция. Прилага се специален алгоритъм, който тук няма да бъде изложен, единствено ще споменем, че оптималното равнище на запаса s^* се получава при изпълнение на двойното неравенство

$$P(q \le s^* - 1) < \frac{c_2}{c_1 + c_2} < P(q \le s^*),$$

където $P(q \le s)$ представлява вероятността действителното търсене да е по-малко или равно на нивото на запаса.

В заключение можем да кажем, че в никакъв случай не отричаме използването в практиката на готови решения – наготово изведени формули, алгоритми и програмни продукти. Придържаме се обаче към твърдението, че използването на готови решения, без те да се разбират, не винаги води до желаните резултати, дори напротив, в много случи това може да навреди и да доведе до излишни загуби и разходи при разработване на различни стратегии за осъществяване на логистични дейности.

В редица случаи се налага въвеждане на допълнителни условия и ограничения, свързани с конкретния проблем, което изисква умения това да бъде направено и знания за боравене с методи за решаване на модифицирания модел. Основно знанията и уменията са насочени в две посоки:

1) конструиране на икономико-математически модел;
2) владеене на методи за неговото решаване.

Особено справянето с второто, без владеене на фундаментални знания по математика, е невъзможно.

Представените в доклада примери имат само илюстративен характер и могат да бъдат дадени много други подобни примери, които доказват същественото значение на фундаменталното обучение по математика за изграждането на добри специалисти в областта на икономиката. Специалисти, които могат да прилагат научно-обосновани модели и методи за постигане на оптимални резултати в различни насоки, в това число и при реалното практическо осъществяване на широкия спектър от логистични дейности.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Atanasov, B., D. Dochev. (2005) *Izsledvane na operatsiite*. Varna: Nauka i ikonomika.
2. Atanasov, B., T. Milkova. (2011) *Kolichestveni metodi v logistikata (rykovodstvo)*. Varna: Nauka i ikonomika.
3. Duybskaya, V. V. i kol. (2008). *Logistika. Integratsia i optimizatsia logisticheskih biznes-protsesov v tsepyah postavok*. Moskva: Эksmo.

4. Nikolaev, R., Suruzhon, D., Stoyanov, T., Zapryanova, T., Milkova, T., Miryanov, R. (2021) *Prilozhna matematika*. Varna: Nauka i ikonomika.
5. Nikolaev, R., V. Stancheva. (2015) *Novata ikonomicheska realnost i matematicheskoto modelirane: vazmozhnosti i predizvikatelstva*. // Sb. s dokladi ot mezhdunarodna nauchna konferentsia „Ikonomikata v promenyashtia se svyat: natsionalni, regionalni, i globalni izmerenia“, IU – Varna, Tom II. Varna: Nauka i ikonomika, s. 457 – 464. (1)
6. Nikolaev, R., V. Stancheva. (2015) *Biznes kazusi pri obuchenieto po statistika: na primera na zadachi s otnositelni velichini*. // Aktualni problemi na naukata, obrazovanieto i realizatsiyata v oblastta na prilozhnata statistika i informatika. Sofia: Izdatelski kompleks – UNSS, s. 48 – 54. (2)
7. Nikolaev, R., V. Stancheva. (2014) *Problemi i perspektivi pred obuchenieto po matematika v OKS „Magistar“ v Ikonomicheski universitet – Varna i vrazkata mu s praktikata*. // Sbornik s dokladi ot kragla masa s mezhdunarodno uchastie „Magistarskoto obuchenie – problemi i vizia za badeshteto“, Varna: IK – Gea Print, s. 98 – 107.
8. Nikolaev, R., E. Angelov, S. Yordanov. (2014) *Matematikata – „aktiv“ ili „pasiv“ za studentite po ikonomika*. // Sbornik s dokladi ot nauchna konferentsia „Problemi pri obuchenieto po schetovodstvo, analiz i kontrol“. Varna: Nauka i ikonomika, s. 139 – 148.
9. Nikolaev, R., N. Gospodinova. (2014) *Prilozhenie na matematicheskia aparat pri razrabotvane na algoritmi*. // Sb. s dokladi ot mezhdunarodna nauchna konferentsia „Informatsionnite tehnologii v biznesa i obrazovanenieto“. Varna: Nauka i ikonomika, s. 403 – 410.
10. Nikolaev, R., N. Gospodinova. (2013) *Matematikata – ot abstraktsiyata kam realnostta*. // „Sotsialnite nauki i globalizatsiyata“: Sb. s dokladi ot mezhdunarodna nauchna konferentsia posvetena na 65-godishninata ot sazdavane na katedra „Filosofski nauki“. Varna: Nauka i ikonomika, s. 121 – 127.
11. Nikolaev R. (2011) *Nivo na kompetentnost na studentite po ikonomika pri prilagane na kolichestveni metodi za reshavane na prakticheski zadachi*. sb. Dokladi, „Stroitelno predpriemachestvo i nedvizhima sobstvenost”, Nauka i ikonomika, IU – Varna. s. 293 – 305.
12. Nikolaev, R., M. Karakulakov. (2007) *Prehodat “Elementarna – vissha matematika” – sastoyanie i problemi v IU – Varna”*. sb. Dokladi na SMB – Varna „Matematika i informatika –realnosti i perspektivi”, izd. na VSU „Chernorizets Hrabar”, Varna, s. 155 – 165.
13. Sterligova, A. N. (2012). *Upravlenie zapasami v tsepyah postavok*. Moskva: Infra-M.

STATISTICAL THINKING – A TOOL FOR BETTER VISIBILITY IN THE INFORMATION FOG

Assoc. Prof. Margarita Lambova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *Reasoning is presented related to the need to rethink statistics education in order to create an opportunity to form statistical thinking as a mandatory element of the thought process of a free and informed person and thus overcome the problem of "numerical blindness" in society. It is concluded that the main reason preventing the creation of skills that can be qualified as statistical thinking is the patterning of statistics education by teaching ready-made "recipes" for the mechanical application of statistical methods "piecemeal", detached from the requirements and the logic of statistical methodology.*

Keywords*: Statistical thinking; Statistical education; Statistical methodology; Logic and Statistics*

JEL code: *A20, C18*

СТАТИСТИЧЕСКОТО МИСЛЕНЕ – СРЕДСТВО ЗА ПО-ДОБРА ВИДИМОСТ В ИНФОРМАЦИОННАТА МЪГЛА

Доц. д-р Маргарита Ламбова
Икономически университет – Варна, България

„Ще дойде време, когато статистическото мислене ще бъде толкова необходимо на цивилизования човек, колкото и умението му да чете и пише.” Времето, за което се отнасят пророческите думи на визионера Хърбърт Уелс, отдавна е дошло, но за съжаление мисленето като цяло вече не е на мода. То масово се подменя с имитиращи мисловния процес алгоритмични „продукти”, сътворени по „модерния” за даден период шаблон, които сериозно ограничават свободата на мисълта. По този начин не само се поставят спирачки на критичното мислене като основна движеща сила на развитието на човешкия дух, но и се създава добра почва за целенасочено дистанционно управление на мисловния процес. Такива сурогати на мисловния процес доста агресивно изтласкват и статистическото мислене, настанявайки се на негово място, като така се създават перфектни условия за отразяване и възприемане на действителността през криво огледало.

Целта на доклада е обосновка на необходимостта от преосмисляне на обучението по статистиката, в което приоритетно би следвало да бъде формирането на статистическо мислене като задължителен елемент на мисловния процес на свободния и информиран човек.

Изложението не претендира за изчерпателност на разсъжденията по разглеждания проблем, акцентира се върху основни причини, които възпрепятстват включването на статистическото мислене в образователния фундамент на съвременното общество.

Статистическото мислене се основава на съвкупностен логически подход и на система от знания за логиката и философията на събирането, обработката, анализа и интерпретацията на числова информация за взаимосвързаните явления и процеси от заобикалящата ни действителност. То е предпоставка за правилното възприемане и осмисляне на числовата проекция на емпиричните дадености и на характеризиращите ги закономерности, като на тази основа позволява идентифицирането и решаването на практически проблеми с помощта на статистическа информация, която благодарение на дигиталната революция вече лавинообразно залива човечеството. Мрежата позволява светкавичното ѝ разпространение и не съществува сила, която е в състояние да я възпре и обуздае. На пръв поглед изглежда, че свободният и бърз достъп до информацията е необходимо и достатъчно условие за достигане на висша степен на мисловна свобода, възможна само, когато индивидите са в състояние да управляват живота си на базата на самостоятелно взети информирани решения. Свободният достъп до статистическа информация е предпоставка за добра осведоменост за закономерностите, характеризиращи явленията и процесите, но последната не е пряко следствие на освободената информация. Свободният достъп не гарантира, че потребителите на информация ще бъдат в състояние коректно да се информират. Връзката между информация и осведоменост се възпрепятства от една страна от недостига на критично мислене и от друга, от невъзможността за осмисляне на числови данни. Само индивиди с изградено статистическо мислене, същевременно неподвластни на мисловни шаблони, са в състояние да виждат и да се ориентират правилно в гъстата мъгла, предизвикана от лавината от числа, отразяващи с различна степен на достоверност емпиричната действителност. Останалите са „числово слепи" и със „замъглено мислене" (термините са заимствани от Gigerenzer, 2017), като не са в състояние да интерпретират правилно информацията и самостоятелно да формират представа за закономерностите, които се крият зад числовите данни. Те волю-неволю са принудени да се доверяват на чужда интерпретация и по този начин стават зависими и неспособни да разсъждават свободно, като формират дистанционно управлявано шаблонно мислене, което не позволява самостоятелното вземане на информирани решения на проблеми чрез претеглянето на рискове и ползи от дадено поведение или от определени действия.

Шаблонното мислене може да се възприеме като пряко следствие от държавния патернализъм, който в по-голяма или по-малка степен е характерен за всяка обществена система, налагаща своите норми и правила като единствено правилните, при което държавата играе ролята на мъдър и грижовен баща, а хората изпълняват ролята на членове на семейството, които безропотно се доверяват и подчиняват на бащината воля. Комфортно съществуване подобна система може да си осигури чрез възпитание в конформизъм - вкарване на индивидите в подходящия мисловен шаблон, осигуряващ приемането на това покровителство чрез готови правила и решения за нормална и неоспорима даденост. „Патернализмът ограничава свободата на хората, независимо дали им харесва или не – по предположение за тяхно добро." (Gigerenzer, 2020). Ограничава се донякъде и мисловната свобода, тъй като чрез правилата и нормите, свързани със забраната на определени действия, квалифицирани като високорискови, се обезсмисля индивидуалната преценка на степента на риск на базата на априорна статистическа информация. Мисловните шаблони се налагат още от училищната скамейка, като обучението по математика и статистика не прави изключение. „Нашите деца се обучават по алгебра, геометрия, тригонометрия и математически анализ. С други думи: ние им преподаваме математиката на сигурността, а не тази на несигурността, т.е. статистическо мислене....Често се твърди, че обучението по абстрактни дисциплини като алгебра и геометрия подобрява мисленето и умението за решаване на проблеми. Ако беше така, нямаше да имаме толкова лекари, които не разбират здравни статистики, или адвокати, които се объркват от ДНК доказателства...Ако желаем ново поколение, което може да решава стоящите пред нас проблеми, по-скоро би трябвало да му предоставим когнитивните инструменти, отколкото абстрактни принципи.”(Gigerenzer, 2020)

Логично е да предположим, че когато целта е изграждането на свободно и демократично общество, би трябвало да съществува стремеж образователният процес да бъде планиран по такъв начин, че делът на свободомислещите хора, които са в състояние самостоятелно и независимо да решават проблеми с помощта на статистическа информация, да се увеличава с течение на времето за сметка на дела на числово слепите.

От формална гледна точка този стремеж съществува – учебните програми по математика в училищното образование в България от 5. до 12. клас вече включват елементи на вероятности и статистика. Обучение по статистика е предвидено и в учебните планове на безброй специалности във висшите училища.

От съдържателна гледна точка включването на статистиката в образователния процес все още не е гаранция за успешно формиране на статистическо мислене и оттам решаване на проблема с числовата слепота.

Използваният методически подход при включването на статистиката в учебните програми по математика в училищното образование е изцяло подвластен на логиката на чистото число, за която е без значение, какво е естеството на числовите данни. „В този смисъл може да се твърди, че акцентът при обучението се поставя върху количествения анализ, като статистиката се свежда до съвкупност от механично приложими количествени способи, методи, техники и измерители, до голяма степен лишена от своя собствена логика и философия, от качествения анализ на данните, който е необходима предпоставка за правилен избор на методи и обуславя надеждността и логическата състоятелност на получените резултати.” (Ламбова, Стоянова, 2021). Знания относно различията в естеството на свойствата, характеризиращи единиците, чрез които се проявяват явленията в определени времеви и пространствени граници, за възможностите за измерване на различни по вид свойства и създаване на измерителни инструменти, както и за измерителните скали не са предвидени в учебните програми.

Ще дам конкретен пример с учебната програма по математика за 5. клас, според която учениците трябва да получат знания относно разчитането и интерпретирането на информация, представена с текст, с графики, с таблици или с диаграми. От гледна точка на логиката на чистото число не съществува проблем при подобен методически подход, но от гледна точка на статистическата логика подходът може да бъде сравнен с опит да се построи сграда без проект върху плаващи пясъци, тъй като никъде не е посочено, за каква информация става въпрос, не се изискват знания относно естеството на данните, които се представят чрез таблици и диаграми. Като закономерно следствие в учебниците по математика са се появили изключително груби неточности и грешки, които от гледна точка на статистическата логика могат да бъдат квалифицирани като стъкмистика. Фрапантен пример е поместен в учебник по математика за 5. клас (Паскалева и др., 2016) - за построяване в координатната система на точкова, линейна и стълбовидна диаграма, изобразяваща разпределението на група ученици според предпочитания от тях сладолед – сметанов, шоколадов, плодов, орехов, т.е. според значенията на признак с номинално ниво на скалиране. В същия учебник фигурира пример, явно предназначен за получаване на умения за разчитане на таблици, в който е показано, как чисто алгоритмично, без обяснения, свързани с логиката, се изчислява средна аритметична претеглена величина от значенията на ординално скалирания признак оценка. Въпреки че в практиката се е наложило изчисляването на среден аритметичен успех, тази числова конструкция е получена чрез аритметични действия със субективно определени числови рангове на псевдоколичествен признак с ординално ниво на скалиране, което не е допустимо и не би следвало още в началото на обучението по статистика да се дава пример на учениците, как изискванията на статистическата методология могат да не бъдат спазвани.

Статистическо мислене не се създава чрез обучение, което има за единствена цел създаването на умения за механично прилагане на статистически методи и изчисляване на измерители по шаблон (формули), без оглед на логическото естество на информацията, без дори да бъдат загатнати предпоставките и ограниченията за тяхното използване. За съжаление тенденцията на развитие както на средното, така и на висшето образование е точно такава – бягство от фундаменталните знания и приоритет на „практически” умения и компетентности без сериозна теоретична основа. Правилно ли е обаче умения за изчисляване на статистически измерители по формула и/или чрез потребителски статистически софтуер да бъдат квалифицирани като практически, при положение че притежателят на тези умения няма представа при какъв вид емпирична информация е допустимо да бъдат осъществявани тези изчисления?

Опитите за принизяване на статистическата наука до лишен от своя собствена философия и логика механичен сбор от универсално приложими количествени методи зачестяват не само в средното, но и във висшето образование. Пример за такъв опит е включването на обучение по статистика в учебна дисциплина, наречена „Количествени методи”, като подобно наименование противоречи на логиката на статистическата наука. „Статистическото изучаване се характеризира с единство между количествената и качествената страна на явленията, т.е. изучаването на количествената страна на явленията се основава на знанията за качествената им природа”. (Гатев, 1991)

За съжаление потребителският статистически софтуер също подпомага шаблонизирането на статистическото образование, особено когато той се използва като основен инструмент за алгоритмичното усвояване на механичното приложение на статистически методи „на парче” (виж Ламбова, 2020). Напълно споделям мнението на Rüger (2012), според който „наивистичното „необвързано с теорията” приложение на статистически методи, подход, изкушаващ с достъпността на статистически програмни пакети и съответно широко разпространен, води до напълно необозрими последствия с възможни сериозни грешки в емпиричната изследователска практика.”

Подобни практики за даване на абсолютен приоритет на количествения анализ и изучаването на статистически методи „на парче” по готови „рецепти” сугестират практическа насоченост на обучението, но могат да бъдат сравнени със строеж на сграда без проект и без фундамент. Те причиняват вреда не само защото не позволяват създаването на фундаментални системни знания за статистическата методология, но и защото възпрепятстват формирането на статистическо мислене.

Статистическото мислене е необходимо не само при прилагане на статистически инструментариум за анализ на емпирична информация, то е предпоставка за правилното възприемане и осмисляне на такива данни, както и на резултатите от осъществен статистически анализ, което означава, че не би следвало да е присъщо само на ограничен кръг индивиди, занимаващи се със статистика и/или ползващи статистически инструментариум, а на всеки потребител на информация, т.е. на всички без изключение. Ако стремежът е преодоляване на числовата слепота в обществото, всеки потребител на информация би следвало да има изградено статистическо мислене, тъй като дори в ежедневието си всеки от нас е изправен пред житейски дилеми, при които изборът на поведение, действие или подход се прави на базата на преценката на ползи и рискове, зависеща от степента на информираност за определени статистически закономерности.

Свободният, критично мислещ човек, който желае да управлява живота си на базата на собствени информирани решения, а не с помощта на наложени му шаблони, би следвало:

- Да разбира логиката на основните измерители, чрез които се задават закономерностите, характеризиращи явленията и процесите;
- Да осмисля облечените в числа закономерности на заобикалящата действителност и да бъде в състояние да преценява, дали числовата „премяна” е качествена или отразява емпиричните дадености през криво огледало;
- Да бъде в състояние да различава истинската статистика, стъпила здраво върху основите на статистическата методология, от вездесъщата и доста агресивна стъкмистика, резултат от статистическо невежество или целенасочена манипулация;
- Да използва съвкупностен логически подход при интерпретацията на числова информация за явления и процеси от обкръжаващата действителност, даващ възможност дори чисто интуитивно да бъдат вземани решения чрез преценка на „тежестта” на информацията от гледна точка на това, дали тя отразява статистическа закономерност или е свързана със случайни ефекти при единични случаи;
- Да бъде в състояние да осмисля относителните различия, които много често се използват целенасочено като средство за манипулация;
- Да разбира връзката между относителни честоти и вероятности;
- Да може да калкулира риска от определени свои действия на базата на статистическа информация;

- Да осмисля сигурност и несигурност, когато те по своята същност са условни вероятности и т.н.

Списъкът с умения, неоходими за преодоляване на числовата слепота, не претендира за изчерпателност, но той показва, какви би следвало да бъдат приоритетите при обучението по статистика както в средното, така и във висшето образование, ако целта е изграждането на статистическо мислене като необходим елемент на мисловния процес на свободния и информиран човек.

Съобразно поставената цел е обоснована необходимостта от преосмисляне на обучението по статистика, при което, за да е възможно формирането на статистическо мислене, би следвало вместо на количествения анализ с помощта готови „рецепти" да се обръща повече внимание на статистическата логика.

Направените разсъждения позволяват идентифицирането на основен фактор, не само възпрепятстващ създаването на знания и умения, които могат да бъдат квалифицирани като статистическо мислене, но същевременно стимулиращ възпроизводството и задълбочаването на проблема с числовата слепота. Това е шаблонизацията на обучението по статистика чрез стремежа към създаването на псевдопрактически алгоритмични умения за механично приложение на статистически методи „на парче", които не стъпват върху основите на статистическата методология, следователно нямат нищо общо със статистическата логика.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Gatev, K. (1991). *Obshta teoria na statistikata*. Sofia, Izdatelstvo "Nauka I izkustvo". [Гатев, К. (1991) *Обща теория на статистиката*. София, Издателство „Наука и изкуство".]
2. Gigerenzer, G. (2020). *Risiko. Wie man die richtigen Entscheidungen trifft.* München: Pantheon Verlag.
3. Gigerenzer, G. (2017). *Das Einmaleins der Skepsis. Über den richtigen Umgang mit Zahlen und Risiken*. München: Piper Verlag.
4. Lambova, M. (2020). Digitalizatsiyata – blagodat ili proklyatie za statisticheskoto obrazovanie. *Ikonomicheska nauka, obrazovanie i realna ikonomika: Razvitie i vzaimodeystvia v digitalnata epoha: Yubileyna mezhdunarodna nauchna konferentsia.* Varna, Nauka i ikonomika, tom IV, pp. 378-386
5. Lambova, M., Stoyanova, V. (2021). Diskusionni momenti, svarzani s obuchenieto po statistika kato dyal ot matematikata v uchilishtnoto obrazovanie . *Strategies for Policy in Science and Education.* Sofia, Az Buki, Vol. 29, Issue 5, pp. 492-508.
6. Paskaleva, Z., Alashka, M., Alashka, R. (2016). *Matematika 5. klas.* София, издателство Архимед.
7. Rüger, B. (2012). *Test- und Schätztheorie, Band I: Grundlagen*. München, Wien, Oldenbourg Verlag.

FORECASTING RETAIL SALES OF FOOD, BEVERAGES AND TOBACCO PRODUCTS IN THE REPUBLIC OF BULGARIA USING AN ARIMA MODEL

Assoc. Prof. Michal Stojanov, PhD
University of economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *Information on the historical development of retail sales of food, beverages and tobacco products in the country can be used for the purposes of forecasting their future change. This approach is based on a procedure formulated by G. Box and G. Jenkins, who derive a methodology for constructing linear time series models based on autoregressive integrated moving averages. The logical structure of the text is developed in the stages of identification of a stochastic ARIMA model, estimation of its parameters and verification of their optimality. This allows in the final phase, based on an ARIMA(1,1,0) model of food, beverage and tobacco retail sales, to make a quantitative forecast for the next time period within the existing risks and challenges of the market environment.*

Keywords: *ARIMA; Econometric forecasting; Retail trade sales; Food, beverages and tobacco products*

JEL code: *C22, E27*

ПРОГНОЗИРАНЕ НА ПРОДАЖБИТЕ НА ДРЕБНО НА ХРАНИ, НАПИТКИ И ТЮТЮНЕВИ ИЗДЕЛИЯ В РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ ЧРЕЗ ARIMA МОДЕЛ

Доц. д-р Михал Стоянов
Икономически университет – Варна, България

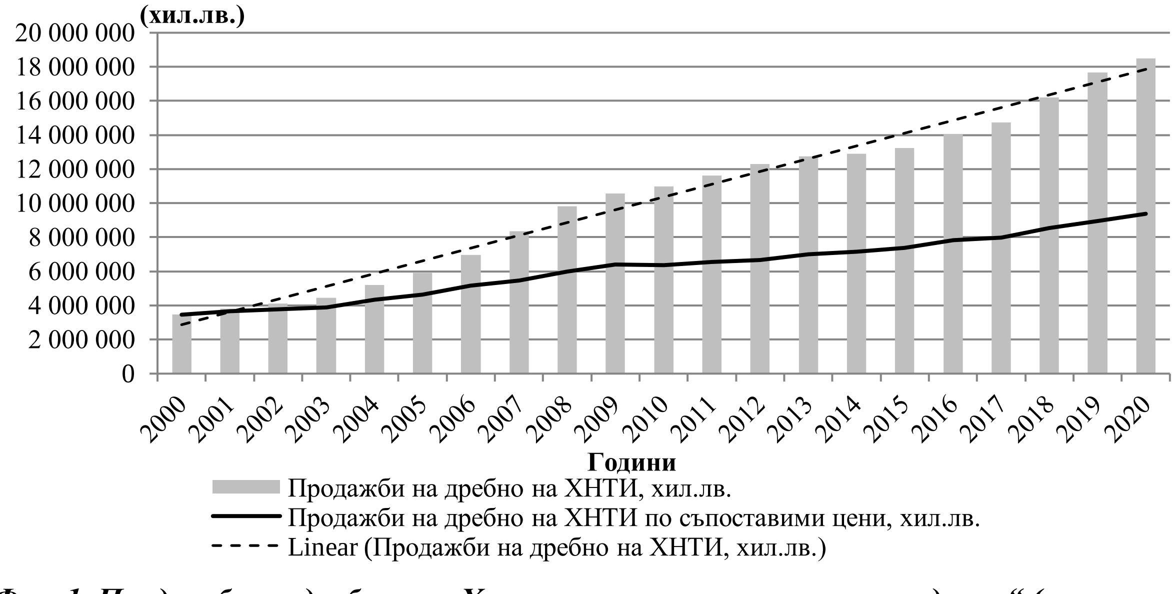
През изминалите 20 години пазарът на потребителски стоки в България посреща системните предизвикателства на значими вътрешни и международни обществени и икономически промени. Такива например са обявеният от Европейската комисия през 2002 г. статут на страната за функционираща пазарна икономика, присъединяването към ЕС от 2007 г., световната финансово-икономическа криза от 2008-2009 г., пандемията от COVID-19, дигиталната трансформация, глобализацията и пр. Всички те имат своите положителни и негативни ефекти върху промените на основни икономически показатели, бележещи развитието на икономическата система. Продажбите на дребно винаги са били популярен индикатор за "пулса на икономиката и нейния прогнозиран път към разширяване или свиване" (Kenton, 2022). Ето защо тяхното икономическо моделиране „има огромна търговска стойност … като е приложимо във всеки бизнес" (Prabhakaran, 2021).

Основната цел на работата е въз основа на информацията за историческото развитие на продажбите на дребно на храни, напитки и тютюневи изделия в страната да бъде идентифициран, оценен и диагностициран ARIMA модел, който да бъде приложен за целите на прогнозирането на тяхното бъдещо изменение.

Основен обект на изследване в настоящата работа са данните за продажби на дребно на „Храни, напитки и тютюневи изделия" (хил. лв.) в Република

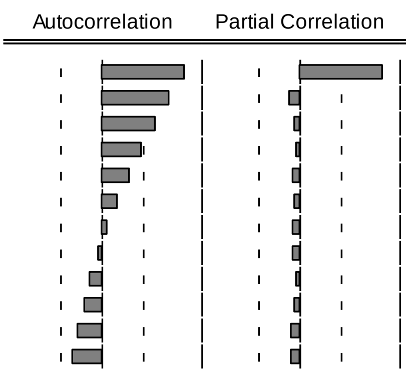
България, систематизирани от НСИ като годишна отчетност в периода 2000-2020 г. Освен фактическите стойности на достигнатия стойностен обем на продажбите на дребно на „Храни, напитки и тютюневи изделия“ (Sales) са анализирани и техните логаритмично трансформирани оценки (LnSales), които са по-подходящи за целите на количественото иконометрично моделиране. С помощта на това предварително преобразуване на динамичния ред, формиран от натуралните логаритми на първоначалните променливи „се осигурява съвместимост на изучаваните индикатори, като могат да се формират и средни стойности, разположени в рамките на диапазон“ (Kaneva, 2019, p. 103), освен това се приема, че „промените в натуралния логаритъм са (почти) равни на процентните промени в първоначалните данни, от това следва, че наклонът на линията на тренда, е равен на средният процентен растеж в оригиналната серия“ (Lütkepohl, 2012). В работата се прилага методологията, предложена от Бокс-Дженкинс (Box and Jenkins, 1970; Box et al., 2015), при която закономерностите на динамичния ред служат като основа за генерирането на количествена прогноза за неговото очаквано развитие в момента t+1. Тя се основава на алгоритъм, преминаващ през фазите на Идентификация, Оценка, Диагностика и Прогнозиране и е една от най-популярните и широко използвани техники за прогнозиране на едномерни времеви редове (D'Amico, 2021). За целите на квантифицирането на различните статистически характеристики, параметри и критерии е използван софтуерният продукт Eviews 9.

Статистическата отчетност на НСИ за продажбите на дребно на „Храни, напитки и тютюневи изделия“ (ХНТИ) позволява да се представи графичен образ на динамичния ред, като се обхващат годините на периода 2000-2020 г. (вж. фиг. 1). С негова помощ и посредством „метода на свободното изразяване“ (Radilov, et al., 2015, с. 217) можем да заключим за наличието на нарастваща тенденция на развитие, съпроводена с колебания от различен характер.



Фиг. 1. Продажби на дребно на „Храни, напитки и тютюневи изделия“ (по текущи и съпоставими цени при 2000 г.=100) в България по години на периода 2000-2020 г.
Източник: *INFOSTAT - National statistical institute, 2022.*

На следващ етап визуалният анализ на корелограмите, така и обобщените оценки за функциите на автокорелация и частна автокорелация подкрепят заключението, че изследваният динамичен ред на продажбите на дребно на ХНТИ и на натуралните логаритми на продажбите на дребно на ХНТИ не са стационарни, което се подкрепя от оценките на коефициентите на автокорелация, които имат постепенно намаляващи или често пъти определяни като затихващи стойности с ясно изразен пик в първия лаг при частната автокорелация (вж. фиг. 2 и 3). Това позволява да се направи констатацията, че изследваният динамичен ред е нестационарен по отношение на средната и в него се наблюдава възходящ линеен тренд. По своята същност фактическите данни се корелират при лаг 1, което се приема за типичен случай при икономическите явления, където текущата величина в най-голяма степен се определя от достигнатото състояние в предходния момент. Коефициентът от първи порядък има стойност $AC1_{Sales}$ = 0,854 за фактическите стойности на продажбите на дребно на ХНТИ и $AC1_{LnSales}$ = 0,857 за натуралните логаритми на продажбите на дребно на ХНТИ. Емпиричната характеристика на Бокс-Люнг (Q-Stat) $\left(BL_1 = \frac{N\times(N+2)}{(N-1)} \times AC^2\right)$ е 17,607 за първия и 17,735 за втория динамичен ред и е по-голяма от теоретичната стойност 6,635 ($\chi2$ – разпределение с 1 степен на свобода и риск за грешка от 0,01), което е количественото доказателство за наличието на тенденция на развитие във времевите редове. Това предполага, че въз основа на визуалната инспекция и оценките на AC и PAC може да приемем, че във времевия ред се констатират „AC функция, която е експоненциално затихваща или синусоидална и има значителен пик при лаг $p = 1$ в PAC функцията, която няма значими оценки след лаг p, което предполага, че данните може да следват модел ARIMA(p,d,0)“ (Hyndman & Athanasopoulos, 2018).



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.854	0.854	17.607	0.000
2	0.699	-0.110	30.034	0.000
3	0.552	-0.063	38.205	0.000
4	0.417	-0.049	43.148	0.000
5	0.288	-0.075	45.660	0.000
6	0.171	-0.059	46.599	0.000
7	0.062	-0.070	46.730	0.000
8	-0.038	-0.068	46.783	0.000
9	-0.119	-0.039	47.350	0.000
10	-0.188	-0.060	48.905	0.000
11	-0.254	-0.087	52.019	0.000
12	-0.317	-0.097	57.425	0.000

Фиг. 2. Автокорелационни (AC) и частни (PAC) автокорелационни коефициенти на продажбите на дребно на ХНТИ (Sales)

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.857	0.857	17.735	0.000
		2	0.707	-0.104	30.431	0.000
		3	0.553	-0.102	38.627	0.000
		4	0.401	-0.090	43.191	0.000
		5	0.261	-0.062	45.248	0.000
		6	0.133	-0.067	45.820	0.000
		7	0.023	-0.049	45.838	0.000
		8	-0.068	-0.040	46.010	0.000
		9	-0.137	-0.026	46.768	0.000
		10	-0.196	-0.063	48.456	0.000
		11	-0.252	-0.089	51.523	0.000
		12	-0.305	-0.089	56.502	0.000

Фиг. 3. Автокорелационни (AC) и частни (PAC) автокорелационни коефициенти на натуралните логаритми на продажбите на дребно на ХНТИ (LnSales)

Допълваме логическата конструкция на анализа с проверка на времевите редове за интегрираност, което е извършено с помощта на теста на Дики-Фулър (ADF), където нулевата хипотеза е за наличието на нестационарност, която се идентифицира с наличието на единичен корен, а алтернативната хипотеза е за наличието на стационарност. Тестът за единичен корен се конструира чрез модел, в който последователно са избрани: да бъде без и с включена константа, с константа и линеен детерминистичен тренд, с автоматично дефиниран лагов порядък. В конкретните изпробвания максималният лаг е 4. Получената оценка на тестовата характеристика на Дики-Фулър се съпоставя с критична стойност на тестовата величина по МакКинън при 1%, 5% или 10% риск за грешка (вж. таблици 1 и 2). Съпоставката посочва по-ниска от критичните стойности за всички тествани модели (с включена константа, с константа и линеен детерминистичен тренд и без константа). Това с определена вероятност посочва, че редът е нестационарен и хипотезата за единичен корен не може да бъде отхвърлена, т.е. първоначалните данни са интегрирани поне от първи порядък, което изисква допълнително провеждане на идентични тестове за първи и при необходимост за втори разлики. Изводите по критерия на Дики-Фулър се потвърждават и в двата динамични реда и при абсолютните стойности на продажбите на дребно на ХНТИ (Sales) и при техните натурални логаритми (LnSales).

Таблица 1

Резултати от тестването за единичен корен в динамичния ред на ХНТИ (Sales)

Стационарност на равнищата I(0)					
Null Hypothesis: Sales has a unit root Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=4)					
Exogenous	Augmented Dickey-Fuller test statistic (ADF)		Test critical values		
	t-Statistic	Prob.*	1% level	5% level	10% level
Constant	-0,151607	0,9297	-3,831511	-3,029970	-2,655194
Constant, Linear Trend	-3,393047	0,0821	-4,532598	-3,673616	-3,277364
None	1,254483	0,9404	-2,692358	-1,960171	-1,607051

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Забележка: Тъй като p-стойност > 0,05, не можем да отхвърлим нулевата хипотеза (H0: Sales има единичен корен).

Таблица 2

Резултати от тестването за единичен корен в динамичния ред на натуралните логаритми на ХНТИ (LnSales)

Стационарност на равнищата I(0)					
Null Hypothesis: LnSales has a unit root Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=4)					
Exogenous	Augmented Dickey-Fuller test statistic (ADF)		Test critical values		
	t-Statistic	Prob.*	1% level	5% level	10% level
Constant	-1,720493	0,4057	-3,831511	-3,029970	-2,655194
Constant, Linear Trend	-1,829480	0,6501	-4,532598	-3,673616	-3,277364
None	1,100496	0,9229	-2,692358	-1,960171	-1,607051

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Забележка: Тъй като p > 0,05, не можем да отхвърлим нулевата хипотеза (H0: LnSales има единичен корен).

На изучаване ще бъде подложен модел от типа ARIMA(1,1,0). Определянето на авторегесионен параметър от $p = 1$ е закономерен продукт на констатациите от визуалната инспекция на корелограмите и заключението, че икономическото явление в най-голяма степен се предопределя от неговите оценки в предходния момент. В селектирания модел интегрираният параметър $d = 1$ ще свидетелства, че данните са нестационарни по отношение на тренда и е необходимо прилагане на първи последователни разлики. Едновременно с това параметърът на плъзгащите средни $q = 0$ ще се предопределя от липсата на сериозни скокове и/или спадове в изходните данни за продажбите на дребно. Допълнително, селектираният модел в неговата иконометрична семплост, позволява да се спазва принципа количественото изследване да не бъде прекомерно усложнено и с високи претенции и свръхочаквания.

Изборът на най-добър модел сред проведените два експеримента е свързан с по-ниската стойност на информационните критерии BIC и AIC, които в първия модел $BIC_{ARIMASales(1,1,0)}$ е 25,846, $AIC_{ARIMASales(1,1,0)}$ е 28,578, а във втория $BIC_{ARIMALnSales(1,1,0)}$ е -6,359, $AIC_{ARIMALnSales(1,1,0)}$ е -3,598.

Таблица 3

Сравнителни характеристики по критерии за селекция на модел

Критерии	Модел		Избран модел
	A) $ARIMA_{Sales}(1,1,0)$	B) $ARIMA_{LnSales}(1,1,0)$	
C p-value < 0,01	0,0024	0,0097	A и B
AR(1) p-value	0,0105	0,0008	B
SIGMASQ	110,000,000,000	0,001147	B
Log likelihood	-282,782434	38,987487	B
AIC	28,578243	-3,598749	B
BIC	28,727603	-3,449389	B
Hannan-Quinn	28,607400	-3,569592	B

Получените параметри на двата експериментирани модела показват, че и константата и авторегресионния параметър при двата са статистически значими при възприетото еталонно равнище на значимост от 0,05. В допълнение е извършено тестване на остатъците от построените модели, където не се отчитат статистически значими скокове в автокорелационните и частните автокорелационни коефициенти, които са в рамките на определените доверителни интервали и не се наблюдават сериозни пикове в тяхното развитие. Това обстоятелство се потвърждава и на основа на статистиката на Box-Ljung, която позволява да се направи извод за случаен характер на остатъците и на двата модела, които попадат в рамките на определените доверителни интервали, което се констатира със значимост много по-голяма от 0,05 и позволява да направим заключение за случаен характер на тяхното развитие (вж. фиг. 4).

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.131	0.131	0.3959	
		2	-0.037	-0.055	0.4285	0.513
		3	0.058	0.071	0.5144	0.773
		4	-0.007	-0.028	0.5158	0.915
		5	-0.111	-0.102	0.8751	0.928
		6	-0.187	-0.169	1.9713	0.853
		7	-0.021	0.017	1.9867	0.921
		8	-0.096	-0.107	2.3254	0.940
		9	-0.222	-0.190	4.2969	0.829
		10	-0.003	0.021	4.2974	0.891
		11	0.094	0.051	4.7322	0.908
		12	0.163	0.149	6.1904	0.860

Фиг. 4. Ljung-Box Q-статистика на остатъчните компоненти на модела $ARIMA_{LnSales}(1,1,0)$

Окончателният избор дава предпочитание на по-ниската нормализирана стойност на информационните критерии за втория модел, основан върху натуралните логаритми на продажбите на дребно на ХНТИ и може да се пристъпи към анализ на неговите параметри и тестови характеристики. Същевременно в подкрепа на селекцията на модела са и стандартните грешки (RMSE) и средна абсолютна процентна грешка (MAPE), които отново дават превес на модела, използващ натуралните логаритми на продажбите на дребно на ХНТИ.

Параметризацията на модела е свързана с представяне на неговите оценки и техните статистически характеристики. За избрания модел $ARIMA_{LnSales}(1,1,0)$ те са свободен член с оценка от 0,081, който има *t*-статистика от 2,912, статистически значима с p-стойност от 0,0097 и коефициент на регресия 0,701, отново с много силна статистическа значимост на *t*-статистиката от 4,054, при ниво на значимост от 0,0008 на оценката.

За да се извърши проверка за адекватността и надеждността на модела за целите на прогнозирането се извършват още няколко теста, като въз основа на техните контролни оценки, изведени в програмна среда на Eviews може да се заключи, че при модела на натуралните логаритми на продажбите е получена оценка на *F*-статистиката от 9,261, което отново в статистически контекст е израз на надеждността на конструирания модел при равнище на значимост $\alpha = 0,01$ с гаранционна вероятност по-голяма от 0,99. Освен упоменатата по-горе статистика на остатъците е направен и тест чрез критерия на Дърбин-Уотсън. Неговата оценка е от 1,665 (съобразен е по-малкият обем на извадката N=20), при риск за грешка от 5% и критични таблични стойности dL =1,20 и dU = 1,41 и на тази основа (4-dU) = 2,39 или емпиричната оценка на теста DW = 1,665 попада в рамките на двете критични значения dU<DW<(4-dU). Това означава, че можем да направим заключението, че остатъчните елементи на построения регресионен модел нямат автокорелационни смущения и това позволява да се потвърди, че и по този критерий моделът е добър.

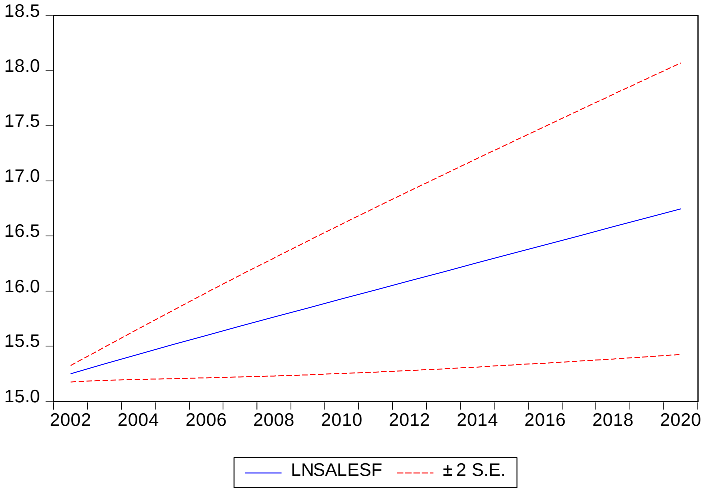
Избраният модел има следния теоретичен вид (Nau, 2020):

$\hat{Y}_t - Y_{t-1} = \mu + \phi_1 \times (Y_{t-1} - Y_{t-2})$,

като след трансформиране придобива вида:

$\hat{Y}_t = \mu + Y_{t-1} + \phi_1 \times (Y_{t-1} - Y_{t-2})$,

където Y_{t-2}, Y_{t-1}, Y_t, са натуралните логаритми на продажбите на дребно на ХНТИ за съответните години. След заместване $ARIMA_{LnSales}(1,1,0)$ се формализира като: $\hat{Y}_t = 0{,}081 + Y_{t-1} + 0{,}701 \times (Y_{t-1} - Y_{t-2})$. На фиг. 5 е дадено графичното представяне на прогностичния модел $ARIMA_{LnSales}(1,1,0)$, заедно с прогнозата за стандартните грешки с асиметрични доверителни интервали и статистика, оценяваща качество на съответствие.



Forecast: LNSALESF	
Actual: LNSALES	
Forecast sample: 2000 2020	
Adjusted sample: 2002 2020	
Included observations: 19	
Root Mean Squared Error	0.174364
Mean Absolute Error	0.130943
Mean Abs. Percent Error	0.811677
Theil Inequality Coefficient	0.005423
Bias Proportion	0.504710
Variance Proportion	0.001147
Covariance Proportion	0.494143
Theil U2 Coefficient	1.790838
Symmetric MAPE	0.817518

Фиг. 5. Резултати от прогностичния модел $ARIMA_{LnSales}(1,1,0)$

Прогнозата получена въз основа на антилогаритмуване на оценката от конструирания модел посочва, че през 2021 г. е възможно обемът на продажбите на дребно на ХНТИ да достигне величина от 20 733 204 хил. лв. Количествената оценка на продажбите на дребно на ХНТИ за 2021 г. индикира възходящата посока на развитие. Разбира се прогнозната оценка е обременена със стохастична грешка и под въздействието на неподлагащи се на точно предвиждане фактори на пазарната среда. Такива трудно предвидими сили са ефектите на ограничителните мерки, налагани от правителството и здравните власти, предизвикани от вирусната инфекция от COVID-19, политическата турбулентност, динамиката на международните цени на основните суровини и енергийни източници и др. Независимо от това, направената прогноза може да бъде ориентир за вземането на бизнес решения в областта на търговията на дребно с ХНТИ. Квантифицираният модел, изграден въз основа на вътрешните закономерности в динамичния ред, позволява получаване на оценка, която дава оптимистично нарастване на продажбите на дребно за следващия отчетен период, което ще може да бъде проверено за успешността на предвиждането в края на календарната 2022 г., когато НСИ ще публикува данни за обема на търговията на дребно с храни, напитки и тютюневи изделия за 2021 г. Приложението на ARIMA моделите демонстрира възможностите за анализ и извличане на информация от данни чрез приложение на теоретично познание, преподавано във фундаменталното и специализираното обучение във висшето образование и тяхното практическо използване за оценка на тенденциите в развитието на основни икономически показатели в краткосрочен времеви хоризонт.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Box, G., Jenkins, G. (1970). Time Series Analysis: Forecasting and Control. San Francisco, Holden-Day.
2. Box, G., Jenkins, G., Reinsel, G. C., Ljung, G. M. (2015). Time Series Analysis: Forecasting and Control. 5th Ed., John Wiley and Sons Inc., Hoboken, New Jersey.
3. D'Amico, J. (2021). How to Estimate ARIMA Models in EViews. JD Economics. [Online] Available from: https://www.jdeconomics.com/arima-model-in-eviews/ Accessed on (23.07.2022).
4. Hyndman, R. J, Athanasopoulos, G. (2018). Forecasting: principles and practice. 2nd Ed., OTexts, Australia. [Online] Available from: https://otexts.com/fpp2/non-seasonal-arima.html Accessed on (11.07.2022).
5. Kaneva, M. (2019). Broadband and e-Commerce in the Balkans - Econometric Analysis. Izvestia Journal of the Union of Scientists - Varna. Economic Sciences Series, 8(2), pp. 100-109. doi:10.36997/IJUSV-ESS/2019.8.2.100
6. Kenton, W. (2022). Retail sales. Investopedia, Dotdash Meredith publishing. [Online] Available from: https://www.investopedia.com/terms/r/retail-sales.asp Accessed on (23.07.2022).
7. Lütkepohl, H., Xu, F. (2012). The role of the log transformation in forecasting economic variables. Empirical Economics, 42(3), pp. 619-638. [Online] Available from: https://www.econstor.eu/bitstream/10419/26636/1/595754392.PDF Accessed on (01.07.2022)
8. Nau, R. (2020). Statistical forecasting: notes on regression and time series analysis. [Online] Available from: https://people.duke.edu/~rnau/411arim.htm (01.07.2022).
9. INFOSTAT - National statistical institute. (2022). Prodazhbi na drebno po grupi stoki. [Online] Available from: https://infostat.nsi.bg/infostat/pages/reports/query.jsf?x_2=292 (23.07.2022).
10. Prabhakaran, S. (2021). ARIMA Model – Complete Guide to Time Series Forecasting in Python. Machine Learning Plus. [Online] Available from: https://www.machinelearningplus.com/time-series/arima-model-time-series-forecasting-python/ (23.07.2022).
11. Radilov, D., Zhekova, S., Todorova, S., Dimitrova, V., Kaneva, M., Stoyanova, V., Karadimova, D., Lyubenov, L., Zhelyazkova, S., Chervenski, G., Kapitanov, K. (2015). Vavedenie v statistikata. Varna: Univ. izd. Nauka i ikonomika.
12. Smokova, M. (2009). Prognozirane s metoda na ekponentsialnoto izglazhdane s IBM SPSS STATISTICS i ForecastX7 (Rakovodstvo za reshavane na kazusi po „Marketingovo prognozirane“).

THE THEORY OF ACCOUNTING AS A FUNDAMENTAL LEARNING DISCIPLINE

Assoc. Prof. Svetlozar Stefanov, PhD
University of Economics - Varna, Bulgaria

Abstract: *The subject of consideration in this report is the need to study the Theory of Accounting as a fundamental learning discipline. The emphasis is on the fundamental categories and principles that prejudge the need to include discipline in the curriculum of different economic specialties. The place of the Theory of Accounting in Economics Studies stems from the noun traditions in university economic education. Tradition dictates that, in addition to close professional knowledge, future economists should have a broader view of economic processes, and economic science should be perceived in broader philosophical, moral and ethical aspects. In this sense, the role of the Theory of Accounting as a fundamental learning discipline is limited to the development (in future economists) of skills for self-critical thinking, reasoning and defending these opinions, awareness of the value dimensions, awareness of the moral and ethical norms of the profession of the economist, etc.*

Keywords*: Theory of Accounting; Education; Fundamental disciplines*

JEL code: *M41*

ТЕОРИЯТА НА СЧЕТОВОДСТВОТО КАТО ФУНДАМЕНТАЛНА УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА

Доц. д-р Светлозар Стефанов
Икономически университет – Варна, България

Независимо от някои различия в наименованието на отделните раздели, структурата на учебния план на различните специалности в университетите по икономика, включва следните три вида учебни дисциплини: Фундаментални, Университетски специални и Специални. Също така съществува богат набор от фундаментални учебни дисциплини, които по преценка на ръководствата на университетите могат да бъдат включени за изучаване от студентите като задължителни, избираеми или факултативни. Обхватът на фундаменталните учебни дисциплини обикновено не е еднакъв в различните университети, предлагащи образователни програми по икономика. Независимо от различията в обхвата, една от основните, фундаментални дисциплини, която задължително присъства в учебните планове на всички университети е дисциплината „Теория на счетоводството.“ Разбира се, това съвсем не е случайно, а се основава на разбирането, че посредством изучаването на теорията на счетоводството, студентите получават фундаментални знания, които им дават възможност да придобият един по-широк поглед върху икономическите процеси. Освен тесни професионални знания, бъдещите икономисти трябва да притежават и един по-широк поглед върху икономиката, в това число и върху нейните исторически, философски, морални и етични измерения.

Идеята за включването на фундаменталните учебни дисциплини в обучението на студентите по икономика се свързва с концепцията за фундаменталното образование, формулирана от Хумболт, в началото на XIX век. В основата на тази концепция е залегнала идеята, че посредством образованието, студентите трябва да получат фундаментални знания, формирани на определен етап от развитието на икономиката и обществото. В този смисъл, акцентът в настояшия доклад ще бъде поставен върху знанията, уменията и компетентностите, които студентите по икономика трябва да получат, посредстовм изучаването на дисциплината „Теория на счетоводството." Съвсем не е случаен факта, че това е една от фундаменталните учебни дисциплини, която се изучава под различни наименования:(„Теория на счетоводството," Основи на счетоводството," „Въведение в счетоводството" и др.), от всички студенти по икономика. Посредством изучаването на дисциплината, студентите получават теоретични знания и практически умения, които обогатяват тяхната икономическа култура. Обект на изучаване в дисциплината са историческите аспекти в развитието на счетоводството, неговият предмет и метод, счетоводният баланс, системата на счетоводните сметки и способа на двойното записване, документирането, инвентаризирането, оценяването, калкулирането, процесът на годишнпто счетоводно приключване и съставянето на финансовите отчети. По този начин студентите придобиват базисни знания в сферата на счетоводството, които са им необходими, както за усвояването на други икономически дисциплини, така и за успешното им реализиране като икономисти в стопанската практика.

Мястото на теорията на счетоводството в раздела на фундаменталните дисциплини в учебните планове на различните икономически специалности се определя и от съществуващите традиции в икономическото образование В този смисъл, както вече беше посочено, традицията повелява, бъдещите икономисти да притежават знания относно историческите, философските, моралните и етчни аспекти на икономиката.

В контекста на горепосоченото, ролята и значението на теорията на счетоводството, като фундаментална учебна дисциплина е да развива у бъдещите икономисти умения за самостоятелно критично мислене, аргументиране и защитаване на тези и становища, способности за прилагане на получените теоретични знания в стопанската практика и др. В този смисъл, дисциплината „Теория на счетоводството" е призвана да развие мисловните и аналитични способности на студентите по икономика, както и тяхната обща икономическа култура. Именно това отличава преподаването на „Теорията на счетоводството" като университетска академична дисциплина, от преподаваните дисциплини с аналогично наименование в средното образование или в курсовете за професионално обучение. Университетът, следва да формира академично поведение, а не да свежда обучението по счетоводство, до елементарното занаятчийско равнница. Следователно една от основните задачи на теорията на счетоводството като фундаментална учебна дисциплина е да повиши общата култура на бъдещите икономисти, тъй като поради спецификата на тяхната работа, на тях им се налага да имат задълбочени познания в повече от една сфера от функционирането на икономиката. На следващо място, тя е призвана да формира едно специфично възпитание на бъдещите икономисти, да дава възможност за правилното използване на различните икономически понятия и категории, както и да им даде познания, относно механизмите по които функционира иконоиката.

Не случайно, дисциплината „Теория на счетоводството" се изучава през първата или през втората година от обучението на студдентите по икономика. Съвсем естествено е, тя да бъде поставена в началото на икономиеското образование. Последното се определя от факта, че в нея се изучават едни от основните икономиески понятия и категории, които са залегнали в основата на икономическото мислене. Практката показва, че когато студените натрупат дефицити при обучението си по теория на счетоводството, изучаването на останалите икономически, в т. ч. и счетоводни дисциплини, изключително се затруднява.

Друг проблемпри изучаването на дисциплината „Теория на счетоводството" е абстрактността на някои понятия и категории. Тук съвсем ествествено е да възникне въпросът кога (в кой семестър или през коя учебна година) следва да се изучава теорията на счетоводството. Или казано по друг начин, дали с курса по „Теория на счетоводството," обучението по икономика трябва да започне или с тази дисциплина, то следва да завърши. В това отношение съществуват различни подходи, които най-общо се свеждат до два. Първият подход, който е възприет в повечето университети е, с курса по „Теория на счетоводството," обучението по икономика да започне и втория – в първата или втората година, да се изучава един въвеждащ курс с наименование „Основи на счетоводството," „Въведение в счетоводството" и др., а проблемите на счетоводната теория да се изучават през последната година на бакалавърската степен на обучение или дори по време на обучението в ОКС Магистър.

Имайки предвид горепосченото, следва да се обележи, че за разлика от специфичните знания, които се получават по специалните счетоводни дисциплини, знанията по дисциплината „Теория на счетоводствовото" се променят сравнително бавно и се отличават със своето постоянство във времето. Именно в това е и смисъла на тези фундаментални знания – да дават възможност на вече завършили студенти, да мислят, критично да анализират проблемите възникващи на всеки един етап от икономическото развитие, което представлява и предпоставка за успешната им реализация в стопанската практика.

Усояването на тези знания на съвремениня етап значително се затруднява, поради особеностите на бизнес средата и характера на времето в което живеем. Понастоящем студентите са изключително прагматични и преобладаващата част от тях имат изключително прагматично отношение към образованието по икономика. Последното е свързано с желанието на студентите, да получават знания и умения, които могат да бъдат приложени непосредствено в практиката и които са търсени от работодателите. Нещо повече, студентите не са склонни да плащат и „да си губят времето" за изучаването на дисциплини, които нямат конкретно икономическо приложение. Това до голяма степен се предопределя и от факта, че една не малка част от студентите постъпват в уиверситетите, след като са натрупали огромни дефицити от знания по време на обучението си в средното образование, имат слаба грамотност и ниска обща култура, което силно затруднява усвояването на знанията, преподавани във фундаменталните университетски дисциплини, в т. ч. и по дисциплината „Теория на счетоводството." Не на последно място, предвид новите реалности и тенденции в унверситетското образование, учебното време, изразено в брой учебни часове за които студентите трябва да получат бакалавърска степен по икономика е намалено, което води до намаляване и на хорариума и на фундаменталните учебни дисциплини. Последното поставя пред ръководствата на университетите редица предизвикателства, свързани с постигането на баланс между фундаменталните и профилирани учебни дисциплини, които да бъдат включени в учебните планове на отделните икономически специалности.

INTERACTIVE MULTIMEDIA WEB-LINKED PRESENTATION FOR MATHEMATICAL ANALYSIS TRAINING ON THE TOPIC OF ASYMPTOTES

Chief Assist. Prof. Anna Lecheva, PhD
University of Ruse, Bulgaria

Abstract: *This paper describes the interactive multimedia internet-linked presentation on the topic of Asymptotes, which is part of the Higher Mathematics curriculum. It aims to popularize and multiply good practices in the field of innovative educational technologies and didactic models in the fundamental sciences. Recommendations from the Innovative Educational Technologies Handbook (Ivanova et al., 2022) have been used, which has been written and issued as part of the National program for improving the competencies among lecturers in the public higher education institutions that are preparing future teachers (2021). This paper focuses on the digital transformation of traditional Mathematics teaching in accordance with the expectations and the predispositions of the digital generation of pupils and students, which is used to receiving internet multimedia information through different interactive devices.*

Keywords*: Digital education; Interactive presentation; Mathematical analysis; Asymptotes*

JEL code: *I2*

ИНТЕРАКТИВНА МУЛТИМЕДИЙНА ИНТЕРНЕТ СВЪРЗАНА ПРЕЗЕНТАЦИЯ ЗА ОБУЧЕНИЕ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ ПО ТЕМАТА АСИМПТОТИ

Гл. ас. д-р Анна Лечева
Русенски университет, България

Въведение

Математическият анализ е част от дисциплината Висша математика, която е фундаментална в обучението по всички технически и икономически специалности във висшето образование. Традиционно тя се възприема като „бариерна“ дисциплина, поради недостатъчната математическа подготовка от училищния курс. Дисциплината е включена като задължителната в учебния план на студентите в първи курс, първи семестър, ОКС бакалавър. Успешното полагане на изпита по Висша математика представлява предизвикателство както за студентите, така и за преподавателите.

За справяне с това предизвикателство е необходимо традиционното обучение да претърпи дигитална трансформация, за да отговори на нагласите на дигиталното поколение ученици и студенти, което е свикнало да получава от интернет мултимедийна информация чрез различни интерактивни устройства (Ivanova et al., 2022). Адаптирането на образователната система включва ефективното използване на информационни и комуникационни технологии (ИКТ) с цел по-лесно възприемане, покриване на очакванията и събуждане на интереса у студентите към фундаменталните науки.

Планът за действие на Европейската комисия (ЕК) в областта на цифровото образование 2021-2027г. представя възможности за подобряване на качеството и количеството на обучението във връзка с цифровите технологии (ЕС, 2021). Той дава подкрепа на цифровизацията на методите на преподаване и обучение посредством предоставяне на подходяща инфраструктура за приобщаващо дистанционно обучение във връзка с пандемията от COVID-19.

Въз основа на този План за действие на ЕК е разработена Стратегията за развитие на висшето образование в Република България за периода 2021-2030г., която включва и всеобща дигитализация и развитие на образователните системи, които допълват или са алтернативи на класическото висше образование (Държавен вестник, брой 2 от 08.01.2021г., т.2.3.).

Целта на настоящата публикация е популяризиране и мултиплициране на добрите практики в областта на иновативните образователни технологии и дидактически модели.

Основната хипотеза е, че фундаменталната дисциплина Висша математика и в частност разделът Математически анализ може да бъде представена по интересен и лесен за усвояване начин на студенти и на ученици с профил Математика в съответствие с тяхните нагласи и възприятия в сферата на ИКТ.

Разработена е интерактивна мултимедийна интернет свързана презентация по темата **Асимптоти**, която е част от учебната програма по дисциплината *Висша математика 1*, включена в учебните планове на повечето специалности в Русенски университет (2022).

Темата **Асимптоти** е част и от Модул 3. *Практическа математика* от учебната програма за профилирана подготовка по Математика в Р България (MON, 2022).

1. Петстепенен модел на обучение по Математика, базиран на конструктивизма и интерактивността

Темата **Асимптоти** е представена съобразно Петстепенния модел на обучение по Математика, базиран на конструктивизма и интерактивността, предложен от А. Лечева (Lecheva, 2021).

Моделът е разработен на база основните принципи на конструктивизма и интерактивността в преподаването, следва Пирамидата на ученето (Learning pyramid, 2021) и включва петте степени, показани на Фиг.1.

На **първо ниво** преподавателят дава определения на основните понятия по темата, формулира теореми, твърдения и следствия. Това е пасивно ниво, на което обучаваните навлизат в тематиката.

На **второ ниво** преподавателят обвързва новата тема с познати и изучени теми и задава междупредметни връзки, ако има такива. Целта е обучаваните да осмислят по-лесно новите понятия, като ги свързват с нещо познато. Това е пасивно ниво.

На **трето ниво** преподавателят демонстрира методи, показва технологията за решаване на конкретни задачи по темата, използва формули и таблици. Демонстрацията е първото активно ниво според Пирамидата на ученето.

На **четвърто ниво** обучаваните дискутират и обсъждат различни задачи, подбрани от преподавателя, предлагат решения, прилагат новоусвоените техники под ръководството на преподавателя и анализират получените резултати. Това е активно ниво.

На **пето ниво** обучаваните решават задачи по темата самостоятелно. Преподавателят е пасивен - отговаря на възникнали въпроси, дава насоки и предложения, получава обратна връзка (рефлексия) чрез анализиране и дискутиране на получените резултати. За обучаваните това ниво е най-ефективното според Пирамидата на ученето. Те прилагат на практика наученото и задълбочават нивото на разбиране по темата.

1. Основни понятия по темата - определения и теореми

2. Връзки с изучени теми и/или междупредметни връзки

3. Технология за решаване на задачи по темата

4. Придобиване на умения - приложение на теорията

5. Разширяване на уменията - самостоятелна работа/ работа в екип

Фиг.1. Петстепенен модел на обучение по Математика
Източник: *Лечева А. (Lecheva, 2021)*

2. Интерактивна, мултимедийна и интернет свързана презентация по темата Асимптоти

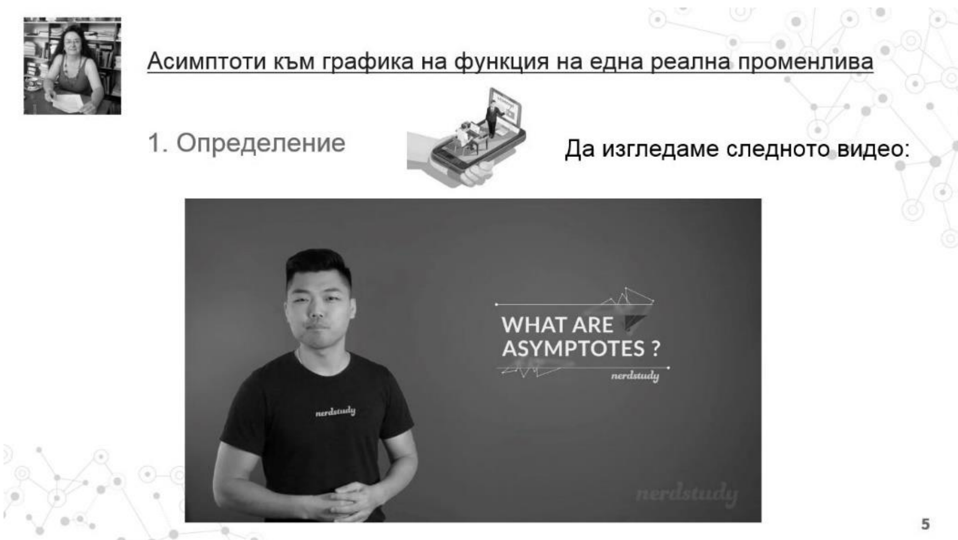
В първо ниво на Петстепенния модел, което е пасивно ниво, преподавателят има възможност да използва разнообразни иновативни техники и технологии и би могъл да поднесе теоретичния материал под формата на презентация, текстов документ в електронен формат, аудио-видео материал, предварително изготвен от него или от външен автор.

Независимо от конкретната техника на преподаване и използваните технологии, необходимо е обучаемите да получат основните теоретични познания по темата.

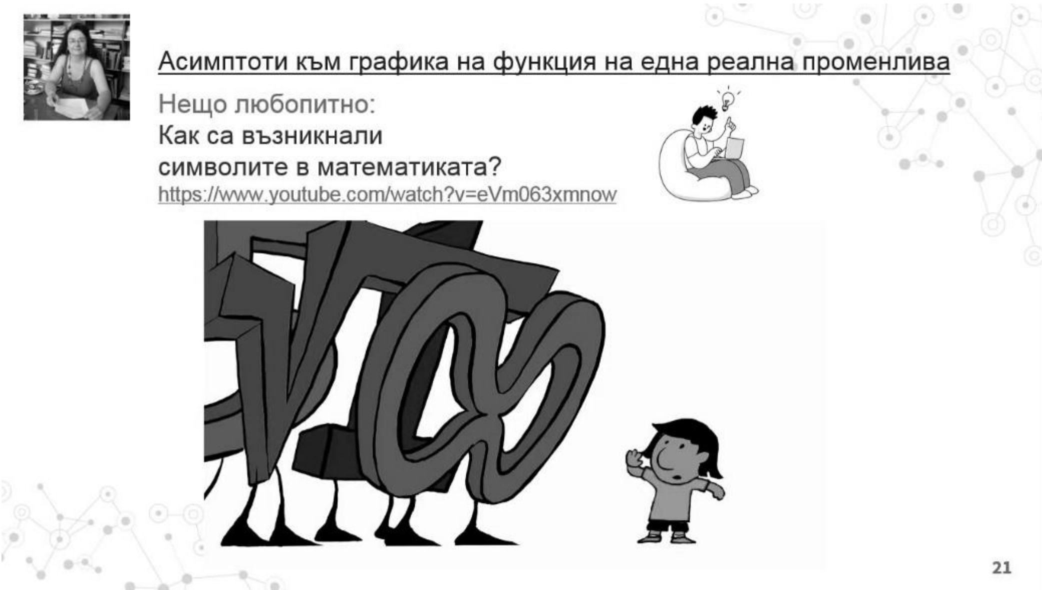
За обучението по темата **Асимптоти** е разработена интерактивна, мултимедийна и интернет свързана презентация. Тя е информативна и интересна за дигиталното поколение ученици и студенти. При разработването ѝ са спазени указанията от Наръчника по иновативни образователни технологии (Ivanova et al., 2022), който е написан и издаден в изпълнение на Националната програма за повишаване компетентностите на преподавателите от държавните висши училища, подготвящи бъдещи учители (National program for improving the competencies among lecturers in the public higher education institutions that are preparing future teachers, 2021).

Някои конкретни препоръки са:

- Слайдовете на презентацията трябва да следват строга логическа последователност и да са издържани в един стил;
- Още с първите слайдове да бъде завладяно вниманието на аудиторията;
- На всеки слайд, при възможност, да има някакво изображение – чертеж, схема, снимка, фигура, графика и др. и съответен текст към него;
- Ако изображенията на даден слайд са две или повече, то те трябва да се появяват на екрана едно след друго, за да могат да бъдат осмислени;
- Ако е наложително на даден слайд да има повече текст, то той трябва да се показва последователно, на малки логически свързани порции, като е желателно съседните порции текст да са в различен цвят, за да се отличават една от друга;
- Когато лекторът говори по даден слайд, той първо трябва да прочете или преразкаже написания на него текст и след това да добави още информация, ако това е необходимо;
- Презентацията е интерактивна и интернет-свързана, ако в нея се добавят някои от следните елементи:
    - кратко филмче или анимация по темата (фиг.2.);
    - хипервръзка към сайт в интернет с полезна информация по темата на презентацията;
    - мисъл на известен човек, касаеща съответната област;
    - афоризъм, известен цитат или кратък академичен виц, придружен с подходящо анимирано изображение или видео и др. (фиг.3.)



Фиг. 2. Слайд с кратко обучително видео по темата Асимптоти



Фиг. 3. Слайд с хипервръзка към кратко любопитно видео

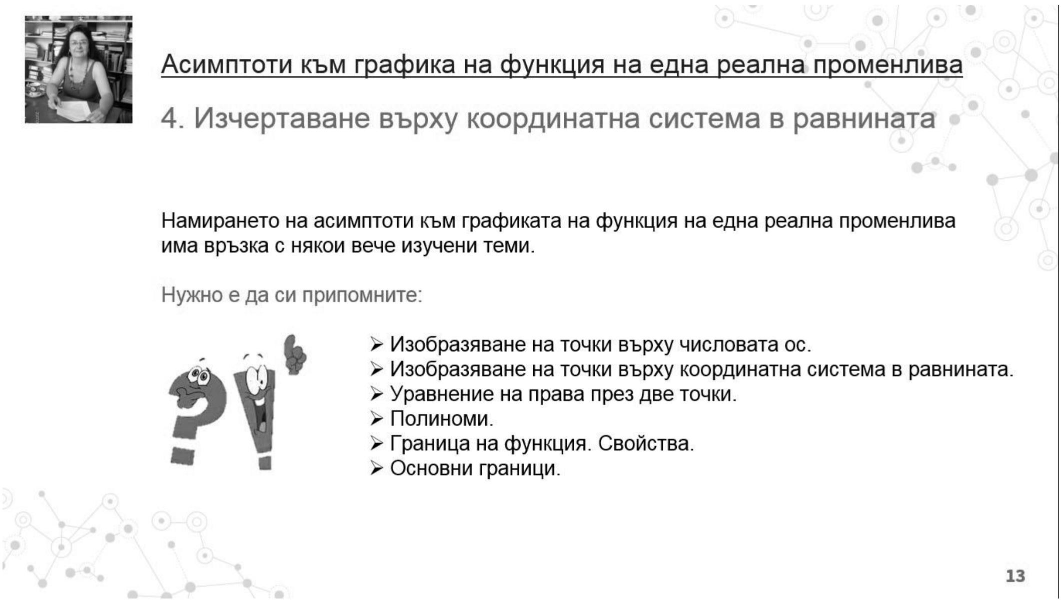
- От значение за информативността и лесното възприемане от аудиторията е подходящият избор на следните технически елементи:
  - фон на слайдовете – трябва да бъде светъл, релефен и неутрален, за да не доминира и по възможност да кореспондира с предмета на дисциплината;
  - шрифт на текста – препоръчително е да бъде несерифен, за да се вижда по-ясно и от голямо разстояние, например Arial;
  - големина на буквите – да е достатъчна, за да се чете текста и от последния ред на залата при традиционно обучение;
  - цвят на текста – трябва да контрастира на фона, като е задължително да се използват топли и студени цветове от една гама; студените цветове да преобладават, защото топлите действат разсейващо и дори приспивно;
  - ефекти – използват се умерено, за да не се отклонява вниманието на аудиторията;
- Научно доказано е, че музиката на Моцарт е като допинг за мозъка и подобрява умсвените способности на обучаемите. Препоръчително е подходяща музика да звучи преди началото на презентацията и / или по време на междучасието (Ivanova et al., 2022).

Спазени са и някои допълнителни правила за създаване на презентация за дистанционно обучение:

- използван е Slide Size: Widescreen (16:9), за да се запълни целия екран при стартиране на презентацията;
- първият и последният слайд са информативни и съдържат информация за лектора: академична длъжност, научна степен, **име и фамилия,** институция на автора, данни за контакт с него и др. (фиг.4.);

- на всеки междинен слайд, в някой от ъглите е препоръчително да присъства снимка на лектора, на която той е приветлив, усмихнат и предразполагащ обучаемите (фиг. 5.).

Фиг. 4. Първи слайд на презентацията с информация за лектора



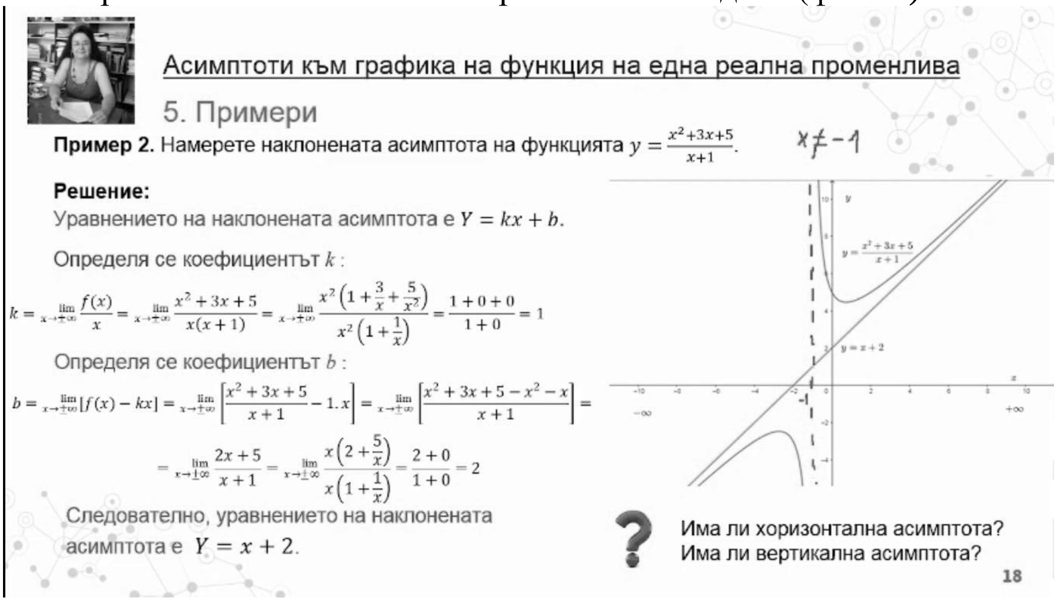
Фиг. 5. Междинен слайд по темата Асимптоти

3. Видео-лекция

За провеждането на дистанционно обучение (синхронно или асинхронно) по темата **Асимптоти** е записана видео-лекция на база разработената презентация. Използвана е програмата-рекордер Open Broadcaster Software (OBS Studio).

Видео-лекцията е публикувана в канала www.youtube.com и е достъпна на адрес https://youtu.be/0rSeqLT6q1U.

Използвана е възможността на PowerPoint за писане върху слайдовете с писалка (Pen), която позволява на преподавателя да дава допълнителни пояснения относно теорията или технологията за решаване на задачи (фиг. 6.).



Фиг. 6. Използване на възможността на PowerPoint за писане върху слайдовете с писалка (Pen) при решаването на конкретна задача

Заключение

Целта на настоящата статия е популяризиране и мултиплициране на добрите практики в областта на иновативните образователни технологии и дидактически модели.

Доказана е основната хипотеза на автора, че фундаменталната дисциплина Висша математика и в частност разделът Математичен анализ може да бъде представена по интересен и лесен за усвояване начин на студенти и на ученици с профил Математика в съответствие с тяхните нагласи и възприятия в сферата на ИКТ.

Разработена е интерактивна мултимедийна интернет свързана презентация по темата **Асимптоти**, която е част от учебната програма по дисциплината *Висша математика 1*, *Математичен анализ 1* и Модул 3. *Практическа математика* от учебната програма за профилирана подготовка по Математика в Р България.

Предстои апробиране на предложения иновативен метод на преподаване през учебната 2022/2023г. По метода на директното пряко групово анкетиране с предварително структуриран въпросник ще бъде събрана информация за ефекта, отношението и удовлетвореността на обучаемите. Резултатите ще бъдат анализирани и публикувани в следващи изследвания на автора.

Докладът е подкрепен от **Проект 2022-ФПНО-03** на Русенски университет.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. *Darzhaven vestnik* (08 January 2021), broy 2, t.2.3
2. EC (2021). *Digital education action plan*. Available at: https://ec.europa.eu/education/education-in-the-eu/digital-education-action-plan.bg
3. Ivanova et al. (2022). *Innovative Educational Technologies Handbook* Available at: https://www.mon-nmuciot.bg/virtualLibrary.html
4. Learning pyramid (October, 2021). Available at: https://www.educationcorner.com/the-learning-pyramid.html
5. Lecheva A. (2021). *A five-level model of teaching mathematics based on constructivism and interactivity*, PROCEEDINGS OF UNIVERSITY OF RUSE, volume 60, book 6.4, pp. 59-64, ISBN: 2603-4123. Available at: https://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp21/6.4/6.4-9.pdf
6. Lecheva A., *Video-lekcia*. Available at: https://youtu.be/0rSeqLT6q1U
7. MON (2022). Available at: www.mon.bg
8. *National program for improving the competencies among lecturers in the public higher education institutions that are preparing future teachers* (2021). Available at: https://web.mon.bg/bg/101030
9. University of Ruse (2022). Available at: www.uni-ruse.bg

USING SIMULATIONS IN EXCEL TO EVALUATE THE ESTIMATORS OF THE EXPECTATION AND THE VARIANCE

Chief Assistant Professor Deyan Mihaylov, PhD
University of Economics-Varna, Bulgaria

Abstract: *Unbiased estimators of the expected value and the variance are well known in statistical theory. This paper presents an approach for experimental validation of the theoretical formulas. It is assumed that we have the entire population or a representative sample and the expected value and fhe variance are known. Re-samples are taken from the population and for each re-sample mean values, biased and unbiased estimates of variance are calculated. The experiment shows that the mean of sample variance is equal to the population variance. The re-samples are simulated in MS Excel.*

Keywords:*MS Excel; Re-sample; Simulations; Unbiased Estimators*

JEL code: *C60*

ИЗПОЛЗВАНЕ НА СИМУЛАЦИИ В СРЕДАТА НА MS EXCEL ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ОЦЕНКИТЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКОТО ОЧАКВАНЕ И ДИСПЕРСИЯТА

Гл. ас. д-р Деян Михайлов
Икономически университет – Варна, България

Въведение

Най-често използваните характеристики на вероятностните разпределения са математическото очакване и дисперсията. Оценяването им по извадки от генералната съвкупност е важна задача на дескриптивната статистика. Оценките на параметрите трябва да бъдат състоятелни, неизместени, ефективни и достатъчни.

В настоящата работа ще бъде разгледано само свойството неизместеност. По определение неизместена е тази оценка, чието математическо очакване е равно на оценявания параметър. С други думи, ако сме направили много извадки от една генерална съвкупност, средната на оценката на параметъра на всяка извадка ще клони към самия параметър от генералната съвкупност .

Ако извадката се състои от единиците $x_1, x_2, \dots, x_N$, то се формулират следните твърдения:

Твърдение 1: Неизместена оценка на математическото очакване на генералната съвкупност е средната на извадката

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ . \tag{1}$$

Твърдение 2: Величината

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \tag{2}$$

е изместена оценка на дисперсията, а величината

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \qquad (3)$$

е неизместена оценка на дисперсията.

Доказателствата на двете твърдения са широко известни (Kenney, 1947). В настоящата работа ще покажем верността им, като проведем симулационен експеримент. Реализацията на експеримента е в средата на MS Excel. Този продукт притежава вградени функции, които позволяват създаване на симулации (Guerrero, 2019). Същевременно потребителският интерфейс дава много добри възможности за наблюдаване на процеса на симулиране.

Модел на изследването:

Нека допуснем, че разполагаме с цялата генерална съвкупност. Тогава точните стойности на математическото очакване и дисперсията могат да се получат по формулите (1) и (2). Ако от тази генерална съвкупност направим извадка и използваме отново формулите (1) и (2), в общия случай изчислените стойности ще се отклоняват от истинските математическо очакване и дисперсия. За са покажем, че оценките са неизместени или изместени, е необходимо да направим много случайни извадки, да изчислим оценките за всяка извадка и да намерим средната стойност на оценките. Ако тя е близка до параметрите на генералната съвкупност, можем да считаме, че оценката е неизместена.

Изборът на всеки елемент, включен в извадката, трябва да бъде независим от избора на останалите. За да се осигури независимост на избора, извадката трябва да е с връщане, т.е. при изтегляне на елемента, той се регистрира, след това се връща в генералната съвкупност и може да бъде избран отново. В противен случай вероятността за избор на i –тия елемент е събитие, зависещо от избора на първия, втория, ..., $i-1$ –вия елемент.

Извличането на извадка с обем k от дадено множество с мощност, равна на N , без значение дали става дума за генерална съвкупност или за извадка от генерална съвкупност, не представлява трудност от алгоритмична гледна точка. Един възможен начин е да се номерират елементите на множеството от 1 до N. След това се получава набор от k случайни цели числа в интервала от 1 до N и се извличат елементите със съответните номера.

Математическото очакване на квадрата на грешката при експеримента е (Brandimarte, 2014):

$$E(\bar{x}-\mu)^2 = \frac{\sigma^2}{N} = \frac{DX}{N}. \qquad (4)$$

Ако разполагаме с данни за DX, можем да установим такава стойност на броя на извадките, при която грешката да бъде достатъчно малка. Необходимият брой на извадките може да бъде значителен. За да намалим, например, грешката 10 пъти, трябва да увеличим броя на експериментите 100 пъти. Това изисква използването на компютърна техника и подходящ софтуер. В повечето програмни среди (включително в Excel) има вградени генератори на псевдослучайни числа, които дават възможност за генериране на извадки.

Числен пример:

Нека генералната съвкупност има биномно разпределение с параметри $p = 0{,}5$ и $n = 4$. Тя може да се моделира с числата 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4. Математическото очакване на генералната съвкупност е

$$EX = np = 2\,,$$

а дисперсията

$$DX = np(1-p) = 1.$$

От генералната съвкупност се извличат с връщане извадки с обем $k = 7$.

Ако направим, например, 1000 извадки, по формула (4) получаваме

$$E(\bar{x}-\mu)^2 = \frac{1}{1000} \rightarrow E|\bar{x}-\mu| = \frac{1}{\sqrt{1000}} = 0{,}032$$

На фиг. 1 е показан работен лист на Excel, в който е реализирано симулирането на оценките на математическото очакване и дисперсията.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	*X~Bi(0,5;4)*				**№ на извадка**		1	2	3
2	**№**	***X***					4	3	7
3	1	0					14	2	3
4	2	1					11	3	15
5	3	1			**Номера на изтеглените стойности**		4	10	13
6	4	1					5	1	9
7	5	1					10	10	1
8	6	2					14	12	4
9	7	2					1	1	2
10	8	2					3	1	1
11	9	2					2	1	3
12	10	2			**Извадки (с връщане)**		1	2	3
13	11	2					1	0	2
14	12	3					2	2	0
15	13	3					3	3	1
16	14	3			**Средни оценки**	**Оценки**			
17	15	3			2,022714286	$\bar{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$	1,8571	1,4286	1,7143
18	16	4							
19	***EX*=**	**2**			0,856816327	$s^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2$	0,6939	0,8163	1,0612
20	***DX*=**	**1**			0,999619048	$\hat{s}^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2$	0,8095	0,9524	1,2381
21									
22				$D(\bar{x})=$	0,134373537				
23				$D(s^2)=$	0,17427496				
24				$D(\hat{s}^2)=$	0,237207584				

Фигура 1. Симулиране на извадки

Източник: *Собствена разработка.*

В клетки A3:B18 са въведени номерата на елементите от генералната съвкупност от 1 до 16 и стойностите на самите елементи. В клетки B19 и B20 са изчислени математическото очакване и дисперсията на генералната съвкупност. Използвани са вградените функции AVERAGE(B3:B18) и VAR.P(B3:B18).

В клетки G2:G8 се генерират случайни числа с вградената функция RANDBETWEEN(1:16).

В клетки G9:G15 се извличат стойностите на елементите от генералната съвкупност. Използва се (за клетка G9 вградената функция VLOOKUP(G2;$A$3:$B$18;2;FALSE). Формулата се копира в клетки G10:G15.

В клетки G17, G19 и G208 се пресмятат оценките по формулите (1-3), като се използват вградените функции AVERAGE(G9:G15), VAR.P(G9:G15) и VAR.S(G9:G15).

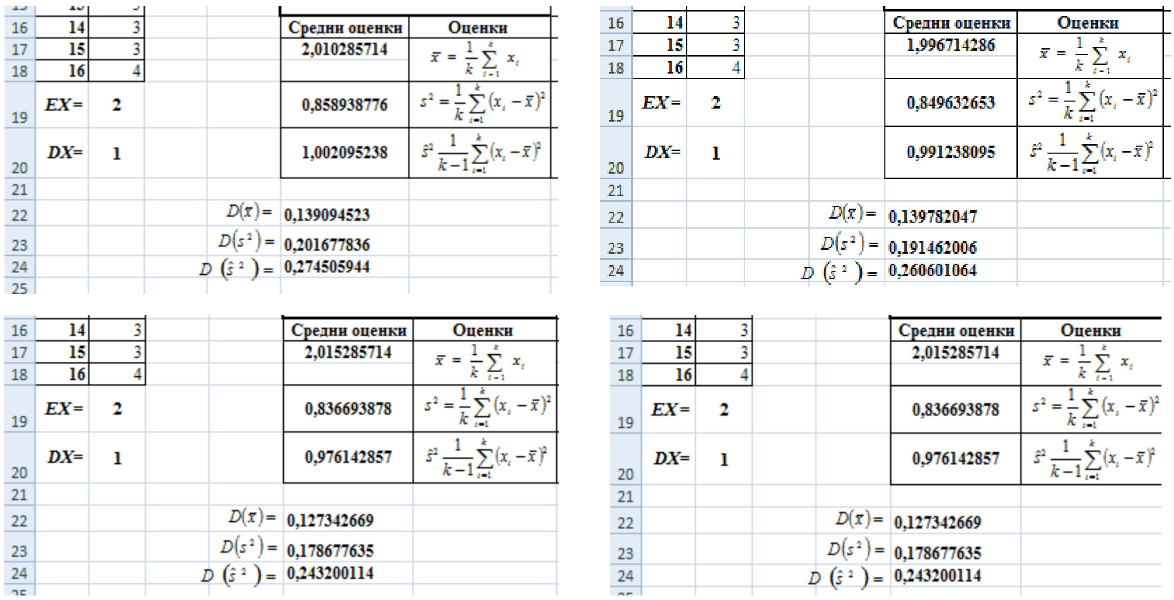
Формулите от колона G се копират в колони H, I, J, …, ALR, за да се получат 1000 симулации.

В клетки E17, E19 и E20 се пресмятат средните стойности на оценките от извадките. В клетки E22, E23 и E24 са пресметнати дисперсиите на средните стойности.

Оценките на отделните извадки може да са далече от истинските стойности на математическото очакване и дисперсията, което се вижда на фиг. 1. При усредняването им, обаче

- средната стойност на оценките, получени по формула (1) е близка до математическото очакване на генералната съвкупност;
- средната стойност на оценките, получени по формула (3) е близка до дисперсията на генералната съвкупност.
- средната стойност на оценките, получени по формула (2) е значително по-ниска от дисперсията на генералната съвкупност.

С последователно натискане на функционален клавиш F9 се стартира нова симулация. На фиг. 2 са показани резултатите от оценка на параметрите от няколко последователни симулации.



Фигура 2. Резултати от симулации при обем на извадката равен на 7

Източник: *Собствена разработка.*

В работния лист е въведена генерална съвкупност, съдържаща само 16 елемента. Вероятността за избор на всеки един от тях точно съответства на вероятността за избор на случайна величина, която има биномно разпределение с параметри $p = 0,5$ и $n = 4$. В примера обемът на извадката е 7. При извадка с връщане можем да увеличим обема на извадката и тя да достигне обема на генералната съвкупност и дори да го надвиши. При това математическото очакване на параметрите не се изменя, но дисперсията им намалява (фиг. 3).

	Средни оценки	Оценки
	1,99	$\bar{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$
	0,935117188	$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2$
	0,997458333	$\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2$
$D(\bar{x})=$	0,067725538	
$D(s^2)=$	0,094191083	
$D(\hat{s}^2)=$	0,107168521	

	Средни оценки	Оценки
	2,001	$\bar{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$
	0,915773438	$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2$
	0,976825	$\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2$
$D(\bar{x})=$	0,069044607	
$D(s^2)=$	0,092119863	
$D(\hat{s}^2)=$	0,104811933	

	Средни оценки	Оценки
	2,00775	$\bar{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$
	0,942804688	$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2$
	1,005658333	$\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2$
$D(\bar{x})=$	0,067452703	
$D(s^2)=$	0,100396078	
$D(\hat{s}^2)=$	0,114228427	

	Средни оценки	Оценки
	2,0045625	$\bar{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$
	0,921707031	$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2$
	0,983154167	$\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2$
$D(\bar{x})=$	0,072281934	
$D(s^2)=$	0,097814324	
$D(\hat{s}^2)=$	0,111290964	

Фигура 3. Резултати от симулации при обем на извадката равен на 16
Източник: *Собствена разработка*.

Увеличаването на обема на извадката до обема на генералната съвкупност (и повече) е близко до метода на бутстрапинга (bootstrapping) (Efron & Tibshirani, 1993). При класическият бутстрапинг разполагаме с извадка от неизвестна генерална съвкупност. В настоящия пример работим с извадка, която е абсолютно представителна, т.е. с точен модел на генералната съвкупност.

Изводи

Направеният експеримент потвърждава теоретичните постановки за изместените и неизместените оценки на математическото очакване и дисперсията на генералната съвкупност. Подобни модели биха могли да се използват в преподаването.

Трябва да се има предвид, че осигуряването на представителност при други параметри на биномното разпределение или при други разпределения изисква по-голям обем на представителната извадка. Ако, например, параметрите на биномното разпределение са $p = 0,6$, $n = 4$, минималният модел на случайната величина трябва да бъде с обем 625 (16 нули, 96 единици, 256 двойки, 256 тройки и 81 четворки). При такива параметри на експеримента се налага използване на други софтуерни инструменти. Подходящи за използване могат да бъдат Python или R (Bruce, Bruce, & Gedeck, 2017).

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Brandimarte, P. (2014). *Handbook in Monte Carlo Simulation.* Hoboken: John Wiley & Sons.
2. Bruce, P., Bruce, A., & Gedeck, P. (2017). *Practical Statistics for Data Scientists.* O'Reilly.
3. Efron, B., & Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap.* New York: Chapman&Hall.
4. Guerrero, H. (2019). *Excel Data Analysis: Modeling and Simulation* (2nd изд.). Springer.
5. Kenney, J. F. (1947). *Mathematics of Statistics.* New York: D. Van Nostrand.

A COMPARISION BETWEEN ENTRY LEVEL TEST IN MATHEMATICS OF THE FIRST-YEAR STUDENTS IN UNIVERSITY OF ECONOMICS-VARNA DURING DIFFERENT ACADEMIC YEARS

Chief Assistant ProfessorDeyan Mihaylov, PhD
University of Economics-Varna, Bulgaria

Abstract: *Mathematics is a fundamental subject at the University of Economics-Varna. It is supposed that the first-year students have skills in maths according to high school programs. Unfortunately there are gaps in their mathematical knowledge. It is necessary to check the entry level of the students. This paper presents a study of students' skills. In different academic years the first-year students make the same test. The results show improvement in average entry level test from 2014 to 2021. The Chi-Square test is used*

Keywords*:Mathematical Skills; Entry Level; Testing.*

JEL code: *C60*

СРАВНЕНИЕ МЕЖДУ ВХОДНОТО НИВО ПО МАТЕМАТИКА НА СТУДЕНТИТЕ-ПЪРВОКУРСНИЦИ ОТ ИКОНОМИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА ПРЕЗ РАЗЛИЧНИ УЧЕБНИ ГОДИНИ

Гл. ас. д-р Деян Михайлов
Икономически университет – Варна, България

Въведение

За важността на фундаменталната подготовка по математика говори фактът, че тя е обект на особено внимание в европейски мащаб. В своя Препоръка 2018/С 189/1 от 22 май 2018 г. Съветът на Европейския съюз определя Набор от ключови компетентности, необходими за личностна реализация, здраве, пригодност за заетост и социално приобщаване. като основни умения се посочват езиковата и математическа грамотност и основните цифрови умения (Council of the EU, 2018).

Математиката е една от фундаменталните дисциплини в учебните планове за подготовка на бакалаври по професионално направление „Икономика”. Предполага се, че завършилите средно образование притежават необходимите знания и умения в съответствие с учебните програми по математика за средните училища. Учебната програма по математика в Икономически университет – Варна има за цел достигане на определено желано състояние, като се надграждат получените в средното училище знания и умения. Във връзка с това е важно да се знае до каква степен са усвоени тези знания и умения.

Същност на изследването и резултати:

За оценяване на входното ниво по математика сред част от студентите-първокурсници по специалности от професионално направление „Икономика” в Икономически университет – Варна, през 2014 година беше проведен тест, съдържащ 30 задачи от следните области на елементарната математика:

- действия с рационални дроби (три задачи с отворен отговор);
- действия с десетични дроби (седем задачи с отворен отговор);
- линейни уравнения с едно неизвестно (четири задачи с отворен отговор);
- системи от две линейни уравнения с две неизвестни (три задачи с отворен отговор);
- квадратни уравнения (две задачи с отворен отговор);
- степенуване и коренуване (пет задачи със затворен отговор);
- линейни неравенства и системи линейни неравенства (три задачи с отворен отговор);
- тъждества (три задачи със затворен отговор).

Проверката имаше две цели

- Да се придобие представа какво е реалното състояние на обучаемите, какви знания и умения притежават те, какво трябва да се направи, за да се запълнят пропуските, и до каква степен може да се очаква те да усвоят планирания съгласно учебната програма материал.
- Обучаемите да разберат, че имат сериозни пропуски, и че трябва да положат усилия, за да компенсират пропуснатото (Михайлов, 2015).

През 2021 и 2022 г. същият тест беше използван за проверка на входното ниво на студенти-първокурсници. Тъй като тестовите въпроси бяха същите, има възможност да се сравни нивото на различните поколения студенти и да се направят изводи относно настъпили промени.

Извадката не е представителна за университета. Изследвани са студенти от две специалности. През 2014 година с теста са проверени знанията на 57 студента, през 2022 – на 51 и през 2022 г – на 37.

За оценяване на подготовката на студентите е възприет следният критерий: студентът притежава удовлетворителни умения в дадена област, ако верните отговори на въпросите от тази област са 50% и повече.

В таблица 1 са показани обобщени данни от проведените тестове.

Таблица 1

Обобщени данни от проверката на подготовката по математика на студенти-първокурсници

Брой области, в които студентите имат удовлетворителни умения	**Години Брой студенти**		
	2014	**2021**	**2022**
0	20	5	4
1	10	7	9
2	12	8	6
3	4	10	2
4	3	10	5
5	5	5	5
6	0	1	2
7	3	3	3
8	0	3	1
Общ брой	57	52	37

Източник: *Собствена разработка.*

За всяка година е изследвана извадка от студенти. С теста χ^2 може да се провери дали извадките са от една и съща или от различни генерални съвкупности.

Приема се нулевата хипотеза, че извадките са от една и съща генерална съвкупност. Алтернативната хипотеза е, че извадките са от различни генерални съвкупности. Избира се ниво на значимост $\alpha = 0{,}05$.

Построява се кръстосана таблица за 2014 и 2021 година (табл. 2).

Таблица 2

Кръстосана таблица за оценяване на зависимостта между подготовката по математика на приетите през 2014 и 2021 години

Години	**Подготовка**			**Общо**
	Слаба	**Средна**	**Добра**	
2014	$n_{11} = 42$	$n_{12} = 12$	$n_{13} = 33$	$n_{1*} = 57$
2021	$n_{21} = 20$	$n_{22} = 25$	$n_{23} = 7$	$n_{2*} = 52$
Общо	$n_{*1} = 62$	$n_{*2} = 37$	$n_{*3} = 10$	$n = 109$

Статистиката

$$X^2 = n\left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{n_{ij}^2}{n_{i*}\cdot n_{*j}} - 1\right). \qquad (1)$$

има разпределение χ^2 с $(2-1)(3-1) = 2$ степени на свобода(Кобзарь, 2006).

При прилагане на формула (1) се получава $X^2 = 13{,}77$. Критичната стойност $\chi^2_{1-0{,}05}(2) = 5{,}99$. Изчислената статистика надвишава критичната стойност и това дава основание за отхвърляне на нулевата хипотеза с вероятност за грешка 0,05. Извадките са от различни генерални съвкупности. Приетите през 2021 година студенти имат по-добра подготовка по математика от приетите през 2014.

Аналогично сравняваме подготовката на приетите през 2021 и 2022 години (табл. 3).

Таблица 3

Кръстосана таблица за оценяване на зависимостта между подготовката по математика на приетите през 2021 и 2022 години

Години	**Подготовка**			**Общо**
	Слаба	**Средна**	**Добра**	
2014	$n_{11} = 20$	$n_{12} = 25$	$n_{13} = 7$	$n_{1*} = 52$
2021	$n_{21} = 19$	$n_{22} = 12$	$n_{23} = 6$	$n_{2*} = 37$
Общо	$n_{*1} = 39$	$n_{*2} = 37$	$n_{*3} = 13$	$n = 89$

При прилагане на формула (1) се получава $X^2 = 2{,}205$. Критичната стойност $\chi^2_{1-0{,}05}(2) = 5{,}99$. Изчислената статистика не надвишава критичната стойност, .т.е. няма основание за отхвърляне на нулевата хипотеза. Извадките са от една и съща генерална съвкупност. Приетите през 2021 и 2022 година студенти имат еднаква подготовка по математика.

Изводи

Анализът на емпиричните данни показва, че приетите през 2021 г. в наблюдаваните специалности студенти имат по-добра подготовка по математика от приетите през 2014 г. Не се забелязва значима разлика между подготовката на приетите през 2021 и 2022 години.

Резултатите от Програмата за международно оценяване на учениците (PISA), организирана от Организацията за икономическо сътрудничество и развитие показват, през 2009 г. средният резултат по математика е бил 428 точки, през 2012 – 439, през 2015 – 441 и през 2018 – 436 (Петрова, 2016), (OECD, 2019). Това са резултатите на 15 годишните ученици, които 3-5 години след изследването постъпват в университетите. Не се забелязва значимо подобрение на подготовката на българските ученици. Следователно положителната промяна в подготовката на студентите в наблюдаваните специалности се дължи на други фактори (например на по-добра рекламна стратегия).

Направените изводи могат да се считат за валидни само за изследваните специалности. Както беше подчертано, извадката не е представителна за университета.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Council of the EU. (22 May 2018 г.). Council Recomendation 2018/C 189/01. *Official Journal of the European Union* , стр. 1-14.
2. OECD. (2019). *PISA 2018 Results (Volume 1) What Students Know and Can Do (Volume I).* Paris: OECD Publishing.
3. Kobzar, A. I. (2006). Prikladnaya matematicheskaya statistika dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov. Moskva: MAIK.
4. Mihaylov, D. (2015). Vkhodnoto nivo po matematika na studentite parvokursnitsi po spetsialnosti ot napravlenie Ikonomika. Matematikata kato fundamentalna i prilozhna nauka (str. 391-399). Varna: Nauka i ikonomika.
5. Petrova, S. (2016). Prirodnite nauki i tekhnologiite v uchilishteto na XXI vek. Rezultati ot uchastieto na Bŭlgariya v Programata za mezhdunarodno otsenyavane na uchenitsite PISA 2015. Sofiya: TSKOKUO.

COMPARISON BETWEEN NONLINEAR LEAST SQUARE METHOD AND LINEARIZATIONS OF SATURATION GROWTH MODEL

Chief Assistant Professor Deyan Mihaylov, PhD
University of Economics-Varna, Bulgaria

Abstract: *The determination of the regression parameters is one of the tasks of regression analysis. They are easily obtained in the case of linear dependence. The nonlinear models require applying more complicated methods. To avoid this it is often recommended to use linearization of the regression equation. This paper shows that this approach leads to increase in the bias of regression parameters. The example of saturation-growth model of Michaelis-Menten equation is used. The parameters of the linearization plots of Lineweaver-Burk, Eadie-Hofstee and Hanes-Wolf are biased from the parameters which are determined by nonlinear least square method.*

Keywords*:Approximation; Least Square Method; Linearization; Saturation-Growth Model*

JEL code: *C60*

СРАВНЕНИЕ МЕЖДУ НЕЛИНЕЙНИЯ МЕТОД НА НАЙ-МАЛКИТЕ КВАДРАТИ И ЛИНЕАРИЗАЦИЯТА НА ДРОБНО-ЛИНЕЕН РЕГРЕСИОНЕН МОДЕЛ

Гл. ас. д-р Деян Михайлов
Икономически университет – Варна, България

Въведение

Практическото използване на фундаменталните методи на математиката е свързано с прилагане на числени алгоритми за решаване на конкретни задачи. Обикновено достигането на точно решение е невъзможно или нецелесъобразно. Изследователят би трябвало да „изпитва щастие", ако успее да достигне точност до десетия знак (Trefethen, 2011). Причините за отклоненията са различни. Самото представяне на числата в двоичен вектор с краен брой разряди обективно води до необходимост от закръгление (Burden, Faires, & Burden, 2014). Голяма част от изчислителните алгоритми са итеративни, като всяка итерация подобрява решението. Абсолютната точност, обаче, се достига при безкраен брой итерации, което е практически невъзможно. Като пример могат да се посочат методите за числено решаване на уравнения или системи. В много случаи входните данни са неточни поради несъвършенство на технологията на измерване на моделираните величини. Средствата за измерване и алгоритмите за обработка на опитните данни имат определена погрешност. Следователно се налага да се направи компромис с точността. Изниква обаче въпросът какъв трябва да е този компромис и до какво води той.

Известна е една задача-шега, показваща какви могат да бъдат последствията от приближенията. Дадена е система от две уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x + \quad 10y = \ 11{,}1 \\ 10x + \quad 101y = 111 \end{array} \right.$$

Решението на тази система е $x = 11,1$, $y = 0$.

Ако приемем, че дясната част на първото уравнение е приблизително равна на 11, се получава системата

$$\left| \begin{array}{l} x + \quad 10y = \ 11 \\ 10x + \quad 101y = 111 \end{array} \right.$$

Решението ѝ е $x = 1$, $y = 1$.

Вижда се, че една минимална промяна (примерно използване на измервателен уред с по-нисък клас на точност) води до голяма промяна в резултата.

В пълна сила това важи и за апроксимацията на данни с моделираща функция. Една от задачите ѝ е да се определят параметрите на модела. В природните науки това са физически константи, които имат важно теоретично и практическо значение. Обикновено се използва методът на най-малките квадрати (Taylor, 2005). Разполагаме с n наблюдения върху две величини X и Y и се предполага наличието на зависимост между тях от вида $y = f(x, A)$, където A е вектор от параметри. За всяка двойка (x_i, y_i) се образува разлика $\varepsilon_i = y_i - f(x_i)$ и се търси минимума на сумата от квадратите на тези разлики:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2 \ \rightarrow min. \qquad (1)$$

Когато $y = f(x, A)$ е линейна спрямо параметрите, приравнените на нула частни производни по параметрите формират система линейни уравнения, която се решава лесно и минимумът на функцията на грешката се определя точно. Ако моделът има грешки, те се дължат на грешки в измервателната апаратура, но не и в използвания математически алгоритъм.

Когато $y = f(x, A)$ не е линейна спрямо параметрите, задачата в общия случай се решава итеративно, като се използва нелинеен метод на най-малките квадрати, например чрез алгоритъма на Гаус-Нютон или на Левенберг-Маркуарт (Marquardt, 1963). В някои случаи апроксимиращата функция се преобразува чрез логаритмуване или чрез трансформация на зависимата и независимата променлива по такъв, че новата функция да стане линейна спрямо параметрите и след това се прилага обикновения метод на най-малките квадрати. Тези методи могат да дадат решения, близки до най-добрите приближения, но могат и значително да се отклоняват.

В настоящия доклад се разглежда линеаризирането на дробно-линейния регресионен модел. С конкретен пример се показва, че използването на различни линеаризиращи преобразувания води до решения, които са с различни и то доста съществени отклонения от получените със съвременните методи.

Числен пример:

В биохимията се използва известното уравнение на Михаелис-Ментен, което дава връзка между концентрацията на субстрата и скоростта на биохимичната реакция (Johnson & Goody, 2011). Общият вид на уравнението, получено в началото на 20 век е

$$V = \frac{[S]}{[S] + k},$$

където $[S]$ е концентрацията на субстрата, k е константа, а V е безразмерна величина, представляваща относителната част от максималната скорост на реакция, т.е.

$$V = \frac{v}{V_{max}},$$

където v е точната скорост на реакцията.

При заместване се получава алтернативен запис на уравнението

$$v = \frac{[S]V_{max}}{[S] + k}, \qquad (2)$$

който се използва в момента.

Дробно-рационалната функция в дясната част на уравнението е модел на насищане (saturation growth model). Действително, при увеличаване на концентрацията константата k (известна като константа на Михаелис-Ментен) става пренебрежимо малка и скоростта на реакцията клони към максималната, без да може да я надвиши.

Нека уравнението (2) бъде записано в по-привична форма:

$$y = \frac{xa_0}{x + a_1}, \qquad (3)$$

Получената функция е нелинейна, но може да се сведе до линейна по няколко начина:

A) Графика (модел) на Лайнуивър-Бърк (Lineweaver & Burk, 1934).

Уравнението (3) се представя като се вземат реципрочните стойности на двете му части и се преобразува:

$$\frac{1}{y} = \frac{x + a_1}{xa_0} = \frac{x}{xa_0} + \frac{a_1}{xa_0} = \frac{1}{a_0} + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1}{x}. \qquad (4)$$

Полага се:

$$\frac{1}{y} = Y;\ \frac{1}{x} = X;\ \frac{1}{a_0} = A_0;\ \frac{a_1}{a_0} = A_1; \qquad (5)$$

и се получава линейният модел

$$Y = A_0 + A_1 X. \qquad (6)$$

B) Графика (модел) на Еди-Хофсти (Eadie, 1942).

Привеждат се двете части на уравнението (3) под общ знаменател и се преобразува:

$$y(x + a_1) = xa_0 \rightarrow xy = xa_0 - a_1 \rightarrow y = a_0 - a_1 \frac{y}{x}. \qquad (7)$$

Полага се

$$y = Y;\ \frac{y}{x} = X;\ a_0 = B_0;\ a_1 = -B_1; \qquad (8)$$

и се получава линейният модел

$$Y = B_0 - B_1 X\ . \tag{9}$$

C) Графика (модел) на Ханес-Уулф (Hanes, 1932).

Уравнението (3) се преобразува по следния начин:

$$y = \frac{x a_0}{x + a_1} \ \rightarrow \ \frac{x}{y} = \frac{1}{a_0} x + \frac{a_1}{a_0}. \tag{10}$$

Полага се:

$$\frac{x}{y} = Y;\ x = X;\ \frac{1}{a_0} = C_1;\ \frac{a_1}{a_0} = C_0; \tag{11}$$

и се получава линейния модел

$$Y = C_0 + C_1 X\ . \tag{12}$$

Използвани са експериментални данни за биохимична реакция (колони 2-3 на табл. 1).

Подробно е показано решението на модел А. За апроксимация с модела данните се преобразуват (графи 4 и 5 на табл. 1).

Таблица 1

Експериментални данни за скоростта на биохимична реакция

№	**Изходни данни**		**Трансформирани данни**	
	Концентрация x_i	**Скорост на реакцията y_i**	$X_i = \frac{1}{x_i}$	$Y_i = \frac{1}{y_i}$
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	2,856829	14,58342	0,350038	0,068571
2	5,005303	24,74123	0,199788	0,040418
3	7,519473	31,34551	0,132988	0,031902
4	22,101664	72,96985	0,045245	0,013704
5	27,769976	77,50099	0,036010	0,012903
6	39,198025	96,08794	0,025511	0,010407
7	45,483269	96,96624	0,021986	0,010313
8	203,784238	108,88374	0,004907	0,009184

Източник: (Ritz & Streibig, 2008)

При линейната апроксимация с модела (5) се получава $A_0 = 0{,}006747$; $A_1 = 0{,}175668$. t-тестът на Стюдънт показва, че коефициентите са статистически значими.

От полаганията (5) лесно се получават коефициентите на нелинейния модел:

$$a_0 = \frac{1}{A_0} = 148{,}217333\ ;\ a_1 = a_0 \cdot A_1 = 26{,}037048.$$

Точността на модела може да се оцени с величината на сумата от квадратите на отклоненията (табл. 2).

Таблица 2

Оценка на точността на модела $y = \frac{148{,}217333x}{x+26{,}037048}$

№	Концентрация x_i	Скорост на реакцията y_i	$\hat{y}_i = \dfrac{a_0 x_i}{x_i + a_1}$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	2,856829	14,58342	14,654717	0,005083
2	5,005303	24,74123	23,898727	0,709811
3	7,519473	31,34551	33,213105	3,487910
4	22,101664	72,96985	68,050215	24,202805
5	27,769976	77,50099	76,495437	1,011137
6	39,198025	96,08794	89,059864	49,393847
7	45,483269	96,96624	94,258655	7,331018
8	203,784238	108,88374	131,425408	508,126799
			$\boldsymbol{\Sigma}$	**594,268411**

Източник: *Собствена разработка.*

Средната стойност $\bar{y} = 65{,}38487$. Ако приемем, че y не зависи от x и всички отклонения са случайни, сумата от квадратите на грешките е равна на $9427{,}716$. При прилагането на модела грешката е 6,3% от първоначалната, което означава, че моделът обяснява 93,7% от измененията на зависимата променлива. Това позволява да се направи извода, че моделът е добър.

Аналогично се изследват моделите B и C.

Задачата се решава и с нелинейния метод на най-малките квадрати, като се използва вградената функция `nls()` от езика R (R Foundation) .

Данните се въвеждат в масива `Data`:

```
Data
      x         y
1   2.856829  14.58342
2   5.005303  24.74123
3   7.519473  31.34551
4  22.101664  72.96985
5  27.769976  77.50099
6  39.198025  96.08794
7  45.483269  96.96624
8 203.784238 108.88374
```

Необходимо е да се зададат начални стойности на параметрите на модела. Използват се стойностите, получени при един от линейните модели, като се разчита, че те са близки до най-доброто възможно приближение.

```
>nls(y~a0*x/(x+a1),Data,start=list(a0=148,a1=26))

Nonlinear regression model
  model: y ~ a0 * x/(x + a1)
   data: Data
    a0     a1
```

```
126.03  17.08
 residual sum-of-squares: 234.4
```

Резултатите за моделите A, B, C и за нелинейния метод на най-малките квадрати са показани в табл. 3.

Таблица 3

Обобщени резултати за апроксимацията на опитните данни

Показател	**Модел A**	**Модел B**	**Модел C**	**Нелинеен МНМК**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Уравнение	$y = \frac{148{,}217x}{x + 26{,}037}$	$y = \frac{137{,}713x}{x + 22{,}757}$	$y = \frac{118{,}733x}{x + 15{,}862}$	$y = \frac{126{,}033x}{x + 17{,}079}$
$(\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{\hat{y}_i})^2$	594,268	370,207	306,872	234,353
Коефициент на детер-минация	0,937	0,961	0,967	0,975
Грешка в $\mathbf{a_0}$	17,6%	9,3%	5,8%	-
Грешка в $\mathbf{a_1}$	52,5%	33,2%	7,1%	-

Източник: *Собствена разработка.*

Изводи

Численият пример показва, че всички модели обясняват голяма част от вариацията на зависимата променлива. Ако считаме, че най-добрият модел се получава с нелинейния метод на най-малките квадрати, преобразуванията (4), (7) и (10) внасят промени в оценката на параметрите, като в някои случаи грешката е доста чувствителна. Когато става дума за оценка на параметрите на физически закони такива отклонения би трябвало да се считат за недопустими, тъй като могат да доведат до погрешни теоретични изводи.

В учебните материали на редица курсове има раздели, посветени на линеаризацията на дробно-линейната регресия. В много малко от тях се споменава, че самият метод на линеаризация (независимо с кой от трите модела) внася допълнителна неточност, като отклоненията може да са значителни.

При наличието на компютри и подходящ софтуер преобразуването на регресионното уравнение с цел използване на линейния метод на най-малките квадрати губи практическото си значение. Такива методи представляват интерес повече от историческа гледна точка. И в преподавателската, и в изследователската работа следва да се обръща внимание на по-прецизните нелинейни методи.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Burden, R. L., Faires, J. D., & Burden, A. M. (2014). *Numerical Analysis.* Boston: Cengage Learning.
2. Eadie, G. S. (1942). The Inhibition of Cholinesterase by Physostigmine and Prostigmine. *Journal of Biological Chemistry , 146* (1), 85-93.

3. Hanes, C. S. (1932). Studies on plant amylases:The effect of starch concentration upon the velocity of hydrolysis by the amylase of germinated barley. *Biochemical Journal , 26* (5), 1406-1421.
4. Johnson, K. A., & Goody, R. S. (2011). The Original Michaelis Constant: Translation of the 1913 Michaelis–Menten Paper. *Biochemistry , 50* (39), 8261-8520.
5. Lineweaver, H., & Burk, D. (1934). The Determination of Enzyme Dissociation Constants. *J. Am. Chem. Soc. , 56* (3), 658-666.
6. Marquardt, D. W. (1963). An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *SIAM Journal on Applied Mathematics , 11* (2), 431-441.
7. R Foundation. The R Project for Statistical Computing: https://www.r-project.org/
8. Ritz, C., & Streibig, J. C. (2008). *Nonlinear Regression with R.* New York: Springer.
9. Taylor, B. N. (2005). The Determination of Best Values of the Fundamental Physical Constants. *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences , 363* (1834), 2105-2122.
10. Trefethen, L. N. (2011). Ten Digits Problems. От D. Schleicher, & M. Lackmann (Ред.), *An Invitation to Mathematics* (стр. 119-136). Berlin, Heidelberg: Spriger.

THE INTERACTION OF MATHEMATICS WITH ECONOMICS

Chief Assist. Prof. Velina Yordanova, PhD.
University of Economics - Varna, Bulgaria

Abstract: *Although mathematics and economics are two separate fields of knowledge, each with its own object and subject of study, the connection between these two sciences is becoming stronger and more tangible. In modern economics the application of mathematics is widely used. This fact is due that mathematical tools allow for reliable and accurate analysis in the study of complex economic systems and the processes taking place in them. In the present report the author attempts to point out the connection between mathematics and economics. The factors influencing the interaction of mathematics with economics are also pointed out.*

Keywords*: Connections; Economics; Mathematics*

JEL code: *C00*

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕТО НА МАТЕМАТИКАТА С ИКОНОМИКАТА

Гл. ас. д-р Велина Йорданова
Икономически университет – Варна, България

В съвременната икономическа реалност необходимостта от използването на надеждни и точни методи за анализ са от първостепенна важност. Сложните икономически системи и процесите, протичащи в тях изискват използването на знания и от много други области, като например математиката. Математическият апарат е универсално средство за решаването на редица проблеми, пред които са изправени икономистите. Взаимодействието на математиката с икономиката в днешно време става все по-силно и осезаемо. Именно поради това редица автори [Атанасов, Б., Пл. Илиев. 2009: 22-31; Славов, З., 2007: 89-94] изследват развитието на математиката и възможностите, които тя предлага при използването ѝ в икономиката. За широкото приложение на математическите инструменти в икономиката свидетелстват множеството научни разработки от различни автори [Николаев, Р, Т. Милкова. 2022: 96-111; Николаев, Р. 2019: 3-10; Милкова, Т. 2015: 75 – 81; Петков, Й. 2015:487-494; Михайлов, Д. 2021; Мирянов, Р. 2017: 7-17 и др.]

Основната цел, която си поставя авторът в настоящия доклад е да направи опит да изследва връзката на математиката с икономиката. За постигането на така поставената цел авторът прави опит да реши следните задачи:

- да разгледа същността на математиката и възможностите, които тя предоставя;
- да посочи факторите, оказващи влияние върху взаимодействието на математиката с икономиката.

Основният проблем за намирането на връзка между математиката и икономиката се състой в необходимостта, от една страна, да се повиши точността на методите за икономически анализ, планиране, прогнозиране и управление, а от друга страна, в трудността на формализиране и количествено определяне на такива показатели като индивидуални предпочитания, интереси и др. В този смисъл предметните области на математиката и икономиката не само се пресичат и частично съвпадат, допринасяйки за взаимното развитие на тези две научни направления, но могат и да се противопоставят една на друга. В тази връзка е важно да се изясни научния статус както на математиката, така и на икономиката.

От наша гледна точка математиката може да се разглежда от една страна като език за количествено описание на определени закономерности и връзки на емпиричния свят и от друга страна като чиста наука. Математиката създава многофункционални аналитични методи за изучаване на връзките и придобиване на информация за света около нас. Това прави математическия апарат универсален инструмент за решаване на множество казуси. Що се отнася до икономиката бихме могли да я определим като икономическата дейност на обществото, както и съвкупността от отношения, които се развиват в системата на производството, разпределението, обмена и потреблението. Тя е инструмент за анализ на широката социална реалност, при който научната насоченост е към самия проблем.

Приложението на математиката в икономиката не е свързано само с прилагането на определени количествени характеристики и числови примери за илюстриране на едни или други икономически позиции и теории. Математиката е средство за изследване на икономическите проблеми с помощта на числови данни, идентифициращи икономическите връзки и зависимости и на тази основа да се вземат обосновани решения.

Без да се спираме на историческото развитие на математиката като наука, което обхваща различни периоди[1], ще посочим, че в настоящия етап от нейното развитие, тя предоставя възможности за значително по-добро формализиране на многообразните отношения на действителността, да описва и моделира това многообразие с помощта на натрупания богат обем от теоретични знания. Днес математиката се счита за един от най-важните методи за анализ на икономическата реалност. В рамките на икономическия хаос и неопределеност е възможно да се прогнозира поведението на сложните икономически системи и процесите в тях чрез използването математическите методи.

Актуалността на проблема за взаимодействието на математиката и икономиката произтича от осъзнаването на методическите и предметни особености на тези две дисциплини. Основните отличителни черти на математиката: 1) строги правила за извеждане на връзки между елементите на анализа; 2) система от аксиоми, на които се основават математическите формули; 3) високо ниво на абстракция на аналитичните операции.

Между математиката и икономиката има някои общи черти, а именно че и двете се занимават и изучават абстрактни обекти с висока степен на сложност. По-конкретно това означава, че както в математиката всички формули са абстрактни, така и в икономиката процесите, явленията и отношенията между тях са икономически абстракции без пространствени характеристики. Ето защо можем да твърдим, че икономиката е подходящо поле за приложение на математиката.

Редно е да отбележим все пак, че връзката на математиката с икономиката не е едностранен процес. От една страна създаването на нови математически апарати и тяхното използване позволява на икономиката да решава по нов начин съществуващите казуси. Математическият инструментариум разширява възможностите за търсенето на оптимални управленски решения. От друга страна икономиката поставя нови проблеми в областта на математиката и стимулира търсенето на методи за тяхното решение. В тази връзка икономическата практика е повлияла за появата на цели нови направления в областта на математиката като: теория на игрите, теория на масовото обслужване и т.н.

Интегрирането на математическите модели[2] в икономическата теория дава редица предимства, някои от които са: комплексно подхождане към сложните икономически системи (разкриват се не само количествените връзки, но и се задълбочават качествените представи за закономерностите, произтичащи в тях); извеждане на структурните особености на икономическата система, нейните вътрешните и външни функционални връзки; провеждане на икономически експерименти (без да рефлектират пряко върху изследваната икономическа система), оптимална точност на получените резултати.

От икономическа гледна точка има редица изисквания, на които трябва да отговорят математическите модели:

- адекватност – съответствие на модела на неговия оригинал;
- обективност – съответствие между научните изводи и реалните условия;
- простота – второстепенните фактори да не засенчват модела;
- чувствителност – способността на модела да реагира на изменение на началните данни;
- универсалност – широка област на приложение на модела.

Бихме могли да посочим, че при взаимодействието на математиката с икономиката съществуват множество обективни фактори, които едновременно засилват и проблематизират сътрудничеството между тези две научни направления. Тези фактори ще ги обособим в две основни групи. Към първата група от фактори се отнасят:

- развитието на бизнес средата – нараства нуждата от оперативни изчисления, планиране, прогнозиране в мащаба на фирмата и индустрията;
- развитието на информационни технологии, които улесняват - на ниво специални програми - формализирането на икономическата информация и нейното предаване в компресирани обеми;
- преходът от икономика, базирана на материални ресурси, към икономика, основана на знанието – оттук и нарастващият интерес на научната общност към интердисциплинарните изследвания, вниманието към иновациите и новите технологии в науката и практиката;
- нарастващата сложност на социално-икономическите системи, което налага анализирането на големи обеми структурирана информация, създаване на алгоритми за решаване на социално-икономически проблеми и изчисляване на последствията от тези решения.

Що се отнася до втората група от фактори, те включват:

- самия предмет на икономическата наука (човекът и обществото) и трудностите при формализирането на съответните явления и процеси;
- кризата на основите на икономическата наука (ориентация към социално-хуманитарно познание вместо към естествени науки, преосмисляне на методологията, преосмисляне на критериите за научен характер и самото понятие за наука).

В заключение на изложеното по-горе ще отбележим, че взаимодействието на математиката с икономиката е важен и значим въпрос, който заслужава необходимото внимание. Приложението на математическия апарат в икономиката позволява да се правят точни анализи на изследваните икономически проблеми и да се взимат оптимални управленски решения.

БЕЛЕЖКИ

1. В свое изследване Б. Атанасов предлага и разглежда пет периода на развитие на математиката: период на зараждане на математиката; период на елементарната математика; период на математиката на променливите величини; период на класическата математика; период на кибернетичната математика. [Атанасов, Б., Пл. Илиев. 2009: 22-31]
2. Математически модел на даден обект или явление се нарича неговата опростена, идеализирана схема, съставена с помощта на математически символи, операции и съотношения.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Atanasov, B., Pl. Iliev. (2009). Matematika i ikonomika. Godishnik na Ikonomicheski universitet-Varna, Varna: Nauka i ikonomika, Tom 81.
2. Milkova, T. (2015). Model za optimizirane na asortimentnata struktura na proizvezhdanata produktsiya. // Ikonomikata v promenyashtiya se svyat: natsionalni, regionalni i globalni izmereniya : Sb. dokl. ot mezhdunar. nauch. konf. : T. 2. - Varna : Univ. izd. Nauka i ikonomika.
3. Miryanov, R. (2017). Optimizirane na tovarnite prevozi v mikrologistichni sistemi . Ikonomika i kompyutarni nauki, Varna: Znanie i biznes , 3, 4.
4. Mihaylov, D. (2021). Simulatsionno modelirane na prodalzhitelnostta na proizvodstveni i upravlenski protsesi. Varna : Nauka i ikonomika.
5. Nikolaev, R. (2019). Nyakoi zavisimosti mezhdu tsena, razkhodi i pechalba. Izvestiya na Sayuza na uchenite - Varna. Ser. Ikonomicheski nauki, Varna: Sayuz na uchenite - Varna, 8, 2.
6. Nikolaev, R., Milkova, T. (2022). Dvuparametrichna zadacha za optimalno razpredelenie na resursi. Matematika i informatika : Nauchno spisanie = Mathematics and Informatics, Sofiya : Az Buki, 65, 1.
7. Petkov, Y. (2015). Edna modifikatsiya na model za optimalno upravlenie na zapasite pri sluchayno tarsene. // Ikonomikata v promenyashtiya se svyat: natsionalni, regionalni i globalni izmereniya : Sb. dokl. ot mezhdunar. nauch. konf. : T. 2. - Varna : Univ. izd. Nauka i ikonomika.
8. Slavov, Z. (2007). Mezhdu matematikata i ikonomikata. Sbornik „Matematika i informatika – realnost i perspektivi”, Univ. izd. na VSU „Ch. Hrabar”.

THE ROLE OF FUNDAMENTAL DISCIPLINES FOR THE QUALITY OF HIGHER EDUCATION

Chief Assist. Prof. Vanya Stoyanova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *This report examines different approaches in defining the quality of higher education in relation to the established roles, goals and functions of the educational system in the new conditions. The main differences between fundamental and applied disciplines are revealed and, on this basis, the role of fundamental disciplines in achieving the quality of higher education in accordance with its main goal is brought out.*

Keywords*: Quality of higher education; Fundamental disciplines; Applied disciplines.*

JEL code: *I 23*

РОЛЯТА НА ФУНДАМЕНТАЛНИТЕ ДИСЦИПЛИНИ ЗА КАЧЕСТВОТО НА ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ

Главен асистент, доктор Ваня Стоянова
Икономически университет – Варна, България

В последните години сме свидетели на все по-голямата роля, която се отрежда на образованието и образователните институции. И това е логично и обяснимо, защото нивото на образованието в страната е фактор за нейния икономически растеж и просперитет. Според Rifkin (2000) богатството вече не се налага във физическия капитал, а по-скоро в човешкото въображение и креативност. Това намира израз и в Индекса на човешкото развитие на ООН, който включва сред измерваните фактори и образованието чрез показателите очакван и среден брой години в образование. Същевременно, в контекста на непрекъснато променящите се икономически условия, пред образователните институции се поставят и нови изисквания. Световната декларация за висшето образование (1999) определя като основни мисии на системите за висше образование да образоват, да обучават, да предприемат изследвания и по-специално да допринасят за устойчивото развитие и подобряване на обществото като цяло чрез подготовката на висококвалифицирани висшисти и отговорни граждани. Това води и до завишаване на изискванията за качеството на висшето образование.

Разбирането за качеството на висшето образование не е еднозначно и може да се разглежда като една сложна система. От една страна, под качество се разбират вътрешни свойства и характеристики на образователния процес, осъществяван в съответната институция, които могат да бъдат измерени чрез количествени показатели. Измерването на качеството на висшето образование в този смисъл се осъществява чрез рейтинговата система, която е обект на многобройни дискусии и критики по отношение на включените измерители, някои от които са външни за системата на висшето образование като например величината на получавания среден осигурителен доход (Тодоров, 2020). От друга страна, акцентът се поставя на съответствието на административни и институционални (национални и европейски) регулации на организацията на процеса на предоставяне на образователната услуга. От трета страна, качеството на висшето образование се обвързва със съдържанието на учебни програми и структура на учебните планове. В Световната декларация за висшето образование (1999) се посочва: „Съществува осъзната необходимост от нова визия и парадигма на висшето образование, което трябва да бъде ориентирано към студентите. За да се постигне тази цел, учебните програми трябва да бъдат преработени, така че да надхвърлят простото когнитивно овладяване на дисциплини и да включват придобиването на умения, компетенции и способности за комуникация, креативен и критичен анализ, независимо мислене и работа в екип в мултикултурен аспект.“ И именно разглеждайки качеството на висшето образование от този аспект, който като че ли е най-слабо застъпен, изпъква ролята на фундаменталните дисциплини. Според Everett (2008) „много академици възприеха призива за фундаментално преориентиране на висшето образование около целта за образование за устойчиво развитие.“ Григоров (2003) дава формула на висшето образование „фундаментална култура, качество на интелекта, върхов професионализъм“ като под фундаментална култура той разбира култура на мисленето, която определя качеството на интелекта. В същото време в Стратегията за развитие на висшето образование в Република България за периода 2021 – 2030 година по отношение на промяна в ролята, целите и функциите на висшето образование може да се види следния текст: „Диференцирането на мисията, профила и териториалната значимост на висшето училище се разглежда като средство за приспособяване към нарастващите и все по-разнообразни изисквания на пазара на труда за висококвалифицирана работна сила. В някои случаи обаче се стига до утвърждаване на чисто инструментална роля на висшето образование и на подчиняването му изцяло на потребностите на пазара на труда. Това принизява ролята на висшето образование като научна и духовна институция, която същевременно има и значими общосоциални функции. Традиционният модел на висше образование, основан на аудиторни занятия, е изправен пред сериозната конкуренция на масовите отворени онлайн курсове (MOOCs), както и на образователните програми и практически ориентирани курсове, предлагани от различни платформи и организации.“ От една страна, се отчита опасността от елементаризиране на висшето образование при прекаленото му обвързване с изискванията на бизнеса, но от друга – различните курсове се възприемат като конкуренция на висшето образование, т.е негласно се приема, че висшето образование има приложен, а не фундаментален характер. Ако това е така как и по какво биха се различавали един от друг ,например, един счетоводител със завършена търговска гимназия и счетоводител, получил магистърска степен във висше училище? Според Тодоров (2020) „затвърждава се налаганата в последните години тенденция към опуцяване – превръщане в ПУЦ-ове – на българските висши училища. Не е ли изконната задача на университетите да работят за формиране на личности и граждани, които след натрупване на фундаментални знания и базови умения да придобиват определени професии, като се реализират в стопанската област, но не само в нея?“ Този проблем, обаче, не е само български. Tapper and Palfreyman (2000) много по-рано коментират тази система от проблеми и дори посочват факторите, отговорни за нея – т.нар. трите „М“ – маркетизация, масовизация и мениджъризация. Маркетизацията заменя ценностите знание и образование с умения и образование, съобразени с потребностите на пазара. Масовизацията заменя образованието за селектирани групи от обществото с образование за всички. Често се стига до там, че самите обучаващи се нямат нужната мотивация и желание да получат знания и съответната на тях образователна степен. Мениджъризацията (която в България все още не се проявява) заменя автономното управление на академичната общност с бюрокрация и управление на мениджъри.

Тази опасност произтича от липсата на ясно разграничаване между образование и обучение, нещо повече, много често двете думи се използват като синоними, въпреки че между тях има сериозни същностни различия. Ролята на един курс е да обучава и да създава приложни умения, докато ролята на висшето фундаментално образование е да образова – да дава знания за призхода и същността на основните процеси в съответната наука. Фундаменталното образование не дава толкова отговори, то по-скоро изяснява въпросите и формира възможност за откриване на правилни решения на базата на критично мислене и креативност. Приложните курсове налагат шаблонно мислене, тъй като обучението е схематично – стъпка по стъпка. Това, разбира се, е по-лесно усвоимо, но при ситуация, която не може да се впише в шаблона, получените умения не са достатъчни за разрешаване на казуса и вземане на правилно решение. Фундаменталното образование, респективно фундаменталните дисциплини, развиват мисловния процес и интелекта, защото те дават знания за логиката на процесите от съответната област. В тази връзка изпъква ролята на фундаменталните дисциплини за достигане на качество на образованието – те осигуряват развитие на интелекта, логическото и критичното мислене и по този начин способстват за достигане на по-високо ниво на професионализъм, т.е. осигуряват достигането на целите на висшето образование, залегнали в Световната декларация за висшето образование. Всичко това произтича и от различията, които съществуват между фундаментални и специални (приложни) дисциплини. Фундаменталните дисциплини са с по-широк обхват и се доближават в максимална степен до съответната наука. Специалните (приложните) дисциплини са с по-стеснен обхват и дават знания за методите. Например, „Въведение в статистиката“ е фундаментална дисциплина и дава знания за основните понятия, с които си служи статистиката, за нейните обект и предмет, за различните подходи при осъществяване на анализ, за условията, при които се прилагат различните методи, формира знания, които позволяват да се направи обоснован избор на подходящ метод. „Анализ на динамични редове“ е специална дисциплина, която се занимава със специфични методи и начините за тяхното приложение, но изучаването на тази специална (приложна) дисциплина е немислимо преди получаване на знания чрез фундаменталната дисциплина за същността на статистиката. Разделението на дисциплините на фундаментални и приложни е обосновано и продиктувано от необходимостта да се прилагат получените фундаментални знания, както и да се направи връзка между коренно различни науки. Това може да се илюстрира и по следния начин. Исторически най-рано са възникнали две науки – философия и математика. Едната изследва качествената страна на живота, а другата – количествената и между тях няма нищо общо. Като опит да се приближат двете науки се появяват нови като „Статистика“, „Икономическа теория“ и други, които са по-близо до математика или философия, но ползват инструментариума и на другата. Постепенно, стеснявайки обхвата на знанието, се появяват и приложните дисциплини, които се занимават основно с методите и тяхното приложение. Разбира се, трябва да се изтъкне и това, че не е необходимо да има противопоставяне между двата вида дисциплини, те трябва да съществуват в синхрон и взаимно да се допълват. Не е възможно да се получи фундаментално образование във всички области, поради необходимостта от по-продължителен период. Затова в различните направления на висшето образование се изучават различни фундаментални дисциплини. Григоров (2003) различава два вида фундаментална култура – универсална и професионална. Общото и за двата вида е, че усвоените чрез фундаменталните дисциплини знания се превръщат в начин на мислене.

Фундаменталното образование има и още едно предимство – то осигурява възможността за продължаващо обучение. В рамките на университетското образование, при съчетаването на фундаментални и приложни дисциплини, може да се достигне до ситуация, при която получените знания не са достатъчни при изучаването на определен обект, но подготовката, получена чрез фундаменталните дисциплини дава възможност да се търси, намира и ползва с разбиране допълнителна нова информация от съответната предметна област. Така образователният процес може да продължи чрез самообучение през целия живот, а това е и предпоставка както за професионално, така и за личностно развитие. Фундаменталното образование има за цел и обикновено води до създаване на потребност за саморазвитие и на тази основа се изграждат и професионализъм, и личностни качества, които позволяват на отделния човек да се адаптира, да живее пълноценно в нови условия, да бъде полезен за себе си като индивид и за обществото като цяло. Разбира се, образователният процес зависи както от обучаващия, така и от обучавания и би трябвало да се има предвид, че влиянието на участниците е равностойно.

Необходимо е да се разкрие и още една, не по-маловажна разлика между двата вида дисциплини. Фундаменталните дисциплини се променят много по-бавно от приложните, много често знанията, които те дават не остаряват в рамките на продължителността на човешкия живот. Приложните дисциплини са много по-зависими от измененията в съответната предметна област и това води до по-бързото остаряване на знанията, които те дават. Например фундаменталната дисциплина „Икономическа теория“ се развива чрез две основни направления – класицизъм, появил се през втората половина на XVIII век и кейнсианство, появило се в края на XIX век и утвърдено в началото на следващия век. Между двете теории има съществени различия и те илюстрират различни подходи за обяснение на икономическия механизъм. В края на XX век се наблюдава обръщане към класическите идеи под формата на неокласицизъм и въпреки че в рамките на това течение има различни икономически теории, в своята същност те споделят идеите на класицизма. А вече почти век не се е появила качествено нова икономическа теория, която да е в състояние да обясни функционирането на националните и световни икономики. В същото време макроикономическото моделиране като приложна дисциплина се развива постоянно и новопостроените модели се радват на пълната гама от емоции – „от осанна до разпни го“. Такива примери могат да бъдат дадени от почти всяка предметна област. Като потвърждение на казаното може да се посочи и мнението на Tunnerman and Chaui (2003): „Има значително намаляване на времето между появата на новото знание и неговото технологично приложение, което означава, че техническите му приложения могат да доведат до определяне на съдържанието на научните изследвания, с възможни последици върху традиционния „безкористен“ характер на основните изследвания. Съвременното познание притежава, наред с други характеристики, тези на ускорен растеж, по-голяма сложност и тенденция към бързо остаряване.“

В заключение може да се каже, че фундаменталните дисциплини изпълняват формулираните в редица нормативни документи цели и изисквания към висшето образование като по този начин допринасят за качеството на образователната система. Необходимо е да се конструират показатели за качество, които да отразяват съдържанието на образователния процес и да допълнят сега действащата система за оценка на качеството. Може би е време да бъдат припомнени традициите на българското висше образование и да се присъединим към призива на редица учени за фундаментализация на висшето образование. По този начин ще се гарантира човешкото развитие в България и ще се осигурят предпоставки за растеж. Понякога „новото“ е „добре забравено старо“, което се прилага в нови условия при спазване на нови изисквания. Безспорно, бъдещето на висшето образование е обвързано с пазара на труда и с работодателите, но образователната система може да отговори на техните изисквания без да губи своята идентичност и да принизява знанията, които предоставя на студентите и без да влиза в противоречие с основната цел на висшето образование.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Everett, J. (2008) Sustainability in higher education: Implications for the disciplines. Available at https://doi.org/10.1177/1477878508091115 /Accessed 31 August 2022/
2. Grigorov, A. (2003) Visheto obrazovanie I fundamentalnata kultura. Available at https://dialogue.uni-svishtov.bg/dialog_old/Discussion/Grigorov.htm /Accessed 28 August 2022/
3. Mayor, F. (1999) Higher education in the twenty-first century: vision and action, v.1: final report. Available at https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000116345 /Accessed 2 September 2022/
4. Rifkin, J. (2000) *The Age of Access*. Penguin Putnam Inc., New York
5. Tapper, T., D. Palfreyman (2000) *Oxford and the Decline of the Collegiate Tradition*. London: Woburn Press
6. Todorov, D. Za visheto obrazovanie. Available at https://kultura.bg/web/за-висшето-образование /Accessed 1 September 2022/
7. Tunnerman Bernheim, C., M.de Souza Chaui (2003) Challenges of the university in the knowledge society five years after the World Conference on Higher Education. Available at https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000134422 /Accessed 30 August 2022/

THE PLACE OF STATISTICS AND ECONOMETRICS IN THE ECONOMIC EDUCATION IN THE WORLD'S TOP UNIVERSITIES

Chief Assist. Prof. Slaveya Zhelyazkova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *The paper examines what place statistics and econometrics occupy in the curricula of future economists with bachelor degree in the top 10 universities according to the QS World University Rankings by Subject 2022 (Social Sciences & Management), compared to Bulgarian universities. It is found that students majoring in economics at these top universities must study at least one statistical course and one econometric course. The mandatory nature does not deprive them of the opportunity to choose the course most suitable for them from the many offered in the statistical and econometric block. Training in statistic and econometric courses is tied to the use of statistical and econometric software.*

Keywords*: Statistics, Econometrics, Curriculum*

JEL code: *C19*

МЯСТОТО НА СТАТИСТИКАТА И ИКОНОМЕТРИЯТА В ОБУЧЕНИЕТО НА ИКОНОМИСТИТЕ В ТОП УНИВЕРСИТЕТИ В СВЕТА

Гл. ас. д-р Славея Желязкова
Икономически университет - Варна, България

Въведение

Обучението по статистика в университетите, които подготвят икономисти, има вековна история. Това е така не само в световно известните университети, създадени преди столетия, но и в българските университети. Например във Висшето търговско училище – Варна, чийто правоприемник е Икономически университет – Варна, статистика се преподава от 1921 г., т.е. една година след основаването му. Голямото значение на знанията и уменията, които студентите получават при изучаването на статистически и иконометрични дисциплини се изтъква в справочниците на всички престижни университети. Например, в този на Харвардския университет се посочва, че „колкото по-засилено е обучението в тази област, толкова по-голям е обхватът и дълбочината на емпиричните изследвания, които могат да бъдат разбрани и реализирани“ (Concentrator Guide, 2022). Притеснителна е тенденцията, която се наблюдава през последните три десетилетия в България, за намаляване на броя на статистическите и иконометрични дисциплини в учебните планове на бъдещите икономисти и дори изключването им. Причините могат да се търсят в няколко посоки. Една от тях е олекотяване на учебните планове – намаляване на броя на дисциплините и заместване на тези, които се възприемат като сериозно препятствие пред студентите с други, които не изискват много усилия от тяхна страна. В някои случаи, за да се избегне директното отстраняване на дисциплините, те се превръщат от задължителни в избираеми като се слагат в блок, от който е малко вероятно да бъдат избрани. Друга причина, която прави статистическите и иконометрични дисциплини „излишни“ е абсолютизирането на ролята на статистическия и иконометричен софтуер, който според нестатистиците може да бъде използван за реализиране на необходимия анализ, въпреки непознаването на статистическите методи. Често статистиците са търсени за консултации, при които се съобщава, че анализът е направен, но трябва някой да разчете резултатите от софтуера. Въпросът, който всеки статистик би задал, е може ли да се реализира коректно статистическият анализ, без да се познават статистическите методи с необходимите предпоставки за приложението им и последващите диагностични тестове. Ламбова засяга някои „тревожни моменти, свързани с преподаването на статистически методи с помощта на статистически софтуер от специалисти в областта на предметните науки, в които статистическата методология намира приложение.“ (Lambova, 2020). Преподаването на статистика от нестатистици като част от икономически дисциплини е проблем, който се разглежда от Hotelling (1940) преди повече от 80 години, но въпреки това е актуален и днес.

Въпросът за мястото на статистиката и иконометрията в учебните планове на бъдещите икономисти става още по-актуален във връзка с преминаването в бъдеще към тригодишен срок на обучение, както е в повечето европейски университети.

Предвид горепосочените проблеми, настоящият доклад има за цел да се проучи какво място заемат статистическите и иконометричните дисциплини в учебните планове на бъдещите икономисти с бакалавърска степен в 10 топ университета според престижната рейтингова система QS World University Rankings by Subject 2022 (Social Sciences & Management), като същевременно да се направи паралел с три български висши учебни заведения с дългогодишен опит в обучението на икономисти.

Статистиката в учебните планове на бъдещите икономисти с бакалавърска степен

Харвардският университет е първи в рейтинговата система QS World University Rankings by Subject 2022 (Social Sciences & Management). В него обучението на бъдещите икономисти е четиригодишно, но за напреднали студенти се предлага и тригодишен срок. Предлаганите от департамент „Статистика“ статистически курсове са много на брой, но бъдещите икономисти трябва задължително да изберат един от четирите курса: Stat 100 (Въведение в статистиката и дейта сайънс), Stat 104 (Въведение в количествените методи за икономиката), Stat 109 (Въведение в статистическото моделиране) и Stat 110 (Теория на вероятностите) (Concentrator Guide, 2022). Те са на различно ниво и могат да бъдат избрани в зависимост от предварителната подготовка по статистика и математика от средното училище и желанието за получаване на по-задълбочени знания.

Курсовете Stat 100 и Stat 104 покриват по същество материала по въведение в статистиката. Stat 100 се препоръчва на студенти, които нямат афинитет към математиката и затова акцентът е върху разбирането и практическото приложение на статистическите методи с използването на подходящ софтуер (R), а не върху формулите и извеждането им. Stat 104 (Въведение в количествените методи за икономиката) е на по-високо ниво от Stat 100 и обхваща повече материал като освен темите, които стандартно се включват във въведение в статистиката, подробно се разглеждат многофакторния регресионен анализ с необходимите проверки на хипотези и проблемите с мултиколинеарността, хетероскедастичността, използването на фиктивни променливи, а така също - въведение в симулациите. Затова темпото е по-бързо и броят на студентите, които се обучават в курса е по-малък. Обучението по тази дисциплина също има практическа насоченост като основно примерите са от икономиката и за обобщаването и анализа на данните се използва статистически софтуер (Stata) (Concentrator Guide, 2022).

Както се посочва в студентския справочник на Харвардския университет, курсът Stat 110 обхваща теория на вероятностите, която осигурява математическата основа за статистиката и е предпоставка за задълбочаване на познанията по статистика с допълнителен курс Stat 111 (Въведение в статистическите заключения), макар и извън групата на задължителните. Обучението по Stat 111 включва използването на статистически софтуер (R). За избралите тези дисциплини студенти има изискване за завършен курс по математически анализ и линейна алгебра (Concentrator Guide, 2022).

Stat 109 (Въведение в статистическото моделиране) се разглежда като втори курс по статистически заключения и е надграждащ по отношение на въведение в статистиката. Тук след въведение с основни теми от теорията на статистическите заключения се преминава към статистическото моделиране като подробно се разглеждат многофакторните линейни регресионни модели с всички диагностични проверки и трансформации, както и приложението на регресионния анализ при времеви редове, а така също логистичната регресия. Курсът е изцяло базиран на използването на статистическия софтуер R (Concentrator Guide, 2022).

Препоръчва се задължителният курс по статистика да се премине още първата година, но не по-късно от зимния семестър на втори курс, защото за летния семестър е предвиден спецсеминарът (Ec 970), по време на който се очаква получените статистически знания и умения да намерят практическо приложение. Важността на тези знания се затвърждава с правилото курсовете по статистика да не могат да бъдат избрани за преминаване със зачот, при условие че до два зачота са разрешени за целия срок на обучение (Concentrator Guide, 2022).

Оксфордския университет е втори в рейтинговата система QS World University Rankings by Subject 2022 (Social Sciences & Management). Там бъдещите кономисти с бакалавърска степен се обучават едновременно по още една или две специалности при тригодишен срок на обучение. Налични са три такива хибридни специалности: 1)„Философия, политика и икономика“; 2)„Икономика и мениджмънт“ и 3) „История и икономика“. В доклада ще бъде разгледано обучението само по специалност „Икономика и мениджмънт“, защото при нея на първо място стои икономиката и освен това се съчетава с мениджмънта, който в България е специалност в икономическите висши учебни заведения. В тази хибридна специалност курсът по вероятности и статистика се изучава задължително в първи курс и е част от курса „Въведение в икономиката“, който включва освен това микроикономика и макроикономика. Във втори курс студентите могат да изберат курса „Количествени методи“, но той не е задължителен (Economics and Management | University of Oxford, 2022). Учебните програми по тези дисциплини не са достъпни онлайн. За разлика от обучението в България по две специалности, което покрива всички дисциплини от тези специалности, в Оксфордския университет студентите не се натоварват допълнително, но все пак се балансира броят на задължителните дисциплини от двете специалности. Така не се изучават толкова икономически дисциплини, колкото при самостоятелна специалност „Икономика“. Може да се счита, че вследствие на това дисциплината „Вероятности и статистика“ не е самостоятелна дисциплина, а също „Количествени методи“ е избираема дисциплина.

Лондонското училище по икономика е трето в рейтинговата система QS World University Rankings by Subject 2022 (Social Sciences & Management). Срокът за обучение на бъдещите икономисти с бакалавърска степен е тригодишен. Обучението по статистика започва още първия семестър със задължителната дисциплина ST109 „Елементарна статистическа теория“. Тя включва темите от описателната статистика, теория на вероятностите и теоретични разпределения с примери от областта на икономиката. Статистическата подготовка на студентите се задълбочава с изучаваните следващите три семестъра иконометрични дисциплини, които също имат задължителен характер (BSc in Economics, 2022).

Четвърти в разглежданата рейтингова система е Кеймбриджкия университет. Там за получаване на бакалавърска степен по икономика студентите се обучават три години като специфичното е, че изпитите по изучаваните дисциплини са в края на всяка година. Така дисциплина, която би следвало да се изучава един семестър, се обединява с друга такава. Обикновено принципът за обединение е взаимната свързаност или принадлежност към една и съща научна област или близки такива. Така математиката и статистиката са обединени в дисциплината „Количествени методи в икономиката“ (Part I Paper 3), която се изучава през първите два семестъра и има задължителен характер. Лекциите и упражненията по математиката и статистиката се провеждат паралелно двата семестъра от различен преподавателски екип. Изпитът е един, но в две части, като е задължително студентите да отговарят на въпроси и от двете части. В курса по статистика се изучава описателната статистика, теория на вероятностите и теоретични разпределения, статистическо оценяване и проверка на хипотези, регресионен анализ с всички диагностични проверки и специфични проблеми (Course Structure | Faculty of Economics, 2022).

В Станфордския университет, който е пети в посочената по-горе рейтингова система, обучението в бакалавърската степен е четиригодишно с три семестъра на година. Препоръчва се в рамките на един семестър студентите да посещават един или два курса. Тези, за които икономиката е първа и основна специалност, като част от фундаменталната си подготовка задължително изучават дисциплината „Въведение в статистическите методи“ (Econ 102A), която е със стандартно съдържание и практическа насоченост (Major | Department of Economics, 2022).

Масачузетският технологичен институт е шести в рейтинговата система QS World University Rankings by Subject 2022 (Social Sciences & Management). Там се предвижда студентите икономисти да получат бакалавърска степен след успешно приключване на четиригодишен срок на обучение (два семестъра на година – есенен и пролетен). Дисциплината „Въведение в статистическите методи в икономиката“ (код 14.30) е задължителна и трябва изпитът по нея да бъде взет с оценка не по-ниска то С. Препоръчва се да се изучава във втори курс (есенен семестър). Темите, които се включват са типични за курсовете по въведение в статистиката. Не се посочва използване на статистически софтуер при обучението. Студентите, които са предварително запознати с теория на вероятностите и искат да навлязат в дълбочина в теоретичните основи на статистическите методи, могат да заменят тази дисциплина със „Статистика за приложения“ (код 18.650). Изучаваните теми са: статистическо оценяване, метод на максималното правдоподобие, метод на моментите, статистическа проверка на хипотези, регресионен анализ, Бейсова статистика, анализ на основните компоненти и генерализирани линейни модели. Този курс е силно математизиран и не предполага използване на статистически софтуер (MIT Economics : Undergraduate Program, 2022).

Националният университет на Сингапур е седми в разглежданата рейтингова система. Там обучението на бъдещите икономисти е четиригодишно, с два семестъра на година. Обучението по статистика започва с дисциплината „Основи за иконометрията“ (EC2303 Foundations for Econometrics), която подготвя студентите с необходимите знания за следващите иконометрични дисциплини и по своето съдържание отговаря на стандартен курс по въведение в статистиката. Този курс, макар и задължителен, може да бъде заменен с друг от групата на равнище 2000, ако преди това е изучавана дисциплината „Въведение в статистиката и статистическите изчисления“ (ST1131 Introduction to Statistics and Statistical Computing). Това се отнася за студенти, които се обучават едновременно и по друга специалност или са се прехвърлили (NUSMods, 2022).

Калифорнийският университет – Бъркли е осми в рейтинговата система QS World University Rankings by Subject 2022 (Social Sciences & Management). В учебните планове на бъдещите икономисти с бакалавърска степен задължително се включва курс по въведение в статистиката, като студентите трябва да изберат един от предложените седем курса: STAT 20 (Въведение в теория на вероятностите и статистиката), STAT 21 (Въведение в теория на вероятностите и статистиката за бизнеса), STAT W21 (Въведение в теория на вероятностите и статистиката за бизнеса - онлайн курс), STAT C88S (Теория на вероятностите и математическа статистика за Data Science), STAT C131A (Статистически методи за Data Science), STAT 135 (Концепции на статистиката), STAT C140 (Теория на вероятностите за Data Science). Последните четири курса са от специалността „Data Science“ и включването им в списъка позволява признаване на взетите изпити, макар и да не отговарят по съдържание на курс по въведение в статистиката. От първите три курса само при STAT 20 се използва статистически софтуер (R) (Major Requirements, 2022).

Девети в разглежданата рейтингова система е Йейлският университет. Там бъдещите икономисти задължително изучават един курс по анализ на данни и иконометрия, който могат да изберат измежду: Econ 117 (Въведение в анализа на данни и иконометрията), Econ 123 (Анализ на данни и иконометрия за средно напреднали) и Econ 136 (Иконометрия), но Департаментът по икономика силно препоръчва да се изберат два от тях. Първите два курса съчетават теми от статистиката с иконометрията и Data Science и предполагат използване на софтуерният пакет R. За студентите с афинитет към математиката, които задължително са преминали курс по линейна алгебра и курс по математически анализ, се препоръчва да изберат Econ 136, който курс трябва задължително да се предшества от Econ 135 (Въведение в теория на вероятностите и статистиката) или Stat 241 (Теория на вероятностите), заедно със Stat 242 (Теория на статистиката). Университетът не предоставя свободен достъп до учебните програми (Economics < Yale University, 2022).

Университетът „Бокони“ (Bocconi University, Università Commerciale Luigi Bocconi) е на десето място в рейтинговата система QS World University Rankings by Subject 2022 (Social Sciences & Management). Там обучаващите се в специалността „Икономика и социални науки“ (BESS) получават бакалавърска степен по икономика след тригодишен срок на обучение. Освен тази специалност, в Университета са налични още няколко специалности, в които се съчетава икономиката с финансите, мениджмънта и компютърни науки: „Международна икономика и мениджмънт“, „Международна икономика и финанси“, „Икономика и мениджмънт за изкуствата, културата и комуникациите“ и „Икономика, мениджмънт и компютърни науки“. Във всички тези специалности статистиката се изучава като задължителна дисциплина. В специалността „Икономика и социални науки“ се предвижда статистиката да се изучава два семестъра, като за това са предвидени два модула, обособени в самостоятелни дисциплини: „30456 Статистика – модул 1 (теория и методи)“ и „30457 - Статистика – модул 2 (приложна статистика)“. Първият модул включва описателната статистика, вероятности, теоретични разпределения и извадкови разпределения. Темите, които се разглеждат във втория модул са: статистическо оценяване, проверка на статистически хипотези, метод на максималното правдоподобие и приложението му при статистическите заключения, корелационен анализ и линейна регресия, логистична регресия и Поасонова регресия. Обучението и в двата модула има практическа насоченост – анализират се реални данни и за приложение на някои от методите се прилага статистическия софтуер R. Статистиката се изучава два семестъра и в специалността „Икономика и компютърни науки“, а в останалите три специалности – един семестър, при което се разглеждат темите от стандартен курс по въведение в статистиката и се използва статистическия софтуер R (Bachelor of Science Programs - Bocconi University Milan, 2022).

В трите разглеждани български университета, обучаващи икономисти[1] - Икономически университет – Варна, УНСС и Стопанска академия "Димитър А. Ценов" статистиката се изучава като задължителна дисциплина, съответно с наименованието „Въведение в статистиката“, „Статистика“ и „Основи на статистиката“. Голяма част от вторите надграждащи статистически дисциплини, които се изучаваха от всички икономически специалности са отпаднали отдавна във времето. В ИУ – Варна се изучават дисциплините „Бизнес статистика“ (спец. „Бизнес икономика“) и „Социална статистика“ или „Демографска статистика“ (спец. „Социална сигурност и застраховане“). В УНСС дисциплините „О4079 Бизнес статистика“ и „О4070 Макроикономическа статистика“ са избираеми в блок с още седем дисциплини съответно за специалност „Икономика“ и „Макроикономика“ (УНСС :: Направления и специалности, 2022). В СА "Д. Ценов" „Аграрна статистика“ е втора задължителна статистическа дисциплина за студентите от специалност „Аграрна икономика“. Дисциплините „Регионална статистика“, „Статистически методи в управлението“ и „Финансова статистика“ са избираеми съответно за специалност „Публична администрация“, "Стопанско управление" и „Финанси“. В четвърти и шести семестър в списъка на дисциплините от „Факултативен блок I“, от които студентите могат да изберат една на семестър се включват следните статистически дисциплини: „Аграрна статистика“, „Статистика на Европейския съюз“, „Статистически анализ на бизнес средата“, „Статистически и иконометричен софтуер“, „Статистически информационни системи“ и „Статистически методи в управлението“. В пети и седми семестър дисциплината „Многомерни статистически методи” се включва във „Факултативен блок II“. „SPSS и R за бизнес аналитика“ е факултативна дисциплина само за студентите от специалност „Маркетинг“ (Свищов, 2022).

Иконометрията в учебните планове на бъдещите икономисти с бакалавърска степен

В Харвардския университет студентите освен базисния статистически курс, трябва да изберат задължително и един от два предложени курса по иконометрия Ec1123 или 1126. Курсът „Въведение в иконометрията“ (Ec 1123) е по-приложен и по-малко математизиран в сравнение с Ec 1126. Той запознава студентите с основни иконометрични техники и ги обучава как да ги прилагат с използване на софтуерния пакет Stata. Разглеждат се теми, които стандартно се включват в курсовете по въведение в иконометрията: множествена регресия, нелинейни модели, logit, probit, и Tobit модели, регресионни модели с времеви редове и панелни данни, работа с големи масиви от данни, динамични каузални ефекти и прогнозиране. Вторият предложен иконометричен курс Ec 1126 (Количествени методи в икономиката) е по-силно математизиран в сравнение с Ec 1123 и предоставя строго теоретично въведение в иконометричната методология. При него се навлиза в дълбочина в проблематиката на статистическите заключения и затова се изисква добро познаване на теорията на вероятностите, математическия анализ и линейната алгебра. Разглеждат се различните методи за оценка на моделите, нелинейни модели и възможности за апроксимирането им с линейни, проблемът с пропуснатите променливи в моделите и извеждане не формула за тях, особености на приложение на моделите при панелни данни, проблемите с конструиране на тестове и доверителни интервали за параметрите на оценяваните модели, тестове за наличието на каузална връзка и на (квази)експерименталните методи за оценка на каузални ефекти. При обучението се използват софтуерните пакет Stata и Matlab и се изисква от студентите като курсова работа да възпроизведат самостоятелно емпиричния анализ в някоя от предоставените им статии като това включва: самостоятелно набавяне на необходимите данни, написване на програмата на Stata, представяне и интерпретация на резултатите. Студентите, които проявяват интерес в областта на иконометрията, могат да изберат освен един от задължителните курсове и допълнителни от множеството предлагани от департамент „Статистика“ курсове по иконометрия на по-високо ниво (Concentrator Guide, 2022).

В Оксфордския университет в специалността „Икономика и мениджмънт“, дисциплината „Иконометрия“ е избираема в трети курс като има изискване преди това във втори курс да е избрана дисциплината „Количествени методи“ (Economics and Management | University of Oxford, 2022).

В Лондонското училище по икономика бъдещите икономисти започват да изучават иконометрия (EC1C1) през втория семестър, след като през първия семестър са преминали задължително курса по статистика. Тази първа иконометрична дисциплина въвежда студентите в статистическото оценяване, проверката на хипотези и регресионния анализ. Тя има приложен характер и предполага анализ на реални данни за икономиката с използване на статистически софтуер и придобиване на основни умения за програмиране. Обучението по иконометрия продължава през следващите два семестъра на втори курс с дисциплината „Иконометрия II“ (EC2C1). През зимния семестър на втори курс студентите разширяват своите знания с иконометричните модели на основата на статични редове, а през летния – прилагат иконометричното моделиране при времеви редове и панелни данни. Придобитите знания и умения намират израз в разработване на курсова работа (BSc in Economics, 2022).

В Кеймбриджкия университет обучението по иконометрия започва със задължителната дисциплина „Теория и практика на иконометрията I“ (Part IIA Paper 3), която се изучава в трети и четвърти семестър (втори курс). Тя стартира със задълбочаване на знанията за статистическите оценки, статистическите тестове и извадковите разпределения и продължава с детайлно разглеждане на многофакторните регресионни модели с всички диагностични тестове, системите едновременни уравнения и свързаните с тях концепции за ендогенни и инструментални променливи, панелни модели, логистична регресия, анализ на времеви редове и свързаната с тях тестове за нестационарност. На лекциите и упражненията студентите се обучават да прилагат разглежданите методи с използване на софтуерния пакет Stata, включително и да програмират в него. Тези знания се очаква да бъдат приложени в задължителната курсова работа. Във втори курс като избираема дисциплина се предлага на студентите „Математика и статистика за икономисти“ (Part IIA Paper 6). Както вече беше посочено, всички изпити са в края на годината и затова дисциплина, която би следвало да се изучава един семестър, се обединява с друга такава. В случая, през зимния семестър се изучава математика за икономисти, а през летния - иконометрия, като курсът по иконометрия е силно математизиран и предполага програмиране с R и Matlab. Бъдещите икономисти могат да разширят знанията си по иконометрия в трети курс с избираемата дисциплина „Теория и практика на иконометрията II“ (Part IIB Paper 10). През зимния семестър по тази дисциплина се изучават методи за анализ на динамични редове и иконометрични модели за динамични редове, вкл. VAR модели, VEC модели, тестове за каузалност по Granger, тестове за коинтегрираност, системи едновременни уравнения, а през летния – приложение на метода на максималното правдоподобие и генерализирания метод на моментите за оценяване на моделите, модели с дискретни зависими променливи, модели на база панелни данни (модели с фиксирани и случайни ефекти, динамични панелни модели). Тази дисциплина има изцяло практическа насоченост като теоретичните постановки се илюстрират с примери от конкретни публикувани икономически изследвания (Course Structure | Faculty of Economics, 2022).

В Станфордския университет бъдещите икономисти, като част от фундамента, изучават задължително дисциплината „Приложна иконометрия“ (Econ 102B). В нея се започва с разширяване на знанията по темите за статистическо оценяване и проверка на статистически хипотези и след това се разглежда регресионния анализ с всички необходими тестове, проблемът с пропуснатите променливи, мултиколинеарност, системи едновременни уравнения и използването на инструментални променливи. След фундамента в зависимост от желаната област за специализация, студентите могат да изберат пет дисциплини. В списъка на изборните специални дисциплини присъстват две иконометрични: „Теми за напреднали в иконометрията“ (102C) и „Иконометрични методи за анализ на публичната политика и вземане на бизнес решения“ (102D). Темите, които се разглеждат по първата дисциплина са от панелната иконометрия, probit, logit и Tobit модели, Bootstrap и оценяване чрез симулации. Представят се примери за практическото приложение на изучаваните методи в областта на икономиката на труда и публичните финанси. По втората изборна дисциплина освен класическите иконометрични методи се изучават методи за проектиране на рандомизирани контролирани проучвания и анализ на получените данни, съвременни техники за машинно обучение и симулации. При преподаването се използва езика за програмиране R (Courses | Department of Economics, 2022).

В Масачузетския технологичен институт дисциплината „Иконометрична наука за данните“ (14.32 Econometric Data Science) е задължителна и заменя „Иконометрия“ (код 14.32) в учебния план на бъдещите икономисти с бакалавърска степен. В нея освен темите, които се включват стандартно в курсовете по въведение в иконометрията, се разглеждат още панелни модели, модели на разликата в разликите (differences-in-differences (DD) model), регресия с дизайн на прекъсване (regression discontinuity design (RDD)) и др. Емпиричният анализ се реализира със софтуерният пакет Stata. За да бъде признат този изпит за получаване на бакалавърска степен по икономика, той трябва да е взет с оценка не по-ниска то C. Препоръчва се това да бъде във втори курс през пролетния семестър. Студентите, които искат да разширят знанията си по иконометрия, могат да изберат „Иконометрия за напреднали“ (код 14.36) като една от избираемите дисциплини. Темите, които се разглеждат включват: нелинейна регресия, непараметрична регресия, логистична регресия, probit и Tobit модели, полупараметрична регресия, панелни модели, регресионен анализ с дискретна зависима променлива, модели на избора (choice models), модели на продължителността (duration models), инструментални променливи и др. (MIT Economics: Undergraduate Program, 2022).

В Националния университет на Сингапур обучението по иконометрия започва със задължителната дисциплина „Иконометрия I“ (код EC3303). Разглежда се подробно регресионния анализ с предпоставките за приложение на метода на най-малките квадрати, проблемите, възникващи при нарушаването им и мерки, които трябва да се предприемат. Набляга се на практическото приложение на методите и интерпретация на резултатите, получени при използване на статистически софтуер (Eviews или Stata). Студентите, които проявяват интерес, могат да продължат с „Иконометрия II“ (код EC3304), в която се разглеждат модели с разпределени лагове, панелни модели, probit, logit и Tobit модели с използване на статистическия софтуер Stata. Самият софтуер Stata се изучава в отделна изборна дисциплина „Инструменти за програмиране за икономиката“ (EC3305 Programming Tools for Economics). На последния етап от обучението си студентите трябва да изберат дисциплини от ниво 4000 или по-високо, които сумарно дават поне 20 кредита (обикновено тези дисциплини носят по 4 или 5 кредита всяка). В списъка на тези избираеми дисциплини присъстват: „Иконометрия III“ (код EC4303), „Икономическо и финансово прогнозиране“ (код EC4304) и „Приложна иконометрия“ (код EC4305) (NUSMods, 2022).

В Калифорнийския университет – Бъркли бъдещите икономисти като част от фундамента изучават задължително една иконометрична дисциплина, която трябва да бъде избрана от двете предложени: ECON 140 (Иконометрия) и ECON 141 (Иконометрия – силно математизирана). Темите, разглеждани в двата курса са едни и същи и включват: линейна регресия с всички предпоставки за приложение на метода на най-малките квадрати, инструментални променливи, панелни модели и модели на времеви редове. Разликата е в начина на преподаването им. Курсът ECON 141 е по-теоретичен и математизиран. При обучението се използва софтуерният продукт Stata. Студентите могат да продължат изучаването на иконометрията с предложените три иконометрични дисциплини: ECON C142 (Приложна иконометрия и публична политика), ECON 143 (Иконометрия: методи за напреднали и приложения) и ECON 144 (Финансова иконометрия). Те са включени в списъка на избираемите дисциплини, от които бъдещите икономисти трябва да изберат пет (Major Requirements, 2022).

В Йейлския университет студентите задължително изучават една иконометрична дисциплина, която по техен избор може да бъде самостоятелна Econ 136 (Иконометрия) или да включва теми от статистиката и Data Science - Econ 117 (Въведение в анализа на данни и иконометрията) и Econ 123 (Анализ на данни и иконометрия за средно напреднали). За студентите, които през последната година от обучението си ще разработват курсова работа в спецсеминара (Econ 491 и Econ 492 The Senior Essay), е задължително да изберат два курса по иконометрия, като единият от тях задължително трябва да включва анализ на данни. Студентите, които проявяват интерес в областта на иконометрията, след като са преминали двата иконометрични курса или курс по статистика и курс по иконометрия, могат да изберат и някои от надграждащите курсове: Econ 491 (Финансова иконометрия за времеви редове), Econ 438 (Приложна иконометрия: политика, спорт, макроикономика) и Econ 439 (Приложна иконометрия: прогнозиране в макроикономиката и финансите). Те са включени в списъка на избираемите курсове, от които студентите задължително трябва да изберат два (Economics < Yale University, 2022).

В университета „Бокони“ бъдещите икономисти задължително изучават една иконометрична дисциплина: „30462 – Иконометрия“ (за спец. „Икономика и социални науки“ и „Икономика, мениджмънт и компютърни науки“) или „30284 – Емпирични методи за икономиката (Въведение в иконометрията)“ (за спец. „Международна икономика и финанси“ и „Международна икономика и мениджмънт“). Темите, които се изучават, включват: линейна регресия със съответните диагностични тестове, генерализиран метод на най-малките квадрати, инструментални променливи, logit, probit, и Tobit модели, панелна регресия. Изучаваните методи се прилагат с помощта на EViews, Stata, Matlab или R. Освен задължителната иконометрия, студентите могат да изберат още две иконометрични дисциплини („30188 – Въведение във финансовата иконометрия“ и „30166 – Иконометрия за времеви редове“), които са включени в списъка на избираемите дисциплини в трети курс. При изучаването на първата се предвижда програмиране на Python, а при втората - основно се използва Eviews (Bachelor of Science Programs - Bocconi University Milan, 2022).

Обучението по иконометрия в трите разглеждани висши учебни заведения[1] в България е слабо застъпено. В ИУ - Варна единствената иконометрична дисциплина е „Финансова иконометрия“, която по настоящем е задължителна за специалност „Финанси“, но в новия учебен план вече е избираема дисциплина. В УНСС „O2034 Иконометрия“ е избираема дисциплина във втори курс, четвърти семестър, като е включена в един блок с дисциплините: „O2035 Недвижима собственост“, „O2036 Финансов контрол“ и „F2037 Физкултура и спорт - 2 курс“ (УНСС :: Направления и специалности, 2022). В СА "Д. Ценов" като се изключи специалност „Бизнес статистика и анализи“, останалите икономически специалности не изучават иконометрия (Свищов, 2022).

Заключение

От направения преглед на учебните планове и достъпните онлайн учебни програми по включените в учебните планове статистически и иконометрични дисциплини в десетте разглеждани топ университета и трите български университета, обучаващи икономисти, могат да бъдат направени следните изводи:

1. В разглежданите топ университети статистиката се изучава като задължителна дисциплина, като в голяма част от тях на студентите се предоставя възможност за избор на дисциплина, която съответства на тяхната предварителна подготовка и желанието им за посещаване на по-теоретичен и математизиран курс или курс с предимно практическа насоченост. В българските университети студентите нямат право на такъв избор и единствените разлики в обучението им произтичат от преподавателския екип.
2. В част от топ университетите статистиката се изучава два семестъра, а в други на студентите силно се препоръчва да запишат втори статистически курс.
3. Обединяването на статистиката с други дисциплини има формален характер и е свързано най-вече със специфичната организация на учебния процес, например изпити само в края на годината. Това обединяване не води до намаляване на хорариума.
4. В разглежданите топ университети иконометрията се изучава като задължителна дисциплина, като след нея студентите, които проявяват интерес имат възможност да изберат една или повече от множеството надграждащи иконометрични дисциплини. За разлика от тях, в българските университети, иконометрията не се изучава или е включена в блок на избираеми дисциплини, от който вероятността да бъде избрана е много малка.
5. При обучението по почти всички статистически и иконометрични дисциплини в разглежданите топ университети се използва статистически и иконометричен софтуер, като в голяма част от случаите се изисква програмиране

с цел реализация на изучаваните методи. Само в един от университетите се преподава статистически и иконометричен софтуер в отделна дисциплина.

БЕЛЕЖКИ

1. От разглеждането се изключват специалностите „Бизнес статистика и анализи“ в СА "Д. Ценов" и „Статистика и иконометрия“, „Анализ на бизнес данни със специализиран софтуер“ и „Бизнес информатика и комуникации“ в УНСС.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Catalog.yale.edu. 2022. Economics < Yale University. [online] Available at: <http://catalog.yale.edu/ycps/subjects-of-instruction/economics/> [Accessed 20 August 2022].
2. Department of Economics. 2022. Major Requirements. [online] Available at: <https://www.econ.berkeley.edu/undergrad/current/major-requirements> [Accessed 20 August 2022].
3. Econ.cam.ac.uk. 2022. Course Structure | Faculty of Economics. [online] Available at: <https://www.econ.cam.ac.uk/apply/ba-economics/course-structure> [Accessed 20 August 2022].
4. Economics.harvard.edu. 2022. Concentrator Guide. [online] Available at: <https://economics.harvard.edu/concentrator-guide> [Accessed 20 August 2022].
5. Economics.mit.edu. 2022. MIT Economics: Undergraduate Program. [online] Available at: <https://economics.mit.edu/under/majors/14-1> [Accessed 20 August 2022].
6. Economics.stanford.edu. 2022. Courses | Department of Economics. [online] Available at: <https://economics.stanford.edu/courses> [Accessed 20 August 2022].
7. Economics.stanford.edu. 2022. Major | Department of Economics. [online] Available at: <https://economics.stanford.edu/major> [Accessed 20 August 2022].
8. Hotelling, H. (1940). The Teaching of Statistics. The Annals of Mathematical Statistics, 11(4), pp. 457-470.
9. Lambova, M. (2020). Digitalizatsiyata - blagodat ili proklyatie za statisticheskoto obrazovanie. Ikonomicheska nauka, obrazovanie i realna ikonomika: Razvitie i vzaimodeystvia v digitalnata epoha: Yubileyna mezhdunarodna nauchna konferentsia, Varna: Nauka i ikonomika, 4, 378 - 386.
10. Lse.ac.uk. 2022. BSc in Economics. [online] Available at: <https://www.lse.ac.uk/resources/calendar2021-2022/programmeRegulations/undergraduate/2021/BScEconomics.htm> [Accessed 20 August 2022].
11. Nusmods.com. 2022. NUSMods. [online] Available at: <https://nusmods.com/modules/> [Accessed 20 August 2022].
12. Ox.ac.uk. 2022. Economics and Management | University of Oxford. [online] Available at: <https://www.ox.ac.uk/admissions/undergraduate/courses/course-listing/economics-and-management> [Accessed 20 August 2022].

13. Svishtov, S., 2022. — SA "D. A. Tsenov". [online] Stopanska akademia "Dimitar A. Tsenov" - Svishtov. Available at: <https://www.uni-svishtov.bg/bg/education/bachelor/bachelor-documentation> [Accessed 20 August 2022].
14. Unibocconi.eu. 2022. Bachelor of Science Programs - Bocconi University Milan. [online] Available at: <https://www.unibocconi.eu/wps/wcm/connect/bocconi/sitopubblico_en/navigation+tree/home/programs/bachelor+of+science/> [Accessed 20 August 2022].
15. Unwe.bg. 2022. UNSS :: Napravlenia i spetsialnosti. [online] Available at: <https://bit.ly/UNWE-napravlenia-i-spetsialnosti> [Accessed 20 August 2022].

MS EXCEL AS A TOOL FOR TEACHING HYPOTHESIS TESTING IN STATISTICS

Chief Assist. Prof. Svetlana Todorova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Chief Assist. Prof. Dimitria Karadimova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *Today teaching statistics is based on the manipulation of large amounts of data from the Internet, company sources, public sources, and others. Students must learn how to extract useful information from a big data set and to make a decision. In Statistics, a hypothesis test is used to test some assumptions about an unknown population parameter based on sample data. There are many different types of hypothesis test depending on the type of data you are working with and the goal of your analysis. The aim of this paper is to illustrate how to use Excel's Analysis ToolPak for hypothesis testing. MS Excel is widespread, user-friendly, easy to learn, and powerful. Therefore, this paper present how free Analysis ToolPak add-in works and what it can do. In one hand Analysis ToolPak is powerful, but in the other hand it has some weaknesses that we should be aware of.*

Keywords*: MS Excel; Data Analysis ToolPak; Hypothesis test: t-test; statistical significance; Effect size*

JEL code: *C12, C88*

MS EXCEL КАТО ПОМОЩНО СРЕДСТВО ПРИ ПРЕПОДАВАНЕТО НА СТАТИСТИЧЕСКИ ХИПОТЕЗИ

Гл. ас. д-р Светлана Тодорова
Икономически университет - Варна, България

Гл. ас. д-р Димитрия Карадимова
Икономически университет - Варна, България

Въведение

Съвременните програми по статистика включват изследвания, основани на големи масиви от данни от Интернет, фирмени източници, публични източници, статистически справочници и др. Статистическият анализ на данни и в частност проверката на статистически хипотези, включват много на брой наблюдения и изисква от студентите не само задълбочени знания за статистическите методи, но и познаване на статистически софтуер за осъществяване на обработката им. В широк смисъл статистически е всеки софтуер, който е в състояние да обработва статистическа информация и притежава възможности за изчисляване на обобщаващи характеристики. В тесен смисъл статистически е всеки софтуер, който притежава възможности за изчисляване на обобщаващи характеристики от основните дялове на теоретичната статистика – анализ на емпирични разпределения, статистически заключения, анализ на корелационни зависимости и др. (Хаджиев, 2009, с. 9-10).

MS Excel е широко използван софтуер за статистически анализ на данни, представени във вид на електронни таблици и намира приложение при обработка на големи масиви от данни. Той предоставя възможности за графично изобразяване на данните и дава възможност за реализиране както на основни статистически функции, така и на комплексен статистически анализ с модула Data Analysis. MS Excel е добър избор, защото той е леснодостъпен, спестява време, осигурява лесен обмен на данни с други приложения, визуализира много добре графично и таблично крайните резултати и др.

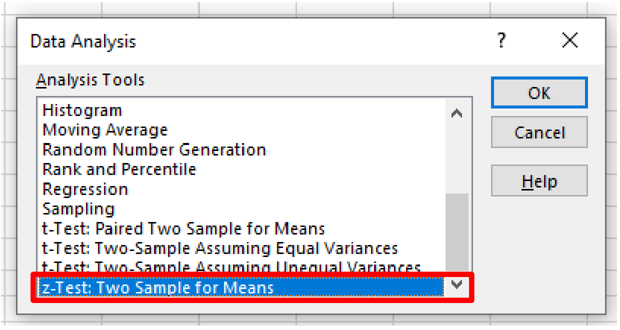
Всяка следваща версия на MS Excel добавя нови възможности за графично представяне и интерпретация на данни като Box & Whisker, Histogram, Scatter (X, Y), Trendline и др. В MS Excel съществуват две възможности за приложение на статистически методи: основни статистически функции и модула Data Analysis. Функциите, които също се обновяват периодично в новите версии на продукта са достъпна от раздел Formulas, група Statistical Functions (Сълов и др., 2019, с. 137-140). Обработката на данните по този начин се извършва чрез вградени функции, които участват във формули за определяне на съдържанието на дадена клетка. Модулът Data Analysis съдържа 19 инструмента за различни статистически анализи и тестове, които позволяват извършването на един по-комплексен статистически анализ. Функционалността и потребителският интерфейс на Analysis ToolPak обаче, са същите от десетилетия. Любопитно е, че предвид все по-голямото внимание на Microsoft към анализа на данни и съсредоточаването му върху подобряване на функциите и добавянето на нови диаграми за анализ на данни, защо запазва Analysis ToolPak такъв, какъвто е.

Целта на този доклад е, въпреки някои от слабите страни на Analysis ToolPak, да се илюстрира лекотата и достъпността на Analysis ToolPak за проверка на статистически хипотези.

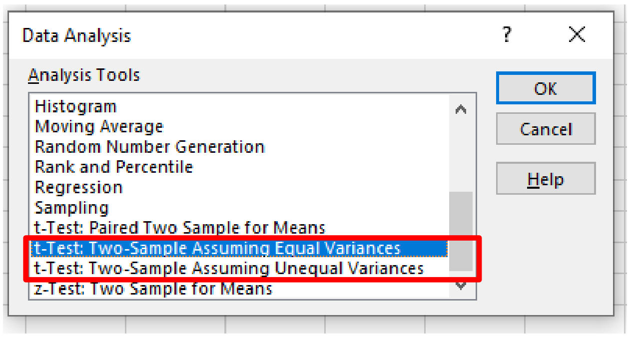
В настоящия доклад се ограничаваме само до описание на възможностите на специализирания модул Data Analysis в MS Excel за проверка на статистически хипотези. Той допълва наличната функционалност на електронната таблица, като добавя мощни възможности за извършване на статистически анализ (Славева и др., 2016, с. 522-523). Обръща се специално внимание на предимствата и недостатъците на основните тестове за проверка на статистически хипотези за разлика между средни от две генерални съвкупности при независими и при взаимнозависими извадки и илюстрирането им с подходящи примери. Преди да се започне с използването на Analysis ToolPak, той обаче, трябва да бъде зареден, чрез Add-ins.

1. Проверка на статистически хипотези за разлика между средни от две генерални съвкупности при независими извадки

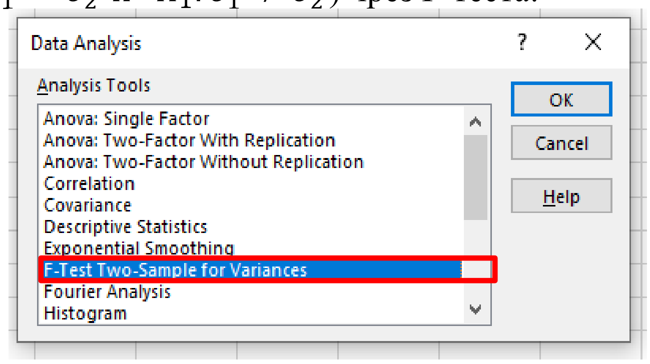
Статистическата проверка на хипотези за разликата между две средни се прилага, за да се определи дали средната разлика между двете генерални съвкупности (групи) е наистина значима или се дължи на случайни фактори. Например приложението на тази статистическа хипотеза може да определи дали средната успеваемост на студентите е различна, по-висока или по-ниска при приложението на два различни метода на преподаване. Първата стъпка е определяне на нулевата и алтернативната хипотези. Нулевата хипотеза е хипотеза за нулев ефект, а алтернативната показва, че тази разлика е различна, по-голяма или по-малка от дадена стойност като това се указва от знака в алтернативната хипотеза ($\neq$; $>$; $<$). При проверката за разликата между две средни се разглеждат два сценария. Първо ако дисперсиите на двете генерални съвкупности, от които са извлечени извадките, са известни се използва Нормалното разпределение или z-тест при статистическите заключения:



Трябва да се отбележи, че въпреки че този тест се използва твърде рядко и почти липсва в повечето статистически софтуери като STATISTIKA или SPSS, тъй като почти винаги липсва информация за σ_1^2 и σ_2^2, присъствието му в Excel е подходящо за целите на обучението. Второ ако дисперсиите на двете генерални съвкупности, от които са извлечени извадките са неизвестни, се използва t-разпределението на Студент или t-тест при статистическите заключения, но съществуват два случая: дисперсиите могат да се приемат за еднакви или се предполага, че са различни:



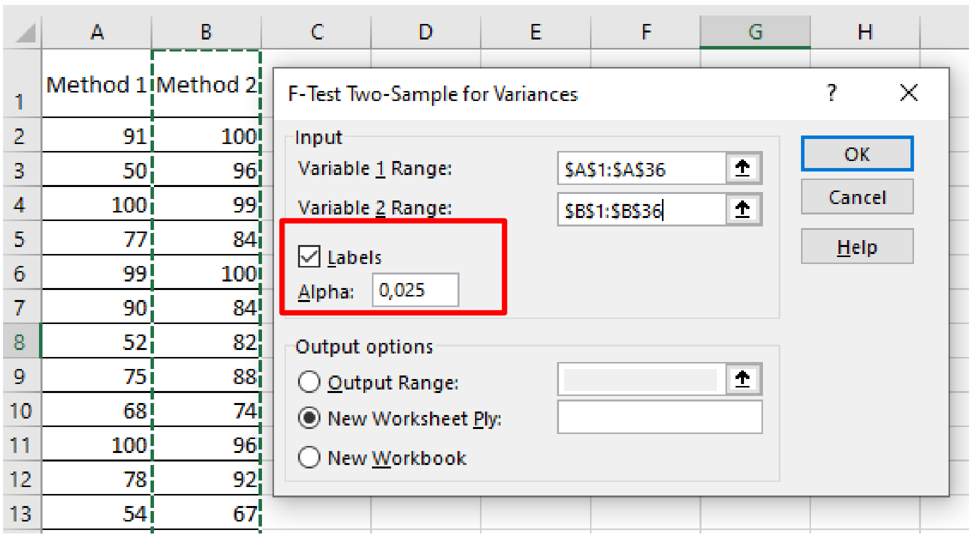
В общия случай при липса на информация за σ_1^2 и σ_2^2 трудно може да се направи предположение дали те са еднакви или различни и затова се препоръчва първо да се започне с проверка на статистическа хипотеза за равенство на дисперсиите (H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ и H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) чрез F-теста:

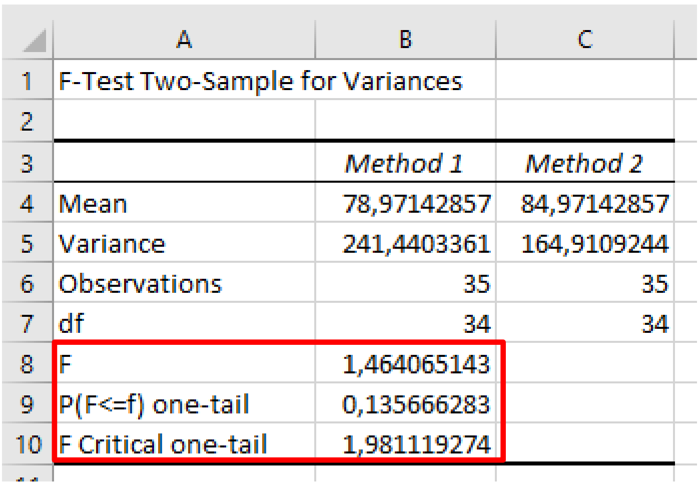


Трябва да се отбележи, че този тест в Excel е реализиран само при едностранна критична област, а така зададените хипотези изискват двустранна критична област. За да се избегне това неудобство ако при основната хипотеза е избрано равнище на значимост 0,05, то и при проверката за равенство на дисперсиите трябва да се избере същото равнище на значимост, но разделено на 2, тъй като тестът, който реализираме трябва да е при двустранна критична област и в полето за α да се запише 0,025 (0,05/2).

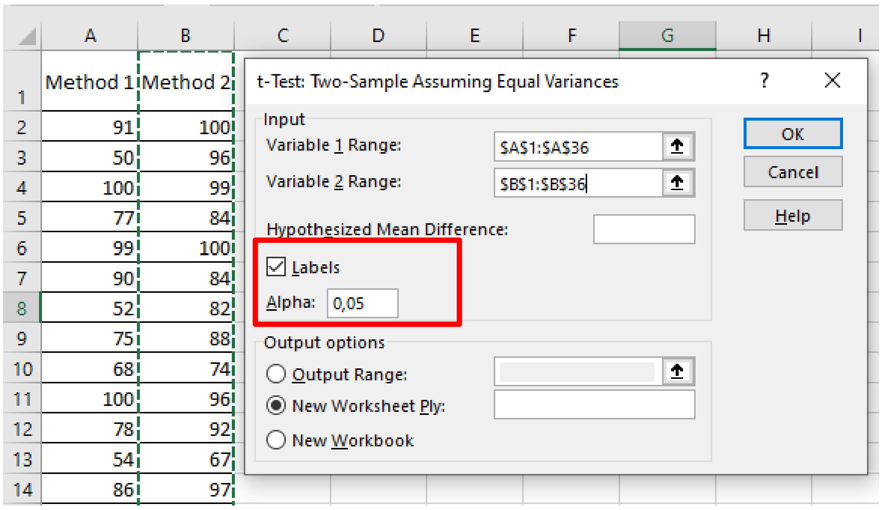
За представяне на проверката за средни от две независими извадки се използват данни от две случайни извадки, състоящи се от 35 студента всяка, съдържащи резултати от тестове на студенти, които са се обучавали по два различни метода – класически (Method 1) и иновативен (Method 2) като се проверява дали иновативният метод е по-успешен от класическия при равнище на значимост 0,05.

Тъй като σ_1^2 и σ_2^2 са неизвестни, се избира t-тест, а за да се направи допускане дали дисперсиите са еднакви или не, се използва F-тест. Данните се въвеждат чрез маркиране като е препоръчително да се включи и името на променливата като се даде отметка на Labels. Избира се равнище на значимост 0,025 и по подразбиране резултатите се появяват на нов работен лист. Получават се следните резултати:





	A	B	C
1	F-Test Two-Sample for Variances		
2			
3		*Method 1*	*Method 2*
4	Mean	78,97142857	84,97142857
5	Variance	241,4403361	164,9109244
6	Observations	35	35
7	df	34	34
8	F	1,464065143	
9	P(F<=f) one-tail	0,135666283	
10	F Critical one-tail	1,981119274	



	A	B	C
1	t-Test: Two-Sample Assuming Equal Variances		
2			
3		*Method 1*	*Method 2*
4	Mean	78,97142857	84,97142857
5	Variance	241,4403361	164,9109244
6	Observations	35	35
7	Pooled Variance	203,1756303	
8	Hypothesized Mean Difference	0	
9	df	68	
10	t Stat	-1,760899081	
11	P(T<=t) one-tail	0,041375703	
12	t Critical one-tail	1,667572281	
13	P(T<=t) two-tail	0,082751406	
14	t Critical two-tail	1,995468931	

Статистическата проверка на хипотези за равенство на дисперсиите може да се извърши чрез класическия подход на критичните стойности като се сравнят емпиричната и теоретичната характеристики или като се използва p-value. От получените резултати (1,464 < 1,981 или 0,136 > 0,05) следва, че нулевата хипотеза не може да се отхвърли и следователно е възможно да се допусне, че дисперсиите са еднакви. Това означава, че се избира: t-test:Two Sample Assuming Equal Variances. От приложението на теста се получават резултати на нов работен лист. Потребителят отново може да избере класическия подход на критичните стойности или p-value подхода при проверката на хипотезата, но тук вече резултати са при едностранна и при двустранна критични области. Тъй като се тества хипотезата, че новият метод в обучението е по-успешен, се избира ляво странна критична област. Трябва да се отбележи, че Excel представя като резултат само абсолютните стойности на теоретичните характеристики и затова ако например се работи с ляво странна критична област при сравняване на характеристиките, теоретичната се взема със знак „-“. Според резултатите по двата подхода (-1,761< -1,668 или 0,04 < 0,05) нулевата хипотеза се отхвърля в полза на алтернативната или разликата е статистически значима в полза на иновативния подход при равнище на значимост 0,05.

Когато се правят промени в начина, по който се преподава в един курс, често искаме да измерим въздействието на тези промени върху обучението на студентите. Има няколко различни обобщаващи характеристики, които могат да се използват, за да се сравни обучението в различни курсове при различни подходи на преподаването. В изследванията на социалните науки тази обобщаваща характеристика се нарича размер на ефекта. Размерът на ефекта е мярка за това колко важна е разликата: големите размери на ефекта означават, че разликата е важна; малките размери на ефекта означават, че разликата е маловажна. Ефектът на размера се получава като се нормира разликата между двете средни и дава мярка за това колко съществено се различават резултатите от различното преподаване в два курса.

Размерът на ефекта обаче, не е статистическата значимост. Докато значимостта показва колко вероятно е резултатът да се дължи на случайни фактори, то размерът на ефекта разкрива колко важен е резултата. В статията „Изявление относно статистическата значимост и p-стойностите“, Американската статистическа асоциация обяснява, че статистическата значимост не е еквивалентна на научна, човешка или икономическа значимост. По-малките p-стойности не предполагат непременно наличието на по-големи или по-важни ефекти и по-големите p-стойности не означават липса на важност или дори липса на ефект. Всеки ефект, независимо колко малък е, може да доведе до малка p-стойност, ако размерът на извадката или прецизността на измерване е достатъчно висока, а големите ефекти могат да доведат до по-високи p-стойности, ако размерът на извадката е малък или измерванията са неточни (Wasserstein and Lazar, 2016).

Най-разпространеният обобщаващ показател за размера на ефекта е *Cohen's d* и се изчислява по следната формула:

$$d = \frac{|\overline{x_1} - \overline{x_2}|}{s_{pooled}} \tag{1}$$

Ако стойностите му са по-малки или равни на 0,2 ефектът е малък ако са около 0,5 - ефектът е среден и ако са 0,8 и по-големи - ефектът е голям.

Excel не предлага изчисляване на размера на ефекта, но на база на получените резултати това може да се изчисли допълнително като се приложи формулата в произволна свободна клетка:

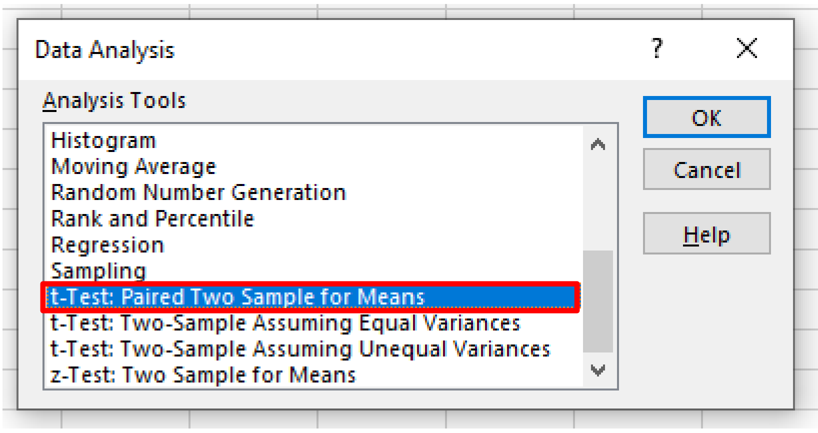
	A	B	C	D	E	F
1	t-Test: Two-Sample Assuming Equal Variances					
2						
3		*Method 1*	*Method 2*			
4	Mean	78,97142857	84,97142857			
5	Variance	241,4403361	164,9109244			
6	Observations	35	35		=(C4-B4)/sqrt(B7)	
7	Pooled Variance	203,1756303				
8	Hypothesized Mean Difference	0				
9	df	68				
10	t Stat	-1,760899081				
11	P(T<=t) one-tail	0,041375703				
12	t Critical one-tail	1,667572281				
13	P(T<=t) two-tail	0,082751406				
14	t Critical two-tail	1,995468931				

0.420935

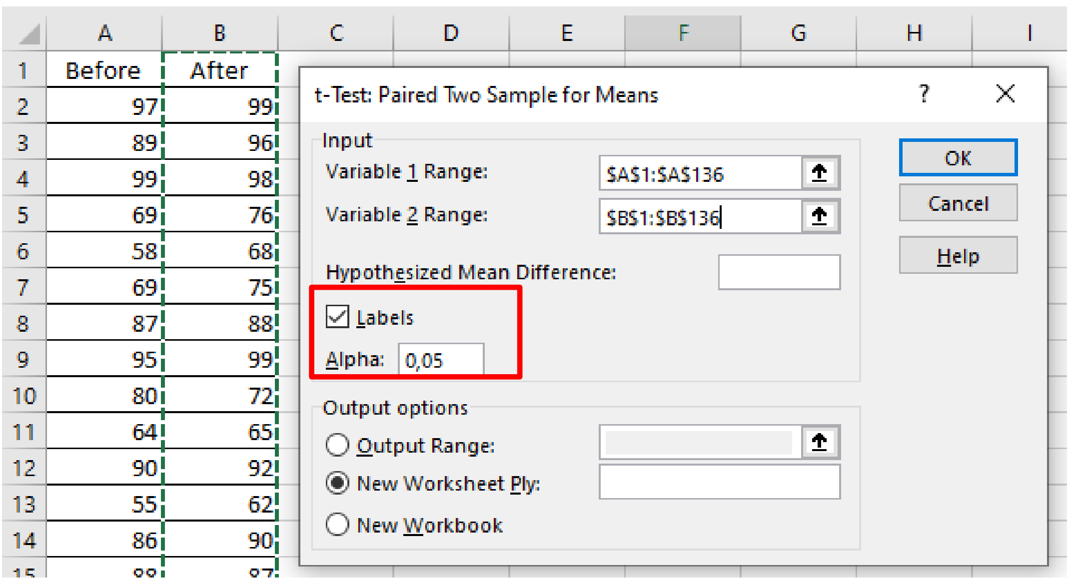
Cohen's d = 0,42 и показва, че размерът на ефекта от приложението на иновативния подход е среден.

2. Проверка на статистически хипотези за разлика между средни от две генерални съвкупности при взаимнозависими извадки

При проверката на статистически хипотези за разликата между средни при взаимнозависими извадки е характерно, че се реализират две измервания върху едни и същи статистически единици. Обемът на взаимнозависимите извадки е еднакъв. Тестът може да се приложи при наблюдения на статистическите единици преди и след някакво събитие по един и същи признак, например входно и изходно ниво на студентите по дадена дисциплина или резултати преди и след определен модул или курс на обучение.



Илюстрирането на проверката за средни от две взаимнозависими извадки се основава на наблюдение на 235 студенти преди и след приложението на нов метод на обучаване като се проверява хипотезата, че новият метод на обучение е по-добър при равнище на значимост 0,05. Получават се следните резултати:



	A	B	C
1	t-Test: Paired Two Sample for Means		
2			
3		*Before*	*After*
4	Mean	79,8074074	81,7111111
5	Variance	190,156661	177,490547
6	Observations	135	135
7	Pearson Correlation	0,81012671	
8	Hypothesized Mean Difference	0	
9	df	134	
10	t Stat	-2,6440481	
11	P(T<=t) one-tail	0,00458489	
12	t Critical one-tail	1,65630454	
13	P(T<=t) two-tail	0,00916978	
14	t Critical two-tail	1,97782576	

Статистическата проверка на хипотези между средни от две генерални съвкупности при взаимнозависими извадки се извършва отново чрез t-теста. Подобно на предходните анализи, въвеждането на данни става чрез маркиране с или без етикети, а резултатите по подразбиране са на нов работен лист. Потребителят отново може да избере класическия подход на критичните стойности или p-value подхода при проверката на тази хипотеза, при едностранна или двустранна критични области. Тъй като се тества хипотезата, че новия метод на обучението е по-добър и се предполага, че студентите ще са по-подготвени след неговото приложение и ще покажат по-високи резултати, се определя ляво странна критична област, а при сравняване на характеристиките, теоретичната отново трябва да се вземе със знак „-“. Според резултатите по двата подхода (-2,644 < -1,656 или 0,0046 < 0,05) нулевата хипотеза се отхвърля в полза на алтернативната или разликата между преди и след приложението на новия метод на обучение е статистически значима при равнище на значимост 0,05, т.е. новият подход дава по-добри резултати.

Отново се задава въпросът какво е въздействието на промените в обучението върху студентите. Това въздействие се оценява чрез показателя за размера на ефекта. Чрез него се дава обобщаваща числова характеристика на размера на ефекта преди и след промените. Тъй като в резултатите на Excel S_{pooled} отсъства, но от друга страна винаги при взаимозависимите извадки, двете извадки са с един и същ обем и следователно, за да се намери S_{pooled} може да се използват дисперсиите на двете извадки:

$$S_{pooled} = \sqrt{\frac{S_1^2+S_2^2}{2}} \qquad (2)$$

Формулата за размера на ефекта е:

$$d = \frac{|\overline{x_1}-\overline{x_2}|}{S_{pooled}} = \frac{|\overline{x_1}-\overline{x_2}|}{\sqrt{\frac{S_1^2+S_2^2}{2}}} \qquad (3)$$

	A	B	C	D	E	F
1	t-Test: Paired Two Sample for Means					
2						
3		*Before*	*After*			
4	Mean	79,807407	81,711111			
5	Variance	190,15666	177,49055			
6	Observations	135	135			
7	Pearson Correlation	0,8101267			=(C4-B4)/(sqrt(C5+B5)/2)	
8	Hypothesized Mean Difference	0				
9	df	134				
10	t Stat	-2,644048				
11	P(T<=t) one-tail	0,0045849				0.19857
12	t Critical one-tail	1,6563045				
13	P(T<=t) two-tail	0,0091698				
14	t Critical two-tail	1,9778258				

Cohen's d ≈ 0,20 и разкрива, въпреки че при новия подход в обучението студентите показват статистически значим по-висок среден резултат, то размерът на ефекта е слаб, т.е. постигнатият положителен резултат е много нисък и маловажен.

Заключение

Докладът показва как с помощта на модула Data Analysis на MS Excel е възможно да се извършва една доста прецизна статистическа проверка на хипотези. Въпреки, че се налага да се правят допълнителни изчисления, да се пренареждат данни, да се разширяват изходните колони и други, то анализите се реализират сравнително бързо и лесно, и са достъпни за всички потребители на MS Excel. С всяка нова версия на MS Excel се добавят обновени и по-добри инструменти - нови функции или диаграми за анализ на данни, но подобрения в Analysis ToolPak няма. Загадка е защо Microsoft не изразходва и минималното време и средства, необходимо за обновяване и доразвития на Analysis ToolPak.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Cohen, J. (1992). A power primer. Psychological Bulletin, pp. 112, pp. 155–159
2. Ferguson, C. J. (2016). An effect size primer: A guide for clinicians and researchers. In A. E. Kazdin (Ed.), Methodological issues and strategies in clinical research, pp. 301–310
3. Hadzhiev, V. i dr. (2009). Statisticheski i ikonometrichen softuer. Varna: Univ. izd. Nauka i ikonomika.
4. McLeod, S. A. (2019, July 10). What does effect size tell you? Simply psychology: Available at: https://www.simplypsychology.org/effect-size.html (Accessed: 10 September 2022)
5. Salov, V. i dr.(2019). Informatika. Varna: Univ. izd. Nauka i ikonomika.
6. Slaveva, K. i dr. (2016). Usavarshenstvane na obuchenieto po statistika chrez izpolzvane na savremenni informatsionni i komunikatsionni tehnologii. Almanah nauchni izsledvania, SA D. A. Tsenov – Svishtov, Izd. AI Tsenov, br. 23, s. 498-528

7. Todorova, S. (2019). Statistics for Data Analysis Using Microsoft Excel. Izvestia Journal of the Union of Scientists - Varna. Economic Sciences Ser. 2, pp. 68-74
8. Wasserstein R., Lazar, N. (2016) The ASA Statement on p-Values: Context, Process, and Purpose, The American Statistician, 70:2, pp. 129-133, DOI: 10.1080/00031305.2016.1154108
9. Winston, L. W. (2016) Microsoft Excel 2016. Data Analysis and Business Modelling. Washington: Microsoft Press.

STATISTICAL ANALYSIS OF LABOR PRODUCTIVITY IN THE BULGARIAN ECONOMY

Chief Assist. Prof. Silvia Gospodinova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Chief Assist. Prof. Dimitria Karadimova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *The report researches the labor productivity in the context of Bulgarian economy with the objective to establish the trends in its development in the recent few years. A comparative analysis has been carried out on the methods and the limitations of the estimation of labor productivity and its relation to the economic efficiency, the business cycle as well as other macroeconomic indicators. A leading trend in the development of labor productivity in Bulgaria has been identified through the application of statistical methods. Estimates have been made on the future values of labor productivity up until year 2024 providing that the established patterns persist.*

Keywords*: Labor productivity; Trend models; Forecasting; Economic efficiency*

JEL code: *C22, C32, E17*

СТАТИСТИЧЕСКИ АНАЛИЗ НА ПРОИЗВОДИТЕЛНОСТТА НА ТРУДА В БЪЛГАРИЯ

Гл. ас. д-р Силвия Господинова
Икономически университет - Варна, България

Гл. ас. д-р Димитрия Карадимова
Икономически университет - Варна, България

Въведение

Основна движеща сила за развитието на една пазарна икономика е повишаването на нейната ефективност, в основата на което е растежът на производителността на труда. Производителността на труда е индикатор, отразяващ количеството продукт, произведен от един работник или служител за единица време. За икономиката като цяло този показател отразява произведения БВП (БДС) от едно заето лице или за един отработен човекочас. Неговата стойност предопределя степента на икономическо развитие, размера на националното богатство, нивото на благосъстоянието, а също и качеството на живот в страната.

Целта на настоящия доклад е да се анализират тенденциите в развитието на производителността на труда в България за периода 2000-2021 година и да се направи прогноза за по-нататъшното ѝ развитие при условие, че установените закономерности се запазят. **Задачите**, които си поставяме в доклада са:

1) Да се опишат и обяснят понятията, методите и ограниченията, използвани при изчисляването на производителността на труда.

2) Да се анализират предимствата и недостатъците на показателите за измерване на производителността на труда.

3) Да се анализира общото развитие на тези показатели в България за посочения период.

4) Да се моделират тенденциите на развитие на производителността на труда и да се направят трендекстраполационни прогнози.

Ръстът на производителността е ключова макроикономическа характеристика в дългосрочен план и важен определящ фактор за макроикономическата динамика в краткосрочен и средносрочен план. В дългосрочен план, според икономическата теория, растежът на производителността е основният източник за ръста на реалното производство на глава от населението и мярка за икономическо благосъстояние. В средносрочен план растежът на производителността на труда, заедно с нарастването на общия брой отработени часове, определя развитието на реалния ръст на производството. Освен това динамиката на производителността е ключов момент при анализа на колебанията на бизнес цикъла. Тенденцията в развитието на производителността може също така да бъде от значение за интерпретацията на развитието на други макроикономически променливи, включително инфлацията, валутните курсове и производството в краткосрочен и средносрочен план. Така например, тенденцията на растеж на производителността влияе върху извеждането на оптималната парична политика. В същото време този анализ не е особено лесен, а средносрочните последици от промяната в тенденцията на растежа на производителността на труда могат да варират значително и зависят от множество фактори, един от които е каква ще е реакцията на търсенето. При по-нисък растеж на производителността могат да намалеят очакванията по отношение на печалбите и реалните заплати, като по този начин най-вероятно ще намалеят инвестициите и потреблението и в краткосрочен план. Скоростта, с която се коригират очакванията е важна. Ако очакванията се променят бързо, разходите могат да реагират бързо, като по този начин се забавя спада в производителността на труда (Bernanke, 2005).

1. Същностни характеристики на производителността на труда, показатели и проблеми при измерването ѝ.

Производителността на труда е икономически показател, който съпоставя постигнатия резултат (новосъздадения продукт) с вложения трудов ресурс, при осъществяването на определена икономическа дейност на дадена територия за определен период от време. Основни съставни елементи на производителността на труда са показателите, измерващи резултата от осъществяваната дейност (числител) и показателите за вложения труд (знаменател).

На макро ниво резултатът от дейността се измерва най-вече чрез БВП и брутната добавена стойност (БДС) създадена от всички сектори в националната икономика или от отделните икономически дейности. За международни сравнения на производителността на труда е възприето да се използва БВП, докато БДС се прилага за изчисляване на производителността на труда на национално ниво, на ниво икономически сектори (дейности) или по региони.

Трудовият фактор в състава на показателя за производителността на труда се измерва с броя на заетите лица и отработеното от тях време – отработени човекочасове. По-предпочитаният показател е отработеното време измерено в човекочасове, тъй като по-точно представя фактически вложения труд в процеса на производството, а освен това може да обхване и заетите на непълен работен ден.

Съпоставянето на показателите за производителността на труда във времето налага елиминиране влиянието на цените в стойността на показателите за резултата от дейността. За целта БВП и БДС от текущия период се изчисляват по цени от базисен период. В настоящия доклад всички показатели са по цени от 2015 година.

Основна задача свързана с този показател (ПТ) е неговото реално нарастване. То може да се постигне по един от следните начини: резултата да нараства по-бързо от разходите за труд; резултата да нараства при неизменност на трудовия фактор; резултата да намалява с по-бавни темпове, отколкото намаляват трудоразходите; резултатите да остават неизменни, а разходите да намаляват; резултата да нараства, а разходите да намаляват.

Според целите на конкретното изследване и в зависимост от използваните измерители за продукцията и ресурса, могат да се конструират различни показатели за производителност, но общия му вид следния:

$$\text{ПТ} = \frac{\text{резултата от дейността}}{\text{трудов фактор (брой заети или отработени човеко часове)}} \tag{1}$$

Изборът между един или друг възможен показател зависи от целите, които си е поставил анализа, както и от наличието на съответните статистически данни.

Производителността на труда може да бъде изчислена по два начина – като отношение между реалния БВП на един зает или като отношение на БВП на един отработен час. Това са и едни от най-често използваните измерители за производителността от националните статистики и съответно налични в Евростат. Вторият показател е за предпочитане, ако имаме право на избор, тъй като елиминира влиянието на формата на заетост, т.е. дали заетостта е на пълен или непълен работен ден. И двата показателя са ясни и могат да се тълкуват лесно. Те са и най-често използваните в международната практика и не предизвикват недоверие и спорове.

ПТ на база брутен продукт изразява количеството на общата продукция (като физически единици), което се произвежда средно от единица трудов ресурс и съответно може да служи като индикатор за необходимостта от трудови ресурси за производството на определено количество обща продукция. ПТ на база добавена стойност, показва размера на стойността, която средно се добавя в производствения процес от единица трудов ресурс.

Динамиката на ПТ може да бъде проследена и чрез двата показателя. Обичайна практика при изследване изменението на ПТ е да се използват и индекси и съответно от тях лесно могат да се изчислят и процентните изменения. Изключително важно за правилната интерпретация на тези показатели е да се отчете, че те са частични индикатори на производителността, защото в тях се отразява съвместното действие на редица фактори, които влияят на производителността. Изменението им във времето се дължи както на изменение на капацитета и интензивността на работа на трудовите ресурси, така и на изменение на обема на капитала, техническия прогрес, въплътен в средствата за производство, организационни подобрения, икономии от мащаба, изменение на степента на използване на производствените мощности и неизбежните в статистиката измерителни грешки. Затова, по-точно е да се каже, че *ПТ, като индикатор, показва всъщност колко ефективно живият труд се свързва с другите производствени фактори.*

Производителността на труда на база на тези два измерителя в отделните икономически дейности се агрегира на макрониво до производителност за цялата икономика и съответно до среден доход на един зает, което в крайна сметка е измерител на жизнения стандарт в съответната страна и е от голямо значение за макроикономическата политика.

Когато се изчислява производителност на труда, като входящ ресурс се използва количеството на вложения в производството труд, което статистически може да се отчете чрез четири показателя: брой отработени човекочасове, брой заети, приравнени на пълен работен ден, брой заети и брой наети. Данни за четирите показателя са налични от НСИ, но в съответствие с теорията на производството най-подходящ от изброените показатели за количеството на вложения труд са отработените човекочасове, тъй като в този показател се включват действително отработените часове, допълнително отработените часове, времето на работното място, използвано за подготовка на работата, работата по поддръжката и ремонта, почистването и подготовката на инструментите, времето, съответстващо на кратките периоди за почивка на работното място, а също и времето прекарано на работното място в очакване или в готовност поради временна липса на работа, повреда на машините и апаратурите.

Отчитането на този показател от НСИ и в международната практика неминуемо среща определени технически трудности, свързани с това, че данните се събират от два източника – Изследване на работната сила и Отчет на наетите лица, отработеното време, средствата за работна заплата и други разходи за труд, а това може да доведе до неточности и несъответствия и затова се налагат допълнителни оценки и синхронизиране на данните от двата статистически източника.

Изследването на работната сила се осъществява сред домакинствата и от социално-икономическа гледна точка, с цел да установи такива характеристики на работната сила като възраст, образование, втора работа, видове трудови договори и др. Докато отчетите за наетите лица и отработеното време произтичат от предприятията и в тях работната сила се разглежда като производствен фактор – те отчитат работни места, а не заети.

Например, работник, който работи на повече от едно място, в това изследване ще бъде преброен повече от един път. Също така, данните обикновено се събират от фирми, които са над определен размер, т.е. няма пълно покритие на дадена икономическа дейност. Освен това, самото определяне на икономическата дейност може да има несъответствия и да е неточно, защото при Изследването на работната сила то зависи от отговорите на респондентите, а не от твърдата административна класификация, както е при Отчетите от предприятията. Друго различие в тези два източника на данни може да произтича и от възможно различно третиране на понятието „действително отработени часове на нормално работно време“. В Изследването на работната сила често пъти респондентите разглеждат като нормално работно време и това работно време, което е повече от стандартното, но не е регулярно. Има примери в икономическата литература, които сравняват резултати относно нормалното работно време от изследвания на работната сила и от отчети на предприятията. В повечето случаи нормалното работно време от Изследването на работната сила е повече, отколкото е нормалното работно време от отчетите на предприятията.

Допълнителни проблеми съществуват и при отчитането на отработените човекочасове, тъй като тяхното прецизно отчитане е възможно само тогава, когато става дума за работещи на почасово заплащане. Отчитането на отработените човекочасове на работници и служители, които са на месечна заплата е по-трудно, защото от гледна точка на производствените разходи се приема, че те работят в рамките на договореното нормално работно време, докато фактически отработените от тях човекочасове може да са различни.

Най-съществените различия между количеството на вложения труд, измерено чрез брой хора и чрез отработените човекочасове се дължат на отсъствия по болест и отпуск и празничните дни. Размерът на отпуските и празничните дни може да се оцени на база на действащите към момента нормативни документи или на база на масови трудови споразумения (ако има такива). Този размер може също да се оцени и от анкетите в Изследването на работната сила, което също може да доведе до несъответствия, грешки и пропуски. Сравнителни аналитични материали от международната практика показват, че в Изследването на работната сила има тенденция отработените часове да се надценяват, а да се подценява отсъствието от работа, което се дължи на болнични или празнични дни.

Изброените възможни неточности при отчитането на отработените часове пораждат статистически грешки на измерванията, които са неизбежни. Те биха могли да се окажат по-съществен проблем само при евентуални международни сравнения със страни, които работят по различни методологии за отчитането и оценяването на изброените специфики. Когато става дума обаче за данни за икономика, в която статистическата отчетност работи систематично по една методология, тези неточности са малки и биха могли да се проявят по-съществено само при смяна на методологията. От тази гледна точка, за целите на изследването на производителността на труда в България, при наличието на възможност, следва да се предпочита като показател „броят на отработените човекочасове“ пред останалите възможности за измерване на количеството труд, което се влага в производствения процес.

Останалите показатели по принцип отстъпват по своята информационна стойност. Най-ниска такава има показателят *„брой наети“* и поради това той следва да се използва само когато по една или друга причина липсват данни за останалите показатели. Той не отчита нито промените в средното работно време, нито възможността да има наети, които работят на повече от едно работно място, нито самонаетите в съответната сфера и неплатените семейни работници, ако има такива.

По-висока информационна стойност има показателят *„брой заети“*, но и той отстъпва на показателя „брой отработени човекочасове“, защото средното отработено време може да се променя, когато се променят броя на дните за платен отпуск, броя на официалните празници или когато се променя броя на хората, работещи на непълен работен ден.

Показателят *„брой заети, приравнени към пълен работен ден“* по дефиниция се получава като броят на отработените човекочасове се раздели на средногодишния брой на часовете, които съответстват на заетост при пълен работен ден. В този случай, работещите на непълен работен ден се отчитат пропорционално с по-ниско тегло от работещите на пълен работен ден и поради това този показател преодолява недостатъка на показателите „брой наети“ и „брой заети“, които отчитат всички работещи еднакво. Следователно, той има по-висока информационна стойност от тях, но все пак отстъпва на показателя „брой отработени човекочасове“, защото не отчита промените в отработените човекочасове от работници на пълен работен ден, дължащи се на възможни промени в законодателството или в колективните трудови договори.

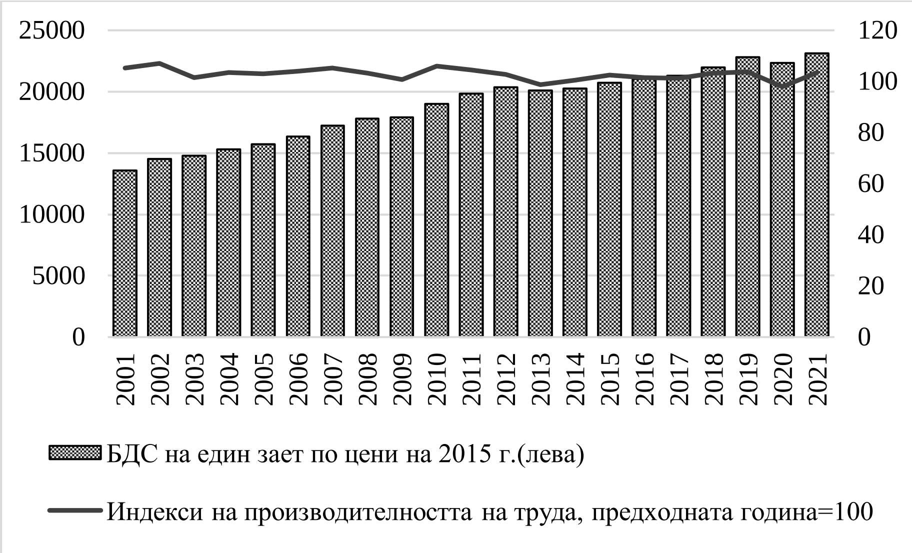
За да бъде коректно измерването на измененията на производителността на труда в динамика е необходимо да се елиминира влиянието на цените на произведената продукция. Затова показателят за производствения резултат - брутната добавена стойност е по постоянни цени.

Следователно, за икономиката като цяло най-точно изчисляване на производителността на труда и на нейната динамика във времето може да се получи чрез показателите – брутна добавена стойност на един зает по базисни цени, брутна добавена стойност на един отработен човекочас отново по базисни цени, а също и чрез използването на верижни индекси.

2. Статистически анализ на тенденцията на развитие и прогнозиране на производителността на труда в България

Средногодишно реалната ПТ, измерена чрез БДС на едно заето лице, се увеличава с 2,82% или в абсолютно изражение с 486,39 лева добавена стойност на едно заето лице. В сравнение с базисната 2000 г., ПТ се увеличава през всяка следваща година, като в края на периода ръстът достига 79,22% или увеличение с 10214 лева добавена стойност на един зает. Верижните индекси (фигура 1) също показват нарастване през периода, като изключение се наблюдава през 2013 г. и 2020 г., когато добавената стойност на един зает намалява съответно с 1,20% и 2,08%. Забавянето на ръста на производителността на труда през посочените периоди е отражение на глобалната финансова криза, ефектът от която в България настъпва по-късно и пандемията от COVID-19.

При производителността на труда, измерена чрез БДС на един отработен човекочас се наблюдава подобна тенденция на развитие. Прави впечатление, че отрицателен прираст на добавената стойност се наблюдава единствено през 2013 г. спрямо предходната година. Средногодишно БДС на един отработен човекочас се увеличава с 2,88% или с 0,31 лева. В края на изследвания период се регистрира реален ръст от 81,55%, който представлява увеличение с 6,40 лева добавена стойност на едно заето лице.



Фиг. 1. Динамика на БДС на едно заето лице за периода 2001-2021 г.
Източник: *Данни на НСИ и изчисления на автора*

Анализът на показателите за характеризиране на общото развитие на производителността на труда, измерена и по двата начина, показва ясно изразена тенденция на нарастване на реалния ѝ размер. Втората и не по-малко важна задача след идентифицирането на тренда е неговото аналитично изразяване чрез полиноминални модели, вътрешнолинейни и вътрешнонелинейни функции, и използването им за нуждите на анализа и най-вече прогнозирането (Русев, 1999). Тенденцията на развитие се представя като повече или по-малко плавна линия, която се нарича тренд. Формира се под влияние на съществени, трайно действащи причини, които определят посоката на развитие на икономическото явление. Допуска се, че отклоненията от тренда са израз на случайни колебания или на неопределени и хаотични кратковременни въздействия (Ламбова и др., 2012).

Статистическият анализ на тенденцията на развитие на ПТ има за цел да се покажат закономерностите на развитие от една страна, а от друга да се използва за прогностични цели. Експериментирани са девет трендови модела. Чрез тях развитието в ПТ се представя като функция на времето. Описва се с аналитични функции, които съответстват на вида на проявяващата се тенденция на развитие. От формално алгоритмична гледна точка трендовите модели съответстват на регресионните модели при регресионния анализ. Трябва да се има предвид, че между тях има съществени различия по отношение на практическата им интерпретация (Манов, 2001). Стойностите на ПТ представляват зависимата променлива, а времето се определя като независима променлива в моделите. За установяване и моделиране на тенденцията на развитие се прилага методът на конкуриращите се модели. Като основен критерий за избор на най-подходящ модел се прилага коефициентът на детерминация (R Square). Той е универсален измерител на обяснителната способност на даден модел. Сравняват се коефициентите на детерминация за оценка на степента на адекватност на конкуриращите се модели. За най-подходящ се определя моделът с най-висока стойност. В научната литература се препоръчва спазването на принципа на опростеното моделиране, според който при сравнително близки резултати от два експериментирани модела, се избира този, който има по-лека функционална форма (Гоев и др., 2019).

От експериментираните трендови модели на ПТ, измерена с БДС на едно заето лице, най-висока обяснителна способност имат квадратичният и кубичният, при които коефициентът на детерминация има стойност 0,990. Проверката на статистически хипотези с помощта на теста на Фишер (таблица 1) при риск за грешка от първи род (α=0,05) показва, че и двата модела са адекватни.

Таблица 1

Трендови модели, описващи динамиката на производителността на труда, измерена чрез БДС на едно заето лице по цени от 2015 г.

№	Модели	Функционална форма	Коефициент на детерминация RSquare	$F_{емп.}$	Равнище на значимост Sig
1.	Линеен (Linear)	$\hat{Y}_i = b_0 + b_1.t_i$	0,976	824,694	0,000
2.	Логаритмичен (Logarithmic)	$\hat{Y}_i = b_0 + b_1.\ln(t_i)$	0,910	202,902	0,000
3.	Реципрочен (Inverse)	$\hat{Y}_i = b_0 + b_1.(1/t_i)$	0,551	24,539	0,000
4.	Квадратичен (Quadratic)	$\hat{Y}_i = b_0 + b_1.t_i + b_2.t_i^2$	0,990	936,533	0,000
5.	Кубичен (Cubic)	$\hat{Y}_i = b_0 + b_1.t_i + b_2.t_i^2 + b_3.t_i^3$	0,990	591,595	0,000
6.	Степенен (Power)	$\hat{Y}_i = b_0.t_i^{b_1}$	0,943	332,493	0,000
7.	Експоненциален (Exponential)	$\hat{Y}_i = b_0 \exp(b_1.t_i) = b_0 e^{b_1.t_1}$	0,956	439,006	0,000
8.	S-curve	$\hat{Y}_i = \exp(b_0 + b_1/t_i) = e^{b_0 + b_1./t_{ii}}$	0,610	31,345	0,000
9.	Логистичен (Logistic)	$\hat{Y}_i = \dfrac{1}{1/u + b_0.b_1^{t_1}}$	0,956	439,006	0,000

За квадратичния модел $F_{емп.}$(936,533)>$F_{теор.}$(3,522), а за кубичния $F_{емп.}$(591,595)>$F_{теор.}$(3,160). Всички модели имат равнища на значимост Sig.=0,000<0,05, при които нулевата хипотеза (H_0) може да се отхвърли в полза на алтернативната (H_1), т.е. може да се приеме, че са адекватни.

Проверката на статистически хипотези за значимост на параметрите на моделите с помощта на t-критерия на Стюдент (или равнищата на значимост на t-теста) показва, че при кубичния модел параметрите b_2 и b_3 не са статистически значими. Всички параметри на квадратичния модел са статистически значими (таблица 2), което позволява моделът да се приложи за трендекстраполационни прогнози.

Конкретният вид на квадратичния модел, въз основа на който се намират компонентите на тренда е:

$$\hat{Y}_i = 12169{,}890 + 707{,}991.t_i - 9{,}990.t_i^2$$

Таблица 2

Оценка на параметрите на квадратичния модел

Parameter Estimates	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
Case Sequence (b_1)	707,991	46,587	1,463	15,197	0,000
Case Sequence ** 2 (b_2)	-9,990	1,967	-,489	-5,079	0,000
Constant (b_0)	12169,890	232,593		52,323	0,000

Избраният трендови модел за моделиране на тенденцията на развитие на ПТ може да се определи като добър. При него 99% от измененията в ПТ се обяснява с изменението на времето. Ако се направи допускане, че през следващите няколко години ПТ ще прояви подобни закономерности на развитие както през изследвания период, то стойностите ѝ ще се намират в интервалите, представени в таблица 3:

Таблица 3

Песимистичен, усреднен и оптимистичен вариант на прогнозните стойности на ПТ, измерена чрез БДС на едно заето лице по цени от 2015 г.

Години	Песимистичен вариант	Усреднен вариант	Оптимистичен вариант
2022	22469,37	23168,97	23868,57
2023	22661,81	23407,43	24153,05
2024	22824,01	23625,92	24427,83

През изследвания период 2000-2021 г. развитието на ПТ, измерена чрез БДС на един отработен човекочас проявява подобна тенденция на увеличение като при вече анализирания показател БДС на едно заето лице. За моделиране на съществуващата тенденция на развитие отново са конструирани девет трендови модела. Прави впечатление, че и при този показател, моделите, които имат най-висока обяснителна способност отново са квадратичният и кубичният, при които коефициентът на детерминация има стойност 0,989. Може да се направи заключение, че 98,9% от измененията в ПТ се обяснява с изменението на независимата променлива - времето. Проверката на статистически хипотези за адекватност на трендовите модели показва, че и двата модела са адекватни. При равнище на значимост α=0,05, F-тестът показва, че се отхвърля нулевата хипотеза и алтернативната хипотеза се приема за правдоподобна. За квадратичния модел $F_{емп.}(863,797)>F_{теор.}(3,522)$, а за кубичния $F_{емп.}(545,606)>F_{теор.}(3,160)$. Проверката на статистически хипотези за значимост на параметрите на квадратичния модел посредством t-критерий на Стюдент показва, че всички параметри са статистически значими. Параметрите b_2 и b_3 на кубичния модел не са статистически значими. За моделиране тенденцията на развитие и построяване на трендекстраполационни прогнози на ПТ, измерена чрез БДС на един отработен човекочас, се избира квадратичният модел:

$\hat{Y}_i = 7{,}433 + 0{,}404.t_i - 0{,}004.t_i^2$

Чрез екстраполация (продължаване) на изследвания динамичен ред за ПТ през следващите три години, на базата на проявяващата се тенденция на развитие в миналото, се намират бъдещите стойности. С помощта на стохастичната грешка се определят интервалите на разработената трендова прогноза:

$$\hat{Y}_{n+L} - S_{\hat{Y}_{n+L}}.t_{(\alpha,\nu)} \le \hat{Y}_{n+L} \le \hat{Y}_{n+L} + S_{\hat{Y}_{n+L}}.t_{(\alpha,\nu)} \quad (2)$$

Границите, които се приемат като песимистичен и оптимистичен вариант на прогнозните стойности са представени в таблица 4.

Таблица 4

Песимистичен, усреднен и оптимистичен вариант на прогнозните стойности на ПТ, измерена чрез БДС на един отработен човекочас по цени от 2015 г.

Години	Песимистичен вариант	Усреднен вариант	Оптимистичен вариант
2022	14,15	14,61	15,07
2023	14,34	14,83	15,32
2024	14,51	15,03	15,55

Ако тенденцията на развитие на производителността на труда се запази, то през следващите три години добавената стойност на един отработен човекочас ще достигне приблизително стойностите: 14,61 лв., 14,83 лв., 15,03 лв.

Заключение

Повишаването на производителността е ключов фактор за дългосрочния икономически растеж и повишаване на жизнения стандарт. В краткосрочен и средносрочен план производителността засяга и развитието на бизнес цикъла, инфлацията, обменните курсове и други ключови макроикономически променливи, като например потреблението, инвестициите и заетостта.

Въз основа на направения анализ на предимствата и недостатъците на показателите за измерване на производителността на труда, се стига до извода, че най-точни са показателите БДС на едно заето лице и БДС на един отработен човекочас. Показателите за характеризиране на общото развитие на ПТ в реално изражение, измерена чрез двата показателя, показват, че се наблюдава нарастване през целия изследван период спрямо базисната 2000г. Най-съществено е увеличението в края на периода с 79,22% добавена стойност на един зает и с 81,55% добавена стойност на един отработен човекочас. Верижните индекси потвърждават направената констатация, като изключение се наблюдава през 2013г. и 2020г., когато прирастът има отрицателни стойности. Това се обяснява с глобалната финансова криза, ефектът от която в България настъпва по-късно и ограниченията, които са свързани с пандемията от COVID-19. Средногодишно БДС на едно заето лице и БДС на един отработен човекочас се увеличават приблизително с 3%. В реално изражение БДС на едно заето лица нараства средногодишно с 486,39 лв., а БДС на един отработен човекочас с 0,31 лв. Приложен е методът на конкуриращите се модели за избор на най-подходящ трендови модел. Направените прогнози за следващите три години отчитат наблюдаваната тенденция към увеличение.

Растежът на производителността е свързан както с дългосрочни, така и с краткосрочни промени. Първите обикновено са свързани с тенденциите, които отразяват текущите структурни промени, докато последните са свързани с динамиката на бизнес цикъла. При анализирането на промените в производителността на труда трябва да се вземат предвид както дългосрочните промени, така и краткосрочната динамика, за да се оцени степента, в която промените в растежа на производителността могат да бъдат устойчиви.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Ben S. Bernanke, 2005. "Productivity," Speech 70, Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.)
2. Goev, V. i dr. (2019). Statisticheski analiz v sotsiologicheski, ikonomicheski i biznes izsledvania. Sofia: Izd. kompleks UNSS
3. Lambova, M. i dr. (2012). Vavedenie v statistikata. Varna: Izd. STENO
4. Manov, A. (2001). Statistika sas SPSS. Sofia: Izd. Trakia-M
5. National Statistical Institute. Methodology. Available at: https://www.nsi.bg/sites/default/files/files/metadata/GDP_2.1.3_Methodology.pdf (Accessed: 10 September 2022)
6. National Statistical Institute. GDP - Labour productivity - Total of economy Available at: https://infostat.nsi.bg/infostat/pages/reports/result.jsf?x_2=185 (Accessed: 10 September 2022)
7. Rusev, Ch. (1999) Statisticheski metodi za analiz na vremenni redove. Varna: Izd. Nauka i ikonomika

STRUCTURAL CONVERGENCE AND ECONOMIC DEVELOPMENT - THEORETICAL OVERVIEW

Chief Assist. Prof. Silvia Gospodinova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *The report provides a theoretical review of the literature on the structural convergence of countries within one and same economic area, focusing on the structural convergence of countries within the EU and its evolution. The aim is to bring out the fundamental, as well as the most recent research, focused on the importance of structural convergence, as well as the continuation and development of this process from a contemporary point of view.*

Keywords: *Structural convergence; Similarity; European integration; Integration area*

JEL code: *F02, F15, 047*

СТРУКТУРНА КОНВЕРГЕНЦИЯ И ИКОНОМИЧЕСКО РАЗВИТИЕ – ТЕОРЕТИЧЕН ПРЕГЛЕД

Гл. ас. д-р Силвия Господинова
Икономически университет - Варна, България

Въведение

Изведеният проблем е актуален, тъй като структурната конвергенция има редица средносрочни и дългосрочни последици свързани със синхронизирането на бизнес циклите, изграждането на дългосрочни модели на развитие, както и с проблемите на специализацията и концентрацията. Въпросът е от голям интерес в контекста и на бъдещото развитие на ЕС, както и при вземането на решение за приемането на еврото от страна на България.

В много изследвания динамиките в икономическите структури и различията в тях между отделните държави-членки на ЕС са отправна точка за анализ на теориите за икономическото развитие. Именно поради тези причини всички нови аспекти от теоретична гледна точка следва да се разгледат и подходящите от тях да се приложат за да се подпомогне структурната конвергенция на България към тази на ЕС.

Анализирането на процесите на конвергенция не датира отскоро, но първоначалните изследвания са насочени най-вече към номиналната конвергенция. Впоследствие изследвания се насочват към реалната конвергенция, а в още по-съвременните условия и към структурната конвергенция.

Емпирични изследвания проведени основно в периода 1990-2007 година по отношение на страните-членки на ЕС за реалната конвергенция, показват, че страните се сближават в няколко ключови аспекта – производителност (Knill, 2007); показатели, характеризиращи пазара на труда, както и доходи на глава от населението (Marelli, E., Signorelli, M. & Tyrowicz, J. 2012). По отношение обаче на конвергенцията на икономическите структури (Scharpf, 2016) нещата не са толкова ясни и лесни за проследяване.

Структурната конвергенция се дефинира по няколко начина, според различни показатели. Основно се използват конвергенция в секторните структури на БВП и брутната добавена стойност, на заетите лица или отработените човекочасове, а също и конвергенция на производителността, в частност на дохода на глава от населението (Wacziarg, 2004).

Важността на процеса на изучаване на структурната конвергенция се крие в дългосрочните последици от нея свързани със синхронизирането на бизнес-циклите и относно динамиката на специализацията и модела на икономическо развитие.

Структурната конвергенция има ключова роля в рамките на единния европейски валутен съюз и непостигането ѝ крие риск от икономическа и финансова дивергенция. Тази структурна конвергенция може да бъде постигната, ако следните процеси станат реалност, а именно:

- Висока степен на конвергенция в структурите на икономиките;
- Синхронизиране на бизнес циклите;
- Външнотърговска интеграция.

Високата степен на конвергенция в структурите на икономиките може да смекчи евентуални шокове, причинени от липсата на синхронизация на бизнес цикъла. В литературата емпирично е доказано положителното въздействие на структурната конвергенция при синхронизирането на бизнес цикъла (Beck, 2014).

Целта на този доклад е да се направи преглед както на теоретичната, така и на емпиричната литература относно значението на структурната конвергенция за страните от една и съща икономическа зона с акцент върху проблема за структурната конвергенция и последиците, които тя носи за синхронизирането на бизнес циклите, специализацията и икономическото развитие на страните от ЕС.

Дефиниране на структурната конвергенция и свързаните с нея понятия

Структурната конвергенция дава информация за степента, в която страните разполагат с потенциал за формиране на оптимална валутна зона, както и за равнището на интеграция в рамките на единния европейски пазар и сходствата или различията в специализацията между тях. Концепцията за структурната конвергенция засяга най-вече процесите, водещи до сходство в икономическите структури и конвергенция на доходите на глава от населението, все важни процеси за държави, принадлежащи към една и съща икономическа общност. Икономическото уеднаквяване на страните от еврозоната, макар и нерегулирано, е една от основните предпоставки за доброто функциониране на съюза.

Терминът „икономическа структура“ е доста общ и съчетава в себе си голямо разнообразие от редица важни характеристики за всяка икономика. В повечето изследвания става въпрос и се изследва структурата на производството, на потреблението, на заетостта, на търговията, на държавните разходи и т.н (Branson, W. H., Guerrero, I., & Gunter, B. G. 1998). Още през 1956 година Кузнец (Kuznets, 1956) характеризира икономическата структура по показателите: дял на БВП по сектори и редица променливи, свързани с търговията.

Концепцията за структурните изменения се използва за установяване и разбиране на причинно-следствената връзка между икономическото развитие и промените в размера и състава на икономическите сектори. Различните автори избират набор от променливи, посредством които анализират връзката между конвергенцията на дадени икономики и икономическото развитие, способността за преодоляване на икономически шокове и за формиране на единна валутна зона.

Емпиричните изследвания в тази област също са разнообразни и затова ще бъдат разгледани в следващия параграф.

Емпирични изследвания, свързани със структурната конвергенция

Изследванията по въпроса за икономическата конвергенция на страните се фокусират на различни равнища (Gugler, K. & M. Pfaffermayr 2004): структурна конвергенция (Fagerberg, 2000) на индустриално ниво (Höhenberger & Schmiedeberg, 2008); роля на селското стопанство (Sassi, M. 2007) в процеса на структурна конвергенция (Fertő, 2016); преход от селскостопанска икономика към индустриална и след това към сектора на услугите (Chong, C. Y., Habibullah, M. S., Baharumshah, A. Z., & Midi, H. 2017); регионална (Berardino, Di, C., Mauro, G., Quaglione, D., & Sarra, A. 2017) конвергенция (Guerrieri, G. & S. Iammarino, 2003); структурна конвергенция и връзката ѝ с доходите; конвергенцията и нейната връзка с интеграцията към паричния съюз (Brülhart, 1998); конвергенция в производителността (Imbs, J. Wacziarg R., 2003) на труда (Cuadrado-Roura, J. R., García-Greciano, B., & Raymond, J. L. 1999) и т.н.

Други автори анализират процеса на догонване между индустриално развити икономики, новоиндустриализирани и по-слабо индустриализирани такива (Abegaz, 2002) или на страни от Централна и Източна Европа (Landesmann, 2000), а също и на новоприсъединили се страни към ЕС (Brixiova, Z., M. Morgan & A. Wörgötter, 2009), както и правят преоценка на конвергенцията за страните (Palan& Schmiedeberg, 2010), които вече са членки и следва да приемат еврото (Juncker, J. C., Tusk, D., Dijsselbloem, J., Draghi, M.. & Schulz, M. 2015).

Структурна конвергенция и икономическо развитие – фактори и последици

Структурната конвергенция е стремеж на по-слабо развитите икономики да се доближат до по-развитите. Развитите икономики имат интерес да си сътрудничат със страни, които структурно се доближават до тях, защото това означава аналогична покупателна способност, сходни и по-големи пазари, трансгранично движение на ресурси, подобно инвестиционно поведение, сходно технологично и образователно равнище.

Ако се постигне структурна конвергенция, всички сближаващи се икономики в крайна сметка ще могат да си сътрудничат повече, да координират своите политики и да преговарят заедно по отношение на трети страни.

Структурната конвергенция може да се изследва на секторно или отраслово равнище. За първи път нещо такова на база хипотезата за трите сектора прави Фурастие (1949г.).

Скоростта на структурна конвергенция зависи от три основни фактора:

1) Първоначалното отклонение от структурата на развитие на модела, който се следва;

2) Темпа на растеж на БВП;

3) Следваната търговска политика.

Хипотезата за трите сектора предвижда, че страните със сходни нива на развитие се характеризират и със сходна междусекторна структура. Разбира се нивото на структурна конвергенция не бива да се абсолютизира поради разлика в размера, ресурсната обезпеченост, културните и институционалните характеристики на икономиките (Chenery, 1960).

Преминаването на една икономика от по-слабо развита към по-силно развита може да се илюстрира чрез множество структурни промени, които е възможно да варират в зависимост от даденостите и социалните ѝ характеристики. Изведени са редица фактори, които спомагат за структурната конвергенция между страните, това са: сходни промени в потребителското търсене; увеличаване равнището на доходите; необходимост от натрупване на физически и човешки капитал; по-лесен достъп до нови технологии и свободна търговия (Chenery, 1982).

Структурното сходство е ключов елемент от процеса на структурна конвергенция, която е от особено значение и за икономическия растеж. Тя е важна и от гледна точка на това, че ако бизнес циклите на страните не са синхронизирани и има асиметрични сътресения или различия в механизмите на предаване на общите сътресения между тях, то структурната конвергенция може да изглади това въздействие на синхронизираните вече икономики.

Например, страните сближаващи се по отношение на доходите на глава от населението имат тенденция са се сближават и по отношение на отрасловата си структура, а също и по отношение на секторната си производителност на труда (Wacziarg, 2004).

Изравняване на факторите на сравнителните предимства в модела на Хекшир-Олин също може да доведе до структурна конвергенция между страните и регионите.

В изследване на 14 европейски държави (Barrios, S., Barry, F. & Strobl, E., 2002) е доказано значението на конвергенцията в доходите на глава от населението и по отношение на икономическата структура. Изводите от това изследване са потвърдени и в друго проучване (Wacziarg, 2004).

Доказано влияние върху структурната конвергенция имат и фактори като географската близост и наличието на общи граници, както и размера на населението (Crespo& Fontoura, 2010).

Структурна конвергенция в Европейския съюз

Поради наличието на общи институции, политики, регулации и до известна степен ресурси, Европейският съюз предоставя подходяща рамка за емпиричен анализ на модела на растеж и структурна промяна. Чрез подходящ анализ може да се установи дали определени държави изостават и съответно какво е тяхното разпределение и натрупване на ресурси и демографското им развитие.

Емпиричните резултати потвърждават различията в развитието на страните, които по-късно са се присъединили към ЕС (Prados de la Escosura, 2007), а по-тесните търговски връзки могат да ускорят структурната конвергенция в страните с единна парична зона (Frankel & Rose, 1997). От друга страна високата търговска интензивност може да доведе до повишаване на специализацията и оттам до по-ниски равнища на структурна конвергенция (Krugman, 1993). Очакванията са приемането на единната валута от всички страни-членки да даде допълнителен стимул за извършване на структурни реформи, които да компенсират загубите от паричната политика и да послужат като инструмент за стабилизиране (Buti & Turrini, 2015).

Доказано е, че нивото на конвергенция се различава в зависимост от икономическото развитие на страните. Двигател на структурната конвергенция са междусекторните структурни изменения, тъй като съотношението на трите основни сектора става все по-еднакво във времето поради процесите на индустриализация и развитието на третичния сектор (Höhenberger & Schmiedeberg, 2008).

При изследване на междуотрасловото равнище на конвергенцията може да се получат доста разнопосочни резултати, тъй като отраслите, формиращи даден сектор като цяло могат да се развиват в различни посоки. При едни от тях може да има икономии от мащаба, докато при други да са високи производствените и трудовите разходи. И съответно тези разнопосочни тенденции в тяхното развитие се неутрализират взаимно, когато анализът е на секторно равнище.

Заключение

Структурната конвергенция е сложно понятие и явление. В резултат на това дефинициите за нея не са напълно строги и точни, а обхващат широк спектър от условия, които се наблюдават и следва да бъдат постигнати от структурно сближаващите се икономики. Този списък от условия може постоянно да се допълва на база на установените тенденции в развитието и сближаването на икономиките. Структурна конвергенция в абсолютна форма не е постигната, но се смята, че тя има положителна връзка с икономическия растеж все по-често се изследва нейната степен, тъй като се смята, че страни, които съумеят да увеличат сближаването на своята икономическа структура към тази на ЕС, могат да се надяват на консолидиране на стратегическата си позиция, ще имат повече възможности за бъдещо развитие, а също и за избягване на асиметрични сътресения в него. Всичко това води до формирането на следните тенденции в научните изследвания по въпроса:

1) Макар и нова, концепцията за структурната конвергенция е сравнително добре аргументирана от теоретична гледна точка, с множество изследвания в тази посока, а също и с немалко емпирични изследвания на проблема. На база на тях се изграждат и множество политики, а също и се отчита напредъка в тази посока с редица примери за отделните икономики.

2) Емпиричната литература по въпроса се фокусира повече върху номиналната или реалната конвергенция, тъй като условията за нея са точни и е по-лесна за измерване. Освен това в случая на Европейския съюз се налагат само номинални критерии за конвергенция. Въпреки това, много автори се обединяват около идеята, че за присъединяването към Европейския валутен съюз особено важни са структурната и реалната, а не само номиналната конвергенция.

3) В научната литература доста често се препоръчва икономическите структури и различията между тях да са отправна точка за нализ и развитие на теориите за икономическото развитие. Основната причина за това е, че страните,

които са в различни етапи от своето развитие в повечето случаи имат различия в икономическите структури поради ресурсната обезпеченост.

След като обобщихме значението и последиците от структурната конвергенция, се вижда важността на този проблем за бъдещето на страните-членки на ЕС. Интегрирането на страните в ЕС спомага за структурната конвергенция до известна степен, но също така интеграцията не може да се задълбочи, ако конвергенцията също не напредне.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Abegaz, B. (2002). Structural Convergence in Manufacturing Industries between Leaders and Latecomers, Journal of Development Studies, 38(4), 69-99.
2. Barrios, S., Barry, F. & Strobl, E. (2002). FDI and Structural Convergence in the EU Periphery. Mimeo, University College Dublin, p. 150-162.
3. Beck, K. (2014). Structural Similarity as a Determinant of Business Cycle Synchronization in the European Union: A Robust Analysis. Research in Economics and Business: Central and Eastern Europe, 5(2), 31-54.
4. Berardino, Di, C., Mauro, G., Quaglione, D., & Sarra, A. (2017). Structural change and the sustainability of regional convergence: Evidence from the Italian regions. Environment and Planning C: Politics and Space, 35(2), 289-311.
5. Branson, W. H., Guerrero, I., & Gunter, B. G. (1998). Patterns of Development.
6. Brixiova, Z., M. Morgan & A. Wörgötter (2009). Estonia and Euro Adoption: Small Country Challenges of Joining EMU, OECD Economics Department Working Papers, No. 728, OECD. Retrieved from http://dx.doi.org/10.1787/220860037027.
7. Brülhart, M. (1998). Economic geography, industry location and trade: the evidence. The World Economy, 21(6), p. 775-801.
8. Buti, M. & Turrini, A. (2015). Three waves of convergence. Can Eurozone countries start growing together again?, VOX, CEPR's Policy Portal. Retreived from: http://voxeu.org, 17 April 2015.
9. Chenery, H.B. (1960). Patterns of Industrial Growth, American Economic Review, 50(4), 624-654.
10. Chenery, H. (1982). Industrialization and Growth, the Experience of Large Countries, World Bank Staff Working Papers, Number 539.
11. Chong, C. Y., Habibullah, M. S., Baharumshah, A. Z., & Midi, H. (2017). Structural Convergence Among ASEAN Economies. Advanced Science Letters, 23(9), p. 8747-8751.
12. Crespo, N., & Fontoura, M. P. (2010). Determinant factors of structural similarity at the regional level: evidence from Portugal. Applied Econometrics and International Development, 10 (1), 81-93.
13. Cuadrado-Roura, J. R., García-Greciano, B., & Raymond, J. L. (1999). Regional convergence in productivity and productive structure: The Spanish case. International Regional Science Review, 22(1), 35-53.
14. Fagerberg, J. (2000). Technological progress, structural change and productivity growth: a comparative study. Structural Change and Economic Dynamics, 11, p. 393-411.

15. Fertő, I. (2016). Structural transformation in Central and Eastern European countries' agriculture: Convergence or Divergence?. ADVANCES IN ECONOMICS AND BUSINESS, 4(10), p. 547-552.
16. Frankel, J. A. & Rose, A. K. (1997). Economic Structure and the Decision to Adopt a Common Currency. Stockholm University, Institute for International Economic Studies, Seminar Papers 611.
17. Guerrieri, G. & S. Iammarino (2003). The Dynamics of Export Specialisation in the Regions of the Italian Mezzogiorno: Persistence and Change. SPRU Electronic Working Papers No. 105.
18. Gugler, K. & M. Pfaffermayr (2004). Convergence in Structure and Productivity in European Manufacturing?. German Economic Review, 5, p. 61-79.
19. Höhenberger N. & Schmiedeberg, C. (2008). Structural Convergence of European Countries, center for European. Governance and economic development research, discussion papers. No. 75, July. CeGE Discussion Paper, Retreived from: https://www.econstor.eu/handle/10419/32002
20. Imbs, J. Wacziarg R. (2003). Stages of Diversification, American Economic Review, 93 3(1), p. 63-86.
21. Juncker, J. C., Tusk, D., Dijsselbloem, J., Draghi, M.. & Schulz, M. (2015). Completing Europe's economic and monetary union. Retrieved from: https://ec.europa.eu/commission/sites/beta-political/files/5-presidentsreport_en.pdf
22. Knill, C. (2005). Introduction: Cross-national policy convergence: concepts, approaches and explanatory factors. Journal of European public policy, 12(5), p. 764-774.
23. Krugman, P. (1993). Lessons of Massachusetts for EMU. In Torres, F., Giavazzi, F. (Eds.). Adjustment and Growth in the European Monetary Union (pp. 241–261). Cambridge University Press.
24. Kuznets, S. (1956). Quantitative Aspects of the Economic Growth of Nations: I. Levels and Variability of Rates of Growth. Economic Development and Cultural Change. 5 (1), p. 5–94.
25. Landesmann, M. (2000). Structural change in the Transition Economies 1989-1999, Economic Survey of Europe, 2.
26. Marelli, E., Signorelli, M. & Tyrowicz, J. (2012). Crises and Joint Employment-Productivity Dynamics: A Comparative Perspective for European Countries., Comparative Economic Studies, 54(2), p. 361-394.
27. Palan, N., & Schmiedeberg, C. (2010). Structural convergence of European countries. Structural Change and Economic Dynamics, 21(2), p. 85-100.
28. Prados de la Escosura, L. P. (2007). European patterns of development in historical perspective. Scandinavian Economic History Review, 55(3), p. 187-221.
29. Sassi, M. (2007, April). Structural change and economic convergence across the Eu-15 regions: can the agricultural sector play a role. In Agricultural Economics Society' s 81st Annual Conference, University of Reading, UK, 2nd to 4th.
30. Scharpf, F. W. (2016). Forced Structural Convergence in the Eurozone–Or a Differentiated European Monetary Community.
31. Wacziarg, R. (2004). Structural convergence. Manuscript, Stanford University, CDDRL Working Paper No 8. Retrieved from http://cddrl.fsi.stanford.edu/.

IMPROVING DEVELOPER SKILLS BY USING THE APPROPRIATE DESIGN PATTERNS

Chief Assist. Prof. Mariya Armyanova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *The continuous technology change and software requirements forces developers to look for opportunities to quickly learn new technologies and familiar learn themselves with the features of the new software products. A possible solution are design patterns. Therefore, they are widely applied in software development to various fields and technologies. Finding the right pattern for given situation is difficult and important. Applying inappropriate patterns or not taking into account their limitations and shortcomings can introduce new problems and bugs into the software. Therefore, it is important to find a balance in their use.*

Keywords*: Design Patterns; GoF; Anti-Patterns*

JEL code: *C88*

ПОДОБРЯВАНЕ НА УМЕНИЯТА НА РАЗРАБОТЧИЦИТЕ ЧРЕЗ ИЗПОЛЗВАНЕ НА ПОДХОДЯЩИТЕ ШАБЛОНИ ЗА ПРОЕКТИРАНЕ

Гл. ас. д-р Мария Армянова
Икономически университет – Варна, България

В съвременния конкурентен и динамичен свят бизнесът изисква качествени софтуерни системи, които отразяват текущите му нужди и лесно се адаптират към изискванията на световния пазар. Разработването, поддържането и развитието на софтуерните системи е трудоемък процес, изискващ значителни умения и практически опит. При новите области в информационните технологии, като мобилните приложения има допълнителни предизвикателства (Petrov et.al., 2021). Непрекъснатото развитие на информационните технологии, също затруднява разработката, поради необходимостта разработчиците да ги познават и прилагат. Процесът допълнително се усложнява, ако системата трябва да позволява бъдещи промени или елементите ѝ да се използват многократно. Трудността за разработчиците много често е следствие от непознаването на предметната област и неразбирането на изискванията на възложителите. Всяка област има специфични проблеми, например дигитализацията на строителния сектор, изисква съобразяване със законодателството (Parusheva et.al., 2021), а в банковия сектор се спазва GDPR регламент (Vasilev et.al., 2021). Проблем е и откриването на компоненти, на които да се декомпозира системата, и на най-подходящите технологии за реализацията и взаимодействието им. Проектът на системата трябва да е специфичен и да описва характеристиките на решавания проблем и същевременно трябва да е достатъчно обобщаващ, за да може да се свърже с бъдещи проблеми и изисквания. Едно от основните изисквания към софтуера е да се разработи така, че да позволява лесна и евтина бъдеща преработка, но и същевременно да минимизира необходимостта от промени.

За начинаещите разработчици е трудно да се ориентират сред многото възможности за решение. Експертите, от своя страна, не започват всеки път от откриването на индивидуално решение за съответната предметна област, а използват предишни разработки за подобни проблеми. Веднъж намерили полезно решение, разработчиците многократно използват негови варианти в различни системи. Възможна насока за преодоляване на тези трудности е базирането на предишни разработки. Поради тази причина в много системи се откриват повтарящи се решения на подобни проблеми, които могат да се оформят като шаблони. Те решават специфични проблеми на разработката и осигуряват по-голяма гъвкавост на софтуера и многократното му използване. Целта е веднъж намерено, доказалото се като успешно, решение да послужи за основа на нова разработка.

От гледна точка на разработката на софтуер (Sourcemaking, 2022) под шаблон се разбира документ, описващ общо решение за даден проектен проблем, което може да се прилага неведнъж в много проекти. Разработчиците адаптират решението от шаблона според спецификите на конкретния проект. Шаблонът е документирано, абстрактно решение на повтарящ се проектен проблем, свързан с разработването на софтуер, в определен контекст, доказало своята полезност в практиката. То е насока, която може да е под различна форма, както твърдят Чембърс и Харисън (Chambers, 2000, с. 277-289).

Шаблоните за проектиране възникват, като група от добри практики за често срещани проблеми при проектиране, с които се сблъскват софтуерните инженери, които са използвали обектно-ориентираната технология в разработката на софтуер. Основната употреба на шаблоните за проектиране е да облекчат сложността на създаването и интегрирането на обекти. Идеята при възникването им е, че след като начинаещият специалист овладеете тези ключови особености и може да ги прилага в софтуерни проекти, той ще навлезе в обектно-ориентираната технология. Тази идея на шаблоните се пренася и за всички съвременни технологии. Новите групи шаблони възникват, за да позволят на начинаещите специалисти да приложат опита на експертите в области като облачните технологии, IoT (Internet of Thing) или изкуствения интелект.

Шаблоните за проектиране първо са събрани в една книга от група от четири автори, които са добре известни като Gang of Four (GOF). През 1994 г. те са написали книгата „Design Patterns — Elements of Reusable Object-Oriented Software“, която се счита за точка на еволюция на 23-те шаблона за проектиране (Gamma et.al., 1994). Съгласно GOF шаблоните за проектиране се дефинират според принципите на обектно-ориентираното програмиране.

Шаблоните за проектиране подобряват уменията на разработчиците, защото когато те се изправят пред проблем по време на разработката, могат да потърсят подходящ шаблон за проектиране. Шаблоните предоставят добра алтернатива, тъй като те са безрискови, добре проучени и доказали се като надежден начин за решаване на такъв проблем. Освен това целта на всеки шаблон е да предложи проектно решение, което да позволи лесно развитие на системата. Те са добре описани и известни, така че включването им в проекта, добавя яснота и в документацията. Затова използването им подобрява и поддържа използваемостта и читаемостта на решението.

Шаблоните за проектиране не се ограничават до решаване на конкретен програмен проблем или опростяване на дадено софтуерно решение, а те са създадени на етап проектиране и влияят на приложението като цяло. Голяма част от шаблоните влияят върху структурата на приложението или цялостната архитектура.

Шаблоните за проектиране се базират на основните принципи на технологиите. Затова внасят редица предимства във всеки софтуерен проект. Те правят проекта по-гъвкав, кода по-кратък и не се нуждаят от пълно документиране, достатъчно е в проекта да се впише, че се използват.

Таблица 1

Предимства от използването на шаблоните

Решаване на методологични проблеми при изграждане на софтуерни системи	**Поддържане на технологии, техники и подходи на разработка**	**Типизация и повторно използване**
- подобряват дейностите на етапите от жизнения цикъл на системата -улесняват, ускоряват и подобряват разработката -повишават продуктивността -улесняват декомпозицията -подобряват проектирането -документацията се разработва по-лесно и по-бързо - увеличават гъвкавостта на системите -улесняват съпровождането на системите -притежават възможностите на средство за разработка *-подобряват качествата на продукта* *-спомага за подобряване на екипа* -общо известна терминология - подобрява общуването - подобряват знанията и уменията на начинаещите разработчици - представянето на нови технологии, доказва полезността им на разработчиците	*-обектно-ориентирания подход* -поддържат обектно-ориентираните концепции – декомпозиция, наследяване, полиморфизъм -откриването на подходящи обекти -прецизно определяне на обектите -определяне на интерфейса на обектите -изпълнението на обектите *- сигурността* *-бази от данни* *- многонишковата обработка* - синхронизират и координират различни процеси - модели на многонишкова архитектура *- облачни технологии* - модели на архитектура на облачно приложение - прилагане на специфичните възможности на облачните доставчици *- изкуствения интелект*	-прилагане на натрупания до момента опит -абстракцията на вече разработените приложения -улесняват повторната употреба на полезните проекти и архитектури -гъвкаво повторно използване -лесното идентифициране на неявните абстракции -механизъм за повторна употреба - използват се в библиотеки

В различни литературни източници са посочени различни предимства на шаблоните. Например според Фаулър (Fowler et. al., 2002) едни от най-трудните аспекти на процеса са „разбирането и промяната на съществуващия код, без въвеждане на нови дефекти или нежелани последствия“. Описанието на шаблоните съдържа възможните последици от прилагането им при промяна в контекста. Затова използването им позволява системите да се създадат така, че да се улесни бъдещото им развитие. От Бруслер (Brössler, 2000) е проведен експеримент, който доказва, че шаблоните улесняват и намаляват времето за извършването на девет типа задачи по поддръжката на софтуера в сравнение с други опростени варианти. Откритите при проучването на литературните източници предимства са обобщени в таблица 1. При това те са систематизирани в три категории. Първо шаблоните решават методологични проблеми на изграждането на информационни системи. Втората категория предимства на шаблоните са свързани с поддържане на технологиите и подходите за разработка – например обектноориентирания подход, облачната технология или IoT. Третата категория предимства на шаблоните е типизацията и повторното използване на полезни решения. Шаблоните позволяват да се приложи опита и знанията на разработчици, заложени в тях. Те могат да се използват, като механизъм за повторна употреба на доказано полезните решения.

От изброените предимства на шаблоните може да се направи изводът, че те улесняват повторната употреба на полезните проекти и архитектури. Представянето на доказали се техники с шаблони ги прави достъпни за разработчиците на нови системи. Те дават възможност на разработчика да избира между няколко възможности. Подобряват документацията и улесняват поддръжката на съществуващите системи. Позволяват по-бързото откриване на подходящите за софтуера функционални възможности и начините за реализацията им.

Като всяко средство, целящо подобряването на разработката на софтуерни системи, и прилагането на шаблоните освен предимства има и недостатъци. Шаблоните за проектиране не са универсално решение за всеки проблем. Те не могат да се прилагат навсякъде и възможно най-много. Подобен начин на работа е характерен за начинаещите разработчици, но вместо ползи той въвежда редица недостатъци в проекта.

При документирането на шаблоните са описани, както принципа им, областта на приложението им и предимствата им, така и взаимодействието им с други шаблони, а също и правилния контекст за използването им.

Отговорността за избора на подходящ шаблон е на проектанта или програмиста, който се е сблъскал с конкретен проблем на разработването на софтуер. Шаблоните се срещат в много различни варианти и е необходимо да се избере нужния за всеки конкретен проблем, според контекста. Например ако за подходящ се избере шаблонът Наблюдател (Gamma et.al., 1994), трябва внимателно да се анализира контекстът на проблема, за да се открие оптималният вариант на шаблона за него. В един от вариантите наблюдаваният обект пази референции към наблюдателите си, а в друг създава асоциативен списък за съхранение на връзките си с тях.

Въпреки значителни предимства на шаблоните за проектиране, има и отрицателни странични ефекти, когато не се използват правилно. Например използването на шаблони за проектиране може да доведе до възникване на проблеми с проекта. Добрият софтуерен проекта има „висока кохезия и ниско свързване“. Възниква въпросът за автономността на класовете в проект, използващ шаблони за проектиране. Мохамед (Mohammed et.al, 2016) провежда емпирично проучване, за да установи дали използването на шаблони за проектиране увеличава независимостта на класовете. Експериментът му е направен чрез анализиране на 5 Java проекта с отворен код и сравнение с използването на 17 шаблона за проектиране. Оказва се, че класовете, използващи шаблони за проектиране, са по-силно свързани в сравнение с класовете, които не използват шаблоните за проектиране. Но това само по себе си не означава, че решенията с използването на шаблони за проектиране не постигат други цели в проектите.

Основният проблем на шаблоните за проектиране обаче е неправилното им използване. Разработчиците имат склонност да изучават и разбират шаблоните на проектиране, без да разпознават и научават условията за успешното им прилагане. Ако се приложили шаблон като решение в контекст, което не отговаря на използването му, тогава се създава още един проблем, вместо да се решава първоначалния. Освен това, когато шаблоните са неправилно приложени, те ще повлияят негативно на преносимостта, разширяемостта и гъвкавостта на проекта.

Друг недостатък е свързан с абстрактността на шаблона. Многократното използване на дадено софтуерно решение се постига с обобщаването и капсулирането му, което води до намаляване на ефективността на решението в частния случай и увеличаване на сложността му. Шаблоните представят общия случай, който обаче трябва да се сведе до нуждите на конкретната система. Тъй като те предлагат по-общ поглед върху модела, е възможно да не отразяват комплексната сложност на проблемите, характерни за разработвания проект. Използването на шаблона се затруднява, когато не е ясно дали моделът на елемента от разработваната система има съществени различия от този, предложен от шаблона.

Шаблоните за проектиране имат за цел да стандартизират най-добра практика за общ проблем. И все пак общите проблеми не са еднакви, затова използването на шаблона може да доведе до увеличаване на сложността на кода или дублиране на кода. Когато използването му се сравни с друго решение на проблема по абстрактен начин, който не е дефиниран от шаблона, може да се окаже, че използването на шаблона е по-малко ефективно. Но често алтернативното решение е по-ненадеждно, защото все още не е доказало своята ефективност и не са открити всички проблеми, свързани с използването му.

Основен проблем е и голямата прилика между шаблоните за проектиране. Освен това проблемът се задълбочава от липсата на единен и удобен каталог за класификация и описание на шаблоните. Този проблем е дефиниран още от Езерскис (Ezerskis & Simutis, 2005). Най-често срещаната форма за представяне на шаблон е текстово описание или html формат с препратки и примери (Refactoring guru, 2022). От друга страна считаме, че понякога създателите на шаблони не успяват да постигнат и двете противоречащи си техни ограничения – универсална употреба и лесно разбиране и прилагане. Освен това не съществуват автоматизирани инструменти за разработка, които да генерират цялостна система директно от шаблон, а могат да се генерират само отделни компоненти. Нужно е разработчиците сами да се погрижат за интегрирането и документирането на решението от шаблона, тъй като той не е готова система, а само абстрактен модел на елемент от нея.

Можем да направим извод, че шаблоните са доказано и правилно решение, но само ако се прилагат в подходящия контекст за проблема на проекта. В таблица

2 са систематизирани авторовите разсъжденията за предимствата и недостатъците на шаблоните и за начините за решаването им.

Съпоставяйки някои предимства и недостатъци на шаблоните от таблица 2, можем да направим извода, че всяко предимство на шаблоните може да се окаже и недостатък в определен контекст, но ако се подходи правилно, проблемите са разрешими и затова прилагането на шаблоните очакваме да подобри уменията на разработчиците.

Таблица 2

Предимства и проблеми при използването на шаблоните

Предимства	**Проблеми**	**Решения**
По-лесна разработка, като не се налага да се откриват общоизвестни конструкции и решения;	Обобщаването на решението намалява ефективността му в частния случай и увеличава сложността му;	Използване на шаблона в подходящия контекст;
Подобряват технологичните (обектно-ориентираните, облачните) умения на разработчиците;	Не са достатъчни, като инструмент за обучение на начинаещи специалисти;	Трябва първо да се познават методологиите и технологиите и тогава да се използват шаблоните;
Реализациите им се включват в библиотеки и езици;	Големият обхват на библиотеките води до трудното им опознаване, изучаване и използване;	Необходима е класификация на шаблоните, която да позволи лесното им откриване;
Подобряват общуването в екипа чрез разширяване на професионалния речник;	Няма създаден подходящ и удобен каталог за класификация и описание на шаблоните;	Познаване на шаблоните, отнасящи се до разработваното приложение;
Софтуерът става по-качествен и лесен за поддръжка и развитие, тъй като шаблонът е практически проверен и са отстранени откритите проблеми.	Увеличават работата на разработчиците, които се нуждаят от време за откриването им.	Проектът се разработва непредубедено, без предварителни нагласи и готови решения, за да се открият по-ефективните и качествените.

Обаче няма опростено правило или формула за откриване на подходящия шаблон за всеки отделен случай. Затова все още няма създадени автоматични системи, които да разработват проекти на софтуерните системи.

Разработчиците в процеса на работа придобиват повече опит и започват да откриват ситуации, в които шаблонът е полезен. Те установяват начина, по който да приложат шаблона, като конкретизират абстракцията, съдържаща се в шаблона, в код на подходящ език.

Шаблоните за проектиране сами по себе си не се провалят. Те са добро решение. Но проблемите обикновено идват от липсата на опит на разработчика, който има задачата да разработи проект, който включва не само един шаблон. При това разработчикът трябва да прецени възможностите и начина, по който подходящите шаблони за решаването на проблемите на проекта могат да си взаимодействат. Неправилното взаимодействие на шаблоните може да доведе до нови проблеми или грешки или кодът да стане ненужно сложен или неясен. Понякога проблемите и грешките идват и когато неопитният разработчик иска да използва всички шаблони за проектиране, които са подходящи за откритите в проекта проблеми.

По подобие на шаблоните за проектиране, които описват добрите практики, са дефинирани анти-шаблоните, които описват често срещаните проблемни практики. Анти-шаблоните са неадекватно решение на повтарящ се софтуерен проблем или са порочна практика. За да бъде класифицирана лошата практика, като анти-шаблон, тя трябва да бъде наблюдавана поне три пъти (Neill & Laplante, 2006). Следователно това е решение, което е преоткрито по грешен начин в отговор на повтарящия се проблем. Анти-шаблонът е често използвана структура, която генерира лоши последствия, дори ако първоначално е изглеждала ефективна.

За дефинирането на анти-шаблоните голям принос има Браун. Той дефинира „Анти-шаблонът като описание на често срещано решение на проблем, което генерира определено негативни последици“ (Brown et al., 1998). Анти-шаблоните могат да бъдат въведени в проекта от мениджъри или разработчици и са отрицателна практика в разработката или управлението на проекта. Анти-шаблоните могат да са резултат от липсата на достатъчно знания или опит за решаване на конкретен проблем, но може да се появят и като резултат от опит за прилагане на шаблон за проектиране, поради неразбирането му или прилагането му в грешен контекст (Brown et al., 1998).

Разработчиците трябва да познават и избягват да използват анти-шаблоните, за да подобрят уменията си. Програмистите често използват анти-шаблоните, защото са прости, бързи или дори изглеждат работещи, но често причиняват повече проблеми, отколкото решават. Те са много изкушаващи, защото са лесно и интуитивно решение, което решава веднага и без много усилия даден проблем. Но създава много други в проекта.

За анти-шаблоните също няма общ каталог, но редица автори са събрали каталози на често използваните шаблони. Има каталог на анти-шаблоните за Java (Bradbury and Jalbert, 2009), за C# (Kralj, 2022), а също за Микросървис архитектурата (Esas, 2021) или шаблоните, свързани с управлението на проекти (Aydinli, 2015). Има създаден сайт, който да събира анти-шаблоните (Brown et. al., 2022), а учени, като Jaafar разработват различни методи за откриване на порочни практики в различни софтуерни системи.

Шаблоните за проектиране не са непременно най-доброто решение, разработчиците трябва да открият ефективен начин да ги използват и съчетаят с останалите компоненти на проекта или да потърсят алтернативни решения и да ги сравняват с шаблоните за проектиране. Независимо от това, в редица случаи шаблоните внасят редица предимства в проекта. Затова владеенето на шаблоните за проектиране, познаването на различните видове и техните особености, може да подобри уменията на разработчиците. По същия начин познаването на порочните практики, описани от анти-шаблоните, позволява на разработчиците да ги избягват и да търсят по-ефективно и надеждно решение.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Aydinli, D. (2015). *"Software project management anti-patterns in innovation projects"*, M.Sc. thesis, 68 pages, [Онлайн] Available at: https://core.ac.uk/download/pdf/250138426.pdf (09.09.22)
2. Bradbury, J., Jalbert, K. (2009). *"Defining a Catalog of Programming Anti-Patterns for Concurrent Java",* [Онлайн] Available at: https://www.sqrlab.ca/papers/SPAQu09.pdf (09.09.22)
3. Brössler, P. & Prechelt, L. & Tichy, W. F. & Unger, B. & Votta, L. G. (2000). "A Controlled Experiment in Maintenance Comparing Design Patterns to Simpler Solutions", *IEEE Transactions on Software Engineering*.
4. Brown, W.J., Malveau, R.C., Brown, W.H., McCormick III, H.W., Mowbray, T.J. (1998). *"Anti Patterns: Refactoring Software, Architectures, and Projects in Crisis"*, 1st edn. John Wiley and Sons.
5. Brown, W. et. al. (2022). *"AntiPatterns"* [Онлайн] Available at: http://antipatterns.com (09.09.22)
6. Chambers, C. & Harrison, B. & Vlissides, J. (2000). "A debate on language and tool support for design patterns", *the 27th Conference of Principles of Programming Languages*, ACM press, pp. 277-289.
7. Esas, Ö. (2021). "*Design Patterns and Anti-Patterns in Microservices Architecture: A Classification Proposal and Study on Open Source Projects*", [Онлайн] Available at: https://www.politesi.polimi.it/bitstream/10589/186745/3/2022_04_ESAS.pdf (9.09.22)
8. Ezerskis, D. & Simutis, R. (2005). "Using Design Patterns for design and programming of complex automation control algorithms", ISSN 1392 – 124X *Information technology and control*, Vol.34, No.1.
9. Fowler, M. & Beck, K. & Brant, J. & Opdyke, W. & Roberts, D. (2002). *"Refactoring: Improving the Design of Existing Code"*. Addison-Wesley.
10. Gamma, E., Helm, R., Johnson, R., Vlissides, J. (1994). *„Design Patterns — Elements of Reusable Object-Oriented Software"*, Addison-Wesley.
11. Kralj, K. (2022). *"15 of the Worst C# Anti-Patterns Developers Keep Using (And How to Avoid Them)"* [Онлайн] Available at: https://methodpoet.com/worst-anti-patterns/ (09.09.22)
12. Mohammed, M. Elish, M. and Qusef, A., (2016). "Empirical insight into the context of design patterns: Modularity analysis", *7th International Conference on Computer Science and Information Technology (CSIT)*, pp. 1-6, doi: 10.1109/CSIT.2016.7549474.
13. Neill, C. & Laplante, P. (2006). "Paying down design debt with strategic refactoring," *Computer*, vol. 39, no. 12, pp. 131-134.
14. Parusheva, S., Aleksandrova, Y. (2021). " Innovations In The Construction Sector Through Legislation And Policies For Its Digitalization", *International scientific and practical conference "Construction entrepreneurship and real property"*, University of Economics - Varna, issue 1, pp. 82-88.
15. Petrov, P. , Ivanov, S., Dimitrov, P. (2021). "Projects Management in Technology Start-ups for Mobile Software Development", *International Journal of Interactive Mobile Technologies (iJI*M), Vol. 15, No. 07, 2021, pp. 194-199.

16. Refactoring guru, (2022). *“Design Patterns”*, [Онлайн] Available at: https://refactoring.guru/design-patterns/(31.08.22)
17. Sourcemaking, (2022). Design Patterns. [Онлайн] Available at: https://sourcemaking.com/design_patterns (23.07.2022)
18. Vasilev, J. (2021). “Banking Software Upgrade - Generating The Gdpr Declaration”, *Protection of the personal data and the digitalization - challenges and perspectives 2021*, issue 1, pp. 56-63.

ASSESSMENT OF FOREIGN DIRECT INVESTMENTS IMPACT OF THE INVESTMENT PROCESS OF EU CANCIDATE COUNTRIES

Konstantin Kapitanov, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *OLS regression models, classic panel regression models, partially adjusted panel regression models are developed on an experimental basis. Different results are compared.*

Keywords*:Foreign direct investment; Investment process; Panel regression; EU candidate countries*

JEL code: *F21, C3*

ОЦЕНКА НА ВЛИЯНИЕТО НА ПРЕКИТЕ ЧУЖДЕСТРАННИ ИНВЕСТИЦИИ ВЪРХУ ИНВЕСТИЦИОННИЯ ПРОЦЕС НА СТРАНИТЕ КАНДИДАТИ ЗА ЧЛЕНСТВО В ЕС

Д-р Константин Капитанов
Икономически университет – Варна, България

В средата на глобализация като главен инструмент на международната инвестиционна политика и световния инвестиционен процес се явяват преките чуждестранни инвестиции (ПЧИ). Те са мощен инструмент за развитие, както за страните които реализират изходящи потоци, така и за тези които се явяват инвестиционни реципиенти. Едновременно с доказано позитивното си икономическо въздействие, ПЧИ могат да бъдат и опасни особено в условия на развиващи се и трансформиращи икономики, които са уязвими. Именно такъв специфичен случай представляват страните кандидати за членство в ЕС.

Актуалността на проблема се свежда до необходимост от детайлен анализ на нетните потоци входящи и изходящи ПЧИ и техният икономически ефект върху вътрешните инвестиции.

Научна цел в емпиричен аспект на настоящия доклад е икономико – статистически анализ и иконометрично моделиране на влиянието на преките чуждестранни инвестиции върху вътрешните инвестиции.

Класическите теоретични постулати на Хаймър, Върнан, Алибер и Дънинг отчитат ПЧИ като носители на икономически растеж, но задължително засягат въпроса за позиционирането на инвестиционната активност при несъвършени пазари, конкурентна среда. Синтеза от основни класически теории свързани с международния инвестиционен процес и влиянието на ПЧИ в колаборация с резултати от съвременни изследвания разширява хоризонта в релацията: преки чуждестранни инвестиции – вътрешни инвестиции. Съвременните емпирични изследвания подкрепят тезата за детерминиращото влияние на ПЧИ върху вътрешните инвестиции. Изборът да се оцени влиянието на ПЧИ върху вътрешните инвестиции именно при страните – кандидати за членство в ЕС засяга проявлението на изследователския проблем в среда на специфични условия.

На база предварителен авторов подбор са включени избрани страни – кандидати за присъединяване към ЕС. Официално към 2022 г. държавите в процес на транспониране (включване) на законодателството на ЕС в националното си законодателство са: Албания, Северна Македония, Сърбия, Турция, Украйна, Черна гора. В изследването не е включена Турция. Основни причина за това са: сложната религиозно – политическа обстановка в страната, силно развитата икономика, което прави страната несъпоставима с останалите в групата. Към 2022 г. потенциалните кандидати за членство в ЕС са Босна и Херцеговина и Косово. Към страните – кандидати за присъединяване е включена Босна и Херцеговина. Едва през 2014 г. в Брюксел се парафира Споразумение за стабилизиране и асоцииране между ЕС и Косово, но страната е далеч от това да отговори на условията за членство и да приложи правилата и разпоредбите на Съюза. В изследването не е включена Украйна предвид военното положение в страната и подтикнатата спонтанна кандидатура. Към групата е включена Исландия предвид близкото сътрудничество и тесните връзки на страната с ЕС и членството на страната в Шенгенското пространство. Към 2022 г. кандидатурата на страната за членство в ЕС е официално замразена, не и прекратена, като се наблюдава засилен обществен отзвук в полза възобновяване на преговорите за членство в ЕС.

На база експеримент са разработени множествени регресионни модели. С цел прецезиране на основната закономерност по метода на включването се добавят допълнителни съществени фактори. Форматът на традиционния, балансиран панелен анализ е подходящ за прилагане на OLS регресия, класическа панелна регресия с фиксирани и случайни ефекти и специфичния частично аджустиран панелен регресионен модел с включена лагова променлива. Като основна хипотеза в настоящия доклад е, че експериментирането на различни иконометрични модели води до различни резултати и съответни изводи.

Използват се годишни данни за периода 1995 г. – 2013 г. Необходимо е да бъде поставено времево ограничение на изследването с основна цел обосновка на избрания изследователски период, която се уповава на някои основни моменти:

1. Изискванията за членство в ЕС заложени в Копенхагенските критерии от 1993 г. - стабилност на институции, функционираща пазарна икономика и др. представляват пресечната точка между единна европейска политика и икономическа рамка.

2. В доклад на Световната банка през 1995 г. страните от ЦИЕ показват първи признаци на икономическо съживяване след падане на комунизма. Премахването на югоембаргото през 1995 г. поставя край на изкуствената изолация на балканския икономически регион и води до напредък в интеграцията на страните в него към ЕС.

3. Основна цел е проследяване на устойчивост в изследваните икономически закономерности около основната връзка ПЧИ - вътрешни инвестиции без допълнителни условия които да водят до екстремуми които не са предмет на анализа.

В таблица 1 са изведени променливите включени в емпиричната разработка и техните източници.

Таблица 1

Дефиниции на променливите и техните източници

Променлива	Дефиниция	Дефиниция	Източник
DI	Domestic investment	Вътрешни инвестиции	World Economic Outlook database, 2014
RGDPG	Real GDP growth	Темп на растеж на реален БВП	World Economic Outlook database, 2014
Inflation	Annual inflation rate	Инфлация	World Economic Outlook database, 2014
Saving	Gross national saving	Брутно национално спестяване	World Economic Outlook database, 2014
M2	Money and quasi money (M2) as % of GDP	Пари и квази пари (M2) като процент от БВП	World Economic Outlook database, 2014
Openness	Merchandise trade as % of GDP	Стокообмен като % от БВП	World Development Indicators 2014
FDI inflows	Foreign direct investment inflows	Входящи потоци ПЧИ	UNCTAD`s World Investment Report 2014
FDI outflows	Foreign direct investment outflows	Изходящи потоци ПЧИ	UNCTAD`s World Investment Report 2014
FDI inflows % GDP	Foreign direct investment inflows % of GDP	Входящи ПЧИ като % от БВП	UNCTAD`s World Investment Report 2014
FDI outflows % GDP	Foreign direct investment outflows % of GDP	Изходящи ПЧИ като % от БВП	UNCTAD`s World Investment Report 2014
FDI inflows % of total world	Foreign direct investment inflows % of total world	Входящи ПЧИ като % от всички цял свят	UNCTAD`s World Investment Report 2014
FDI outflows % of total world	Foreign direct investment outflows % of total world	Изходящи ПЧИ като % от всички цял свят	UNCTAD`s World Investment Report 2014

Вътрешните инвестиции (DI) се явяват зависимата променлива в апробираните регресионни модели. Могат да бъдат счетени за макроикономически катализатор на добър инвестиционен климат, стабилна и сигурна конюнктурна среда, устойчив икономически растеж. От друга страна вътрешните инвестиции са следствие от макроикономически фактори пряко участващи в техния генезис: потоци входящи и изходящи ПЧИ като % от БВП (FDI outflows/GDP, FDI inflows/GDP); брутно национално спестяване (GNS); темпове на растеж на БВП (RGDPG); инфлация (Inflation); отвореност на икономиката (Openness); паричен агрегат М2 % от БВП (M2/GDP).

В своята същност OLS регресионният модел пренебрегва времевите измерения и индивидуалните характеристики на изследователските единици и се фокусира единствено върху зависимостта между тях. Моделът не допуска индивидуалните различия, като обединява заедно данните за отделните единици. Оценките от провеждане на OLS регресии по характер са близки до тези които може да се получат от обикновена линейна регресия.

Таблица 2

Резултати от OLS регресия

Факторни променливи	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Изходящи потоци ПЧИ/БВП P>[t]	**0.1435562** **0.046**	0.1191916 0.084	0.1025986 0.106	0.0884587 0.172	0.0682842 0.279
Входящи потоци ПЧИ/БВП P>[t]	0.0164413 0.756	-0.0041123 0.935	0.0411756 0.389	0.0516796 0.290	0.0750694 0.120
Брутно национално спестяване P>[t]	**0.2084418** **0.017**	0.1283449 0.135	0.0849512 0.285	0.0808093 0.309	0.1092925 0.161
Темп на растеж на реален БВП P>[t]		**0.5157589** **0.001**	**0.4894021** **0.001**	**0.4809955** **0.001**	0.5011819 0.000
Инфлация P>[t]			**-0.1641071** **0.000**	**-0.16887869** **0.000**	**-0.1301511** **0.01**
Отвореност P>[t]				**-0.0305849** **0.028**	-0.0060391 0.836
Паричен агрегат М2/БВП P>[t]					**0.0654114** **0.006**
Константа P>[t]	**18.51206** **0.000**	**18.06302** **0.000**	**19.74837** **0.000**	**21.91052** 0.000	**16.3445** 0.000
Брой наблюдения	114	114	114	114	114
R^2	0.0947	0.1837	0.3155	0.3227	0.3690
F	3.84	6.13	9.95	8.50	8.86

В табл. 2 са представени резултати от значимите OLS регресионни модели. При всички изведени модели не се открива значима връзка между входящите потоци ПЧИ и вътрешните инвестиции. Единствено при модел (1) се наблюдава слаба положителна връзка между изходящите ПЧИ и вътрешните инвестиции. Тези резултати са логични предвид изключително ниските нива на привлечени ПЧИ за периода спрямо социално – икономическата, политическа и пазарна специфика на страните. В изведените значими коефициенти от OLS регресионните модели изпъква влиянието на темпа на растеж на БВП и инфлацията. Коментарът в тази посока следва диаметралните ефекти на двата фактора върху вътрешните инвестиции. При модели (2) – (5) от проведения OLS регресионен анализ на страните-кандидати за членство в ЕС, темпът на растеж на БВП корелира пряко в положителна и стабилна връзка с вътрешните инвестиции. Негативното влияние на инфлацията върху вътрешните инвестиции описва в пълен аспект съвременната макроикономическа нестабилност. Дебалансирайки съотношението пари – блага, инфлацията влияе пряко върху съвкупното производство, предприемаческата активност и реализацията на вътрешни инвестиции.

Таблица 3

Резултати от класически панелни модели с фиксирани ефекти

Факторни променливи	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Изходящи потоци ПЧИ/БВП P>[t]	0.0662925 0.199	0.0359867 0.453	0.0378475 0.424	0.0451218 0.356	0.0365711 0.466
Входящи потоци ПЧИ/БВП P>[t]	-0.0147071 0.775	-0.0068568 0.885	0.010435 0.827	0.0032432 0.947	0.0101201 0.840
Брутно национално спестяване P>[t]	**0.1677732** **0.020**	0.0855582 0.212	0.0797944 0.239	0.0848967 0.215	0.1089654 0.148
Темп на растеж на реален БВП P>[t]		**0.4276132** **0.000**	**0.4166658** **0.000**	**0.4064277** **0.000**	**0.4261496** **0.000**
Инфлация P>[t]			-0.0523291 0.065	-0.0514106 0.071	-0.045294 0.125
Отвореност P>[t]				0.0256983 0.523	0.0004761 0.993
Паричен агрегат М2/БВП P>[t]					.0234806 0.434
Константа P>[t]	**0.6828945** **0.000**	**0.6835788** **0.000**	**0.6456845** **0.000**	**0.6466864** **0.000**	**0.6318549** **0.000**
Брой наблюдения	**4.713269** **0.015**	**4.308545** **0.016**	**5.531096** **0.004**	3.746957 0.265	4.292891 0.213
R^2	114	114	114	114	114
F	0.6181	0.6918	0.7034	0.6973	0.7020

Резултатите от панелния модел с фиксирани ефекти са видоизменени спрямо OLS оценките и категорично затвърждават изходящите ПЧИ като фактор с положително влияние върху вътрешните инвестиции. В тази връзка се оборва тезата, че за страните в преход входящите ПЧИ са носители на икономически растеж. Ръстът на БВП влияе положително върху вътрешното натрупване. Инфлацията логично представлява статистически значим негативен фактор при почти всички модели и тя е индикатор за макроикономическа нестабилност.

Предвид генезиса на ПЧИ и времето необходимо на отделните икономики за реакция от тяхното присъствие е необходимо да се извърши добра преценка дали класическия панелен регресионен подход е ефективен в достатъчна степен. Основните теории свързани с ПЧИ разглеждат времето като необходим фактор за абсорбция на чуждестранните капитали, насочването им в конкретни приоритетни направления и тяхното икономическо импортиране. Множество автори при изследване ефектите от потоците ПЧИ описват като необходимост включване на „времето“ като факторна променлива. Основната идейна формулировка за приложение на частично аджустирания модел е да се измери скоростта на агрегиране на вътрешните инвестиции като ендогенна променлива.

Таблица 4

Резултати от частично аджустиран панелен модел с фиксирани ефекти

Факторни променливи	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Изходящи потоци ПЧИ/БВП P>[t]	**0.1919469** **0.006**	**0.1619447** **0.018**	**0.1485766** **0.021**	**0.1533522** **0.022**	0.1072002 0.111
Входящи потоци ПЧИ/БВП P>[t]	-0.025536 0.720	-0.0177427 0.796	0.028965 0.661	0.024371 0.721	0.0511108 0.448
Брутно национално спестяване P>[t]	0.0805222 0.413	-0.0012959 0.989	-0.0037728 0.968	-0.0005836 0.995	0.1082995 0.285
Темп на растеж на реален БВП P>[t]		**0.425097** **0.003**	**0.3968876** **0.003**	**0.3903017** **0.005**	**0.4743479** **0.001**
Инфлация P>[t]			**-0.1365816** **0.000**	**-0.1360764** **0.000**	**-0.102367** **0.009**
Отвореност P>[t]				0.0164816 0.767	-0.0881419 0.198
Паричен агрегат M2/БВП P>[t]					**0.0982226** **0.013**
Константа P>[t]	**20.46988** **0.000**	**20.08324** **0.000**	**20.99174** **0.000**	**19.86287** **0.000**	**20.60045** **0.000**
Брой наблюдения	114	114	114	114	114
R^2	0.0746	0.1570	0.2968	0.2856	0.3056
F	3.16	4.86	7.10	5.88	6.22

Факторни променливи	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Изходящи потоци ПЧИ/БВП P>[t]	**0.1919469** **0.006**	**0.1619447** **0.018**	**0.1485766** **0.021**	**0.1533522** **0.022**	0.1072002 0.111
Входящи потоци ПЧИ/БВП P>[t]	-0.025536 0.720	-0.0177427 0.796	0.028965 0.661	0.024371 0.721	0.0511108 0.448
Брутно национално спестяване P>[t]	0.0805222 0.413	-0.0012959 0.989	-0.0037728 0.968	-0.0005836 0.995	0.1082995 0.285
Темп на растеж на реален БВП P>[t]		**0.425097** **0.003**	**0.3968876** **0.003**	**0.3903017** **0.005**	**0.4743479** **0.001**
Инфлация P>[t]			**-0.1365816** **0.000**	**-0.1360764** **0.000**	**-0.102367** **0.009**
Отвореност P>[t]				0.0164816 0.767	-0.0881419 0.198
Паричен агрегат M2/БВП P>[t]					**0.0982226** **0.013**
Константа P>[t]	**20.46988** **0.000**	**20.08324** **0.000**	**20.99174** **0.000**	**19.86287** **0.000**	**20.60045** **0.000**
Брой наблюдения	114	114	114	114	114
R^2	0.0746	0.1570	0.2968	0.2856	0.3056
F	3.16	4.86	7.10	5.88	6.22

Получените резултати представени в табл. 4 потвърждават категорично правата връзка темп на растеж на БВП – вътрешни инвестиции. В дългосрочен план единствено при модел (1) се открива статистически значим корелационен коефициент на факторната променлива брутно национално спестяване. За разлика от останалите регресионни модели попаднали в експерименталния анализ при аджустирания модел в дългосрочен план не се разглежда негативната роля на инфлацията при страните – кандидати за членство в ЕС. Не се проявяват значими статистически коефициенти при факторни променливи: инфлация, икономическа отвореност и паричен агрегат М2. Основна разлика с класическата панелна регресия е, че не се открива връзка в дългосрочен план по линия потоци ПЧИ – вътрешни инвестиции.

Може да се обобщи, че в дългосрочен план върху вътрешните инвестиции съществено влияние при почти всички модели (2) – (5) оказва единствено темпът на растеж на БВП. Това е логичен резултат предвид преходния характер на икономиките. Темпът на растеж на БВП е пряк измерител на нивата на икономическа активност.

Икономическата теория разглежда ПЧИ като един от основните инструменти за развитие на икономиката, особено на по - малки страни и страни с по - ниска степен на икономическо развитие. В качеството си на основен двигател на международния инвестиционен процес, ПЧИ доказано от множество емпирични изследвания оказват влияние върху вътрешните инвестиции на отделните икономики. Различната степен на икономическо развитие заедно със социално – политически детерминанти са фактори които създават различна среда за проявление на връзката ПЧИ – вътрешни инвестиции.

Страните - кандидати за членство в ЕС се характеризират с недоразвит пазар, който трябва да се възползва ефективно от всички предприсъединителни финансови програми на ЕС. Това трябва да създаде необходимата среда за привличане на чуждестранни инвестиции и да се изградят политики за тяхното насочване в приоритетни сектори.

Различните иконометрични модели достигат до различни резултати като за най – ефективен може да бъде счетен частично аджустирания панелен модел в който се включва и времето като фактор. Получените резултати са устойчиви относно проявлението на корелационните зависимости между вътрешните инвестиции от една страна и преките чуждестранни инвестиции и други макроикономически фактори.

Общият извод е, че не всяка ПЧИ води непременно до увеличаване на брутното капиталообразуване. Необходимо е разработване на механизми за интеграция на различни по степен на развитие пазари, както и разработване на нови инструменти за инвестиране, неотчетени в ПЧИ.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Aliber, R. (1970). A Theory of Direct Foreign Investment. //The International Corporation, Cambridge, MA, MIT.
2. Dunning, J. (1977). Trade, Location of Economic Activity and the MNE: A Search for an Eclectic Approach. //The International Allocation of Economic Activity: Proceedings of a Nobel Symposium, London, Macmillan Press.
3. Gargov, V. i dr. (2010). Mezhdunaroden ikonomiks, Varna: Nauka i ikonomika.
4. Khan, M., Ross, K. (1977). The functional form of the aggregate import demand equation. Journal of International Economics.,Vol 7.
5. Kolev, K. (2012). Globalizatsiya, transnatsionalni korporatsii i regionalno razvitie. Varna: Steno.

6. Kojima, K. (1982). Macroeconomic versus international business approach to FDI. //Hitotsubashi Journal of Economics.
7. Marinov, G. (2014). Panelni edinichni koreni i kointegratsiya. Izdatelstvo „Ongal“, Varna.
8. Stoykov, I., Momchev, S. (2003). Mezhdunarodna investitsionna politika. Svishtov.
9. Unctad, World Investment Report, 1995 – 2013.
10. Vernon, R. (1966). International Investment and International Trade in the Product Cycle. //Quarterly Journal of Economics.
11. Vladimirov, V. i dr. (2005). Makroikonomika. Varna: Steno.
12. www.worldbank.org
13. www.imf.org
14. www.unctad.org
15. www.wto.org

PLANNING OF DELIVERY ROUTES USING THE LINEAR PROGRAMMING MODEL

PhD Student Julieta Mihaylova
University of Economics - Varna, Bulgaria

Abstract: *The distribution of goods is related to significant transport costs. Reducing them is essential for the success of every company. This paper proposes a model for minimizing the transport costs of a small company engaged in distribution activities. The model is based on the mixed integer linear programming problem. The optimal criteria is the minimum of the traveled kilometers. The solution of the model is a plan for using the vehicles by routes, objects and number of courses. The linear optimization leads to a fully deterministic solution.*

Keywords*: Goods Distribution; Linear Optimization; Transport Costs*

JEL code: *C61*

ИЗПОЛЗВАНЕ НА ЛИНЕЕН ОПТИМИЗАЦИОНЕН МОДЕЛ ЗА ПЛАНИРАНЕ НА ДОСТАВКИ ПО МАРШРУТИ

Докторант Жулиета Михайлова
Икономически университет – Варна, България

Въведение

Икономиката изучава производството, разпределението, търговията и потреблението на стоки и услуги (Krugman & Wells, 2013). Процесите на разпределение и търговия са свързани с използване на транспорт. В някои случаи транспортните разходи могат да достигнат до 10% от крайната цена на продукта. Емпирично е установено, че увеличаването на транспортните разходи с 10% води до намаляване на обема на продажбите с 20% (Rodrigue, 2020).

Влиянието на транспортните разходи върху търговията обективно налага тяхното оптимизиране. Редица изследователи предлагат модели на мрежи от складове и крайни потребители, включително с възможност за споделяне на транспортните средства и маршрутите (Adelzadeh, Asl, & Koosha, 2014), (Brandão, 2020), (Yang & Wang, 2022). В някои случаи в мрежата се включват и производителите (Cintron, Ravindran, & Ventura, 2010). Използват се различни алгоритми за решаване на оптимизационната задача – както линейната оптимизация, така и вероятностни методи. Във всички цитирани случаи се забелязва привързване на модела към особеностите на реалната система. Налага се изводът, че към момента не съществува универсален, приложим навсякъде модел. Целесъобразно е за всяка конкретна ситуация, изхождайки от фундаменталните оптимизационни задачи да се разработва модел за конкретно приложение.

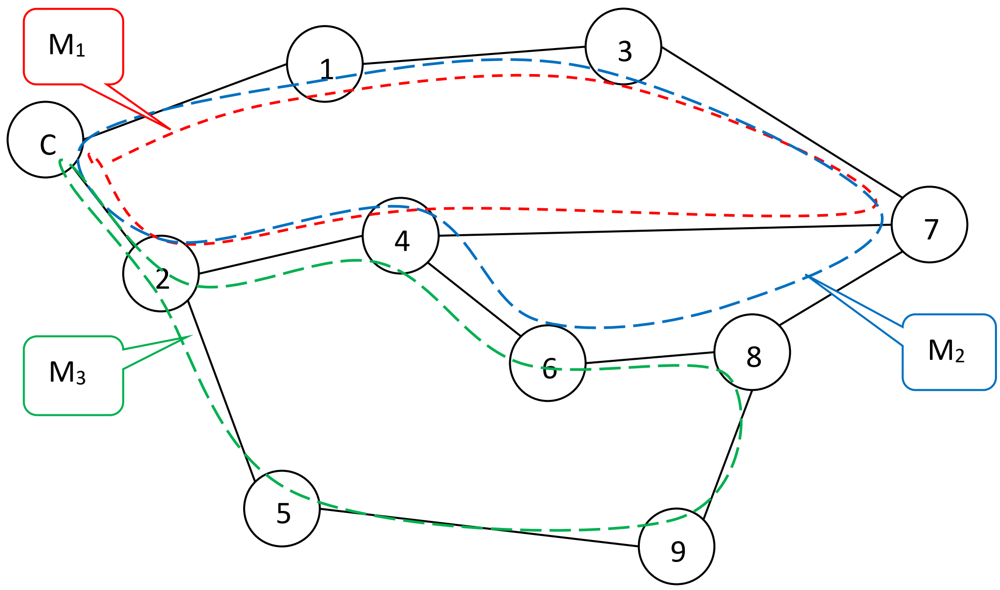
В настоящата разработка се предлага модел за оптимално използване на транспортни средства от малка дистрибуторска фирма, притежаваща един склад и снабдяваща голям брой обекти (клиенти). Доставките се извършват на база предварителни заявки, които се правят от клиентите до края на предходния работен ден. Транспортирането се извършва по няколко маршрута, като по всеки маршрут се обхождат различни клиенти. Възможно е един и същ клиент да бъде обслужен по повече от един маршрут. По всеки маршрут могат да се извършат няколко курса. Транспортните автомобили са еднотипни, с една и съща товароподемност и с всеки от тях могат да се извършват по няколко курса на ден.

Очевидна е необходимостта от ежедневно съставяне на план за доставките, който да бъде оптимален. Като критерий за ефективност е избрана минимизацията на сумата от дължината на всички изпълнени курсове (общия брой изминати километри за деня). Счетено е за целесъобразно използването на частично целочислена задача на линейното оптимиране, като част от целочислените променливи заемат стойности 0 или 1. Подобен модел, например, е описан от (Tang, 2004).

Формализиран модел:

Нека всеки от автомобилите на фирмата има товароподемност a тона. Броят на клиентите е n на брой търговски обекти. С автомобилите могат да се извършват по няколко курса на ден.

Разработени са p на брой маршрута за извършване на доставките, като един и същи търговски обект може да се обслужва от повече от един маршрут (фиг. 1).



Фиг. 1. Схематично изображение на склада (С), обектите и маршрутите
Източник: *Собствена разработка.*

Известна е дължината на всеки маршрут. Количествата на заявените за доставка стоки са различни за всеки ден. При изпълнението на ежедневните заявки, количествата стока за всеки обект са различни.

Необходимо е да се състави план за превоза, така че да се удовлетворят потребностите на търговските обекти, като сумарната дължина на изминатия път да бъде минимална.

Нека количеството на стоката, която трябва да бъде доставена до j -ия обект е равно на $\mathrm{b_j}$, $\mathrm{j} = \{1, 2, \dots, \mathrm{n}\}$. В зависимост от обема на доставките, по един и същи маршрут е възможно да се извършат няколко курса. Максималният брой на курсовете по един маршрут не може да надвишава:

$$d_k = \left\lceil \frac{\sum_{j \in M_k} b_j}{a} \right\rceil \text{, където} \qquad (1)$$

$\mathrm{M_k}$, $\mathrm{k} = \{1, 2, \dots, \mathrm{p}\}$ е множеството на търговските обекти, принадлежащи на k-тия маршрут .

Възможно е всички обекти да бъдат обслужени от курсове, минаващи само по един маршрут, т.е в математическия модел на задачата следва да се предвиди възможен брой курсове в съответствие с (1).

Въвежда се единна номерация на курсовете $\mathrm{i} = \{1, 2, \dots, \mathrm{m}\}$, като курсовете с номера от 1 до $\mathrm{d_1}$ минават по първия маршрут; курсовете с номера от $\mathrm{d_1} + 1$ до $\mathrm{d_1} + \mathrm{d_2}$ минават по втория маршрут и т.н.

С $\mathrm{x_{ij}}$ $(\mathrm{i} \in \{1, 2, \dots, \mathrm{m}\},\ \mathrm{j} \in \{1, 2, \dots, \mathrm{n}\})$ означаваме количеството стока, което ще се достави до j -тия обект с i -тия курс. В общия случай, не всички маршрути минават през всеки обект, затова съществуват индекси (i, j), които не се използват.

Въвеждат се следните групи ограничения:

Ограничение, касаещо невъзможността за надвишаване на капацитета на товарния автомобил:

1) $$\sum_{j \in M_k} x_{ij} \le a\,,\ i = \{1, 2, \dots, m\} \qquad (2)$$

Ограничение, изразяващо необходимостта от пълно задоволяване на потребностите на съответния търговски обект

2) $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,,\ j = \{1, 2, \dots, n\} \qquad (3)$$

Ако лявата част на някое ограничение от първата група е различна от нула, това означава, че курсът се изпълнява. Ако лявата част е равна на нула, курсът не се изпълнява и не се изминават километри. Необходимо е да се въведат допълнителни променливи, които да изразяват изпълнението или неизпълнението на курса. Удобно е те да бъдат бинарни (ако курсът се изпълнява, променливата е 1, а ако не се изпълнява – 0). Означаваме ги с $\mathrm{y_i}$ и за тях са в сила ограниченията:

3) $$\frac{1}{a} \sum_{j \in M_k} x_{ij} \le y_i \le 1,\ i = \{1, 2, \dots, m\}. \qquad (4)$$

От характера на задачата се налага ограничение, касаещо неотрицателността на променливите:

4) $0 \le x_{ij}\ ,\ i = \{1, 2, \dots, m\},\ j = \{1, 2, \dots, n\}.$ (5)

Целевата функция ще има вида:

$$\min : Z = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \quad \text{, където} \qquad (6)$$

c_i е дължината на маршрута, по който минава i -тия курс.

При този математически модел от формална гледна точка винаги съществуват алтернативни екстремуми, тъй като целевата функция има една и съща стойност при преномериране на курсовете в рамките на един и същ маршрут. От икономическа гледна точка, обаче, тези екстремуми не би трябвало да се разглеждат като алтернативни.

Числов пример:

Нека за схемата на фиг. 1 е дадено:

а) дължина на маршрут $M_1 = 24$, на $M_2 = 26$, на $M_3 = 27$.

б) обем на доставките по обекти:

Обект	1	2	3	4	5	6	7	8	0
Доставка	0,1	0,1	0,1	0,5	0,6	0,5	0,8	0,9	0,8

в) капацитет на товарния автомобил – 2,5 тона.

Решение:

По формула (1) се изчислява максимално възможният брой курсове по всеки маршрут:

$$d_1 = \left\lceil \frac{0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}8}{2{,}5} \right\rceil = \left\lceil \frac{1{,}6}{2{,}5} \right\rceil = 1$$

$$d_2 = \left\lceil \frac{0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}8 + 0{,}9}{2{,}5} \right\rceil = \left\lceil \frac{3}{2{,}5} \right\rceil = 2$$

$$d_3 = \left\lceil \frac{0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}6 + 0{,}5 + 0{,}9 + 0{,}8}{2{,}5} \right\rceil = \left\lceil \frac{3{,}4}{2{,}5} \right\rceil = 2$$

Целевата функция е

$$\min: Z = 24y_1 + 26y_2 + 26y_3 + 27y_4 + 27y_5$$

Системите от ограничения са:

1. Свързани с капацитета на товарния автомобил:

$$\begin{array}{lllllllllll}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & +x_{14} & & & +x_{17} & & & \le 2{,}5; \\
x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & +x_{24} & & +x_{26} & +x_{27} & +x_{28} & & \le 2{,}5; \\
x_{31} & +x_{32} & +x_{33} & +x_{34} & & +x_{36} & +x_{37} & +x_{38} & & \le 2{,}5; \\
 & x_{42} & & +x_{44} & +x_{45} & +x_{46} & & +x_{48} & +x_{49} & \le 2{,}5; \\
 & x_{52} & & +x_{54} & +x_{55} & +x_{56} & & +x_{48} & +x_{59} & \le 2{,}5.
\end{array}$$

2. Свързани с условието за пълно задоволяване потребностите на търговските обекти:

$$
\begin{aligned}
&x_{11} + x_{21} + x_{31} = 0{,}1;\\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 0{,}1;\\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} = 0{,}1;\\
&x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 0{,}5;\\
&+ x_{45} + x_{55} = 0{,}6;\\
&x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 0{,}5;\\
&x_{17} + x_{27} + x_{37} = 0{,}8;\\
&x_{28} + x_{38} + x_{48} + x_{58} = 0{,}9;\\
&x_{49} + x_{59} = 0{,}8.
\end{aligned}
$$

3. Свързани с извършване/неизвършване на курса:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2{,}5}(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{17}) \leq y_1 \leq 1;\\
&\frac{1}{2{,}5}(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{26} + x_{27} + x_{28}) \leq y_2 \leq 1;\\
&\frac{1}{2{,}5}(x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{36} + x_{37} + x_{38}) \leq y_3 \leq 1;\\
&\frac{1}{2{,}5}(x_{42} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{48} + x_{49}) \leq y_4 \leq 1;\\
&\frac{1}{2{,}5}(x_{52} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{48} + x_{59}) \leq y_5 \leq 1.
\end{aligned}
$$

4. Свързани с условието за неотрицателност и целочисленост:

$0 \leq x_{ij}$, $i = \{1, 2, \dots, m\}$, $j = \{1, 2, \dots, n\}$

$y_i \in N_0$, $i = \{1, 2, \dots, m\}$.

Решението е:

$x_{21} = 0{,}1$; $x_{22} = 0{,}1$; $x_{23} = 0{,}1$; $x_{24} = 0{,}5$; $x_{26} = 0{,}5$; $x_{27} = 0{,}8$

$x_{45} = 0{,}6$; $x_{48} = 0{,}9$; $x_{49} = 0{,}8$

Всички останали променливи $x_{ij} = 0$.

$y_1 = 0$; $y_2 = 1$; $y_3 = 0$; $y_4 = 1$; $y_5 = 0$

На един курс по маршрут 2 се натоварват доставките за обекти 1, 2, 3, 4, 6 и 7. Общото им количество е 2,1 тона.

На един курс по маршрут 4 се натоварват доставките за обекти 5, 8 и 9. Общото им количество е 2,3 тона.

Общото изминато разстояние за осигуряване на доставките е 53 км.

Изводи

Предлаганият модел е подходящ за оптимизиране на транспортните разходи при доставка на стоки от един източник (склад) до няколко приемника (търговски обекти). При промяна на структурата на системата моделът трябва да се модифицира.

Използването на апарата на линейното оптимиране гарантира достигането на оптимално решение или установяването, че такова не съществува. Решението на задачата е детерминирано.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Adelzadeh, M., Asl, V. M., & Koosha, M. (2014). A mathematical model and a solving procedure for multi-depot vehicle routing problem with fuzzy time window and heterogeneous vehicle. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology , 75,* 793-802.
2. Brandão, J. (2020). A memory-based iterated local search algorithm for the multi-depot open vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research , 284* (2), 559-571.
3. Cintron, A., Ravindran, A. R., & Ventura, J. A. (2010). Multi-criteria mathematical model for designing the distribution network of a consumer goods company. *Computers & Industrial Engineering , 58* (4).
4. Krugman, P., & Wells, R. (2013). *Ecionomics* (3rd Edition изд.). New York: Worth Publishers.
5. Rodrigue, J. P. (2020). *The Geography of Transport Systems.* London&NewYork: Routledge.
6. Tang, S. (2004). *Linear Optimization in Applications.* Hong Kong University Press.
7. Yang, T., & Wang, W. (2022). Logistics Network Distribution Optimization Based on Vehicle Sharing. *Sustainability , 14* (4).

USING THE BOX - JENKINS METHOD TO ASSESS THE DYNAMICS OF WHOLESALES IN A SMALL DISTRIBUTION COMPANY

PhD Student Julieta Mihaylova
University of Economics - Varna, Bulgaria

Abstract: *The amount of weekly sales of given goods by a distributor to retailers is a random variable.The purpose of the distributor is to control the inventory for satisfying the customers' needs. If there is a shortage of stock, the distributor realizes lost profits. If there is a surplus the distributor realizes losses. To maintain optimal inventory levels, it is necessary to analyze the demand. In this paper it is suggested that the consumption is considered as a dynamic series. It is appropriate to use the Box-Jenkins method.*

Keywords*: Box-Jenkins Method; Goods Distribution; Time Series Analysis*

JEL code: *C22*

ПРИЛАГАНЕ НА ТЕОРИЯТА НА БОКС И ДЖЕНКИНС ЗА ОЦЕНКА НА ДИНАМИКАТА НА ПРОДАЖБИТЕ НА ЕДРО В МАЛКА ДИСТРИБУТОРСКА ФИРМА

Докторант Жулиета Михайлова
Икономически университет – Варна, България

Въведение

Веригата за доставки е система от организации, хора, технологии, дейности, информация и ресурси, участващи в преместването на продукт или услуга от доставчик към клиент. Снабдителните звена, като складове или дистрибуторски звена, са в основата на управлението на веригата за доставки. Най-общо се посочват три главни причини за поддържане на запаси – факторът време, икономическия ефект от обема на доставката и неопределеността. Факторът време зависи от продължителността на дейностите по документалната обработка на заявката, товаро-разтоварните работи, времето за транспорт. Икономическият ефект от обема на доставката се определя от факта, че доставките на точното количество ресурс, което е необходимо в точния момент на възникване на потребността, води до голям брой поръчки и до оскъпяване. Доставката на голямо количество ресурс пък изисква увеличаване на разходите му за съхранение. Класическият EOQ модел (Economic Order Quantity Model) определя оптималния размер на една доставка (Harris 1913). Той може да се използва с известни модификации, в зависимост от конкретните условия. На трето, но не на последно място е неопределеността. Търсенето, предлагането, времето за доставка и други характеристики зависят от много непредсказуеми фактори. В този смисъл поддържането на определено ниво на запас е буфер, който намалява риска от проявите на случайността (Rossi 2021, 25) .

При дистрибуция на стоки идеалният вариант е ежедневната потребност да бъде равна на складовата наличност. Ако нивото на запаса е по-ниско, дистрибуторът пропуска ползи. Ако нивото е твърде високо, запасът не се реализира напълно. Необходими са средства за неговото съхранение, за обслужване на кредита за закупуването му и пр., което, естествено, води до загуби. Последствията могат да бъдат и още по-негативни, ако става дума за стоки с ограничен срок на потребление, като, например, хранителни продукти.

Ако потреблението е напълно детерминирано, снабдителната верига може да се основава на стратегията just-in-time, като, например снабдяването на Toyota Motor Corporation (Ohno 1988). Трябва да се отбележи, че тук става дума за един потребител, чиито нужди могат да се планират с точност. Дори и в тези идеални условия, обаче, е възможно в резултат на случайни фактори да възникнат сривове. През 1997 в резултат от пожар в завод, произвеждащ автомобилни части, Toyota Motor е принудена да спре работа за няколко дни (Reitman 1997). Този случай, обаче е единичен. За превенция само на такива редки явления едва ли е целесъобразно да се поддържа запас.

Различна е ситуацията, когато клиентите на дистрибутора са много на брой. В този случай търсенето е случайно. Случаите на недостиг или на излишък от запас са правило, а не изключение.

Целта на настоящата разработка е да се предложи начин за изследване на потребителското търсене на хранителни стоки, разпространявани от малка дистрибуторска фирма. Познаването на търсенето ще позволи разработване на стратегия за управление на запасите, която да минимизира рисковете от недостиг или от излишък.

Използвани са данни за продажбите на дистрибуторска фирма, като наименованията на отделните продукти са търговска тайна.

Обект на изследването и ограничения:

Изследването е ограничено в периода 2017-2021 години. Фирмата попълва запасите си предимно от производители. Много рядко, за изпълнение на комплексна заявка от важен клиент се закупуват до 1-2 артикула от друг дистрибутор.

Доставките от производителите се изпълняват почти винаги в пълен обем. В много редки случаи може да не бъде доставена някоя от позициите на заявката. Като пример може да се посочи един от производителите на млечни продукти, който за продължителен период не изпълнява заявка за прясно мляко. Причината е, че предпочита да натовари пълно мощностите си за производство на млечни продукти, от които се реализира по-голяма печалба.

През наблюдавания период е констатиран един случай, в който голям производител прекратява напълно деловите си отношения с дистрибуторската фирма без да посочи основателна причина.

Може да се направи извода, че попълването на запасите във фирмата е в общи линии детерминирано.

По различен начин стои въпросът с продажбите. Фирмата снабдява голям брой търговци на дребно, които от своя страна продават на крайни потребители. Броят им и броят на продаваните артикули по години е представен в табл. 1.

Таблица 1

Брой клиенти и търгувани артикули за 2017-2021 година

Година	Брой клиенти	Брой артикули
2017	1471	902
2018	1438	980
2019	1298	1008
2020	1102	1167
2021	1037	1189

Източник: *Собствена разработка*

Заявките на търговците на дребно зависят от пазарното търсене, което е случайно. Това и големият брой на търговците на дребно определя случайния характер на необходимите запаси.

Може да се направи изводът, че като основа за изработване на стратегия за управление на запасите е необходимо да се изследват главно параметрите на потребителското търсене.

Фирмата работи в дните понеделник-петък. Доставяните хранителни стоки са пакетирани и имат срок на съхранение, позволяващ реализацията им в рамките на 5-7 дни и повече. За целите на анализа, като единица време може да се приеме работната седмица. За всеки конкретен продукт е необходимо да се планира седмичен запас, който да осигури задоволяване на потребностите на клиентите при минимални излишъци.

Математически модел:

В някои класически модели за управление на запасите при случайно търсене се предполага, че е известен законът на разпределение на търсенето (Атанасов, и др. 2015, 429). За изследвания случай се оказва, че това не може да бъде практически изпълнено, тъй като потреблението не е стационарно. Усреднени данни за даден период са неприложими за следващите периоди. Както показа опитът от пандемията с Covid-19, търсенето силно се влияе и от практически непредсказуеми явления. Налага се изводът, че дългосрочното планиране е трудно приложимо.

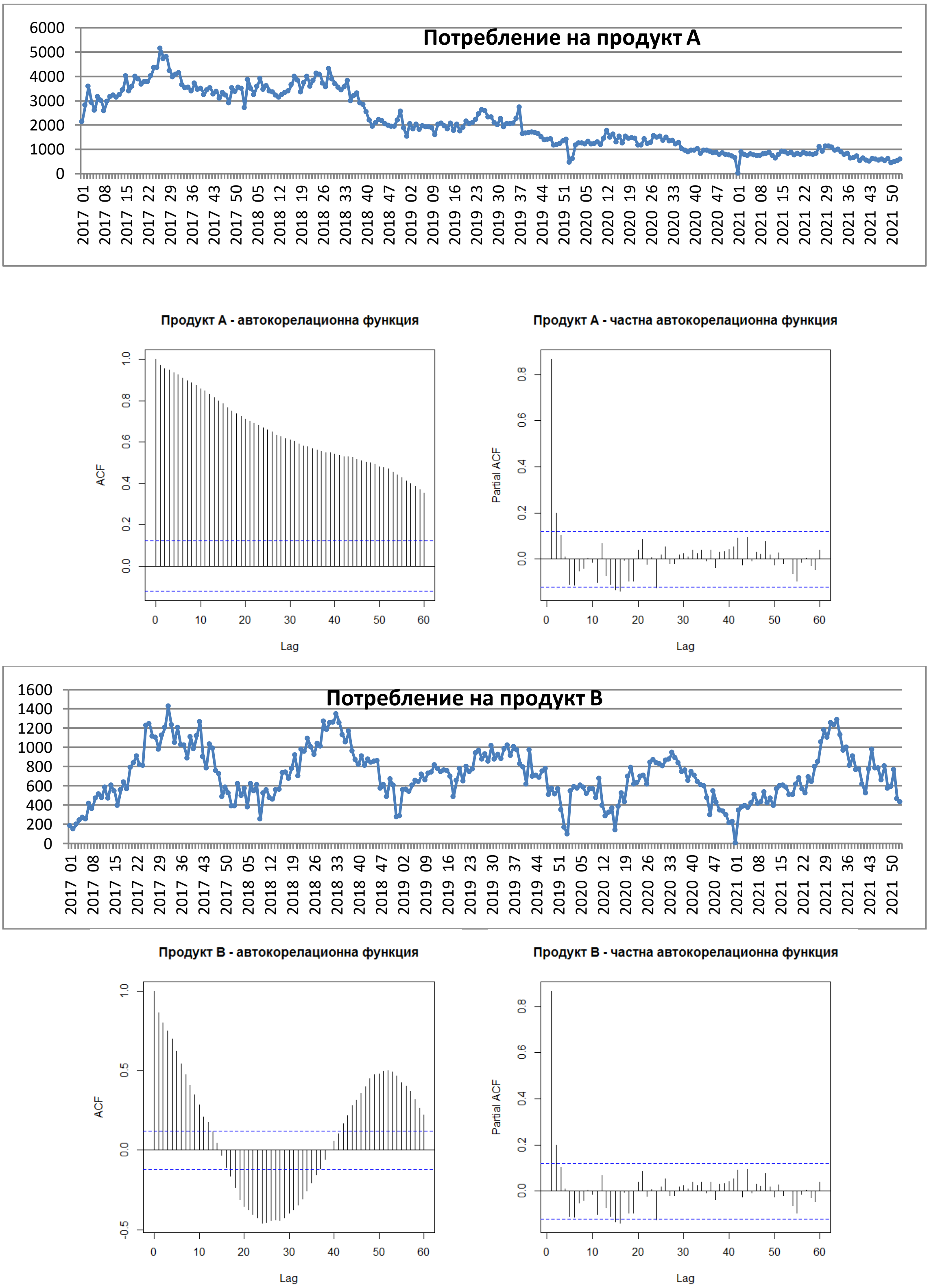
Възможно е, обаче, да се възприеме по-различен подход. Обобщените стойности на потреблението могат да се разглеждат като динамичен ред от вида

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_t, \dots, Y_n, \tag{1}$$

На фиг. 1 са показани два такива динамични реда, заедно с автокорелационните и частните автокорелационни функции.

Един от начините за анализ и прогнозиране на такива редове е подходът на Box-Jenkins, който води до използване на модели от тип ARIMA (Box, и др. 2016). При него се изисква редовете да са стационарни или да се приведат към стационарни.

Оценките на автокорелационните функции и на двата процеса показват ясно изразена нестационарност. Единият ред (B) има явно изразен цикличен характер, което се потвърждава и от оценката на автокорелационната му функция. По графиката на другия също може да се предположи цикличност, но оценката на автокорелационната му функция не потвърждава това.



Фигура 1. Потребление на продукти за периода 2017-2021 год.
Източник: *Собствена разработка.*

В методологията на Box-Jenkins за отстраняване на нестационарността обикновено се използва привеждане на първоначалния ред към ред от първи, втори и т.н. разлики:

$$\Delta_t = Y_{t+1} - Y_t \qquad (2)$$
$$\Delta_t^2 = \Delta_{t+1} - \Delta_t$$
…

Някои автори препоръчват първоначално логаритмуване на стойностите на реда и след това привеждане към ред от разликите (Asteriou and Hall 2021):

За оценка на стационарността на изходните и на приведените редове беше приложен тестът на Ljung-Box, чиято статистика е

$$Q = n(n-2)\sum_{k=1}^{h} \frac{\hat{\rho}^2}{n-k} \qquad (3)$$

където h е броят на изследваните лагове, $\hat{\rho}$ е коефициентът на автокорелация на k –тия лаг. Статистиката (3) има разпред ление χ^2 с h степени на свобода. Избрано беше ниво на значимост $\alpha = 0{,}05$.

При работа в целия изследван времеви интервал, от 2017 до 2021 години. изследването показа, че редовете от разликите не могат да бъдат приети за стационарни с избраното ниво на значимост. Стойностите на статистиката надвишаваха критичните стойности, което даваше основание за отхвърляне на нулевата хипотеза за независимост на отделните наблюдения (т.е. за стационарност на реда).

При скъсяване на изследвания интервал до няколко десетки последователни наблюдения се установи, че редуцираните редове са нестационарни, а първите разлики на редуцираните редове са стационарни. В табл. 2 са показани някои от стойностите на Q статистиките на Ljung-Box за редуцирани редове и съответните критични стойности.

Таблица 2

Статистики на Ljung-Box за редуцирани редове

Ред	**Брой лагове h**	$\boldsymbol{\chi^2_{1-0,05}(3)}$	$\boldsymbol{Q}$
$\boldsymbol{Y_t^{(A)}, t = 1, 2, \dots, 50}$	3	7,81	20,863 (нестационарен)
$\boldsymbol{Y_{t+1}^{(A)} - Y_t^{(A)},, t = 1, 2, \dots, 50}$	3	7,81	2,07 (стационарен)
$\boldsymbol{Y_t^{(B)}, t = 1, 2, \dots, 50}$	3	7,81	40,316 (нестационарен)
$\boldsymbol{Y_{t+1}^{(B)} - Y_t^{(B)},, t = 1, 2, \dots, 50}$	3	7,81	2,09 (стационарен)

Източник: *Собствена разработка*

Следователно при намаляване на броя на наблюденията има възможност за анализ на търсенето да се използват модели от тип ARIMA.

Изводи

Анализът на динамиката на потреблението е основа за вземане на разумно обосновани бизнес решения в областта на дистрибуцията на стоки.

Направените частични експерименти показват, че при дълги редове привеждането в стационарен вид е свързано с трудности. В различните периоди на наблюдаваното явление има различни средни нива на потребление. Причините за това са различни – разлика в сезонното потребление, промяна на средата, катаклизми и др. Динамичният ред се превръща в сума от неизвестни величини и много трудно може да бъде разложен на съставните компоненти. Значително по-лесно е да се изследва един сравнително малък непрекъснат сегмент. Предполага се, че данните в него са породени при едни и същи условия и натрупаният краткосрочен опит може да бъде полезен. Обратно, отчитането на информация, възникнала при други от текущия момент условия, може да бъде даже вредно. Това именно показват и резултатите от експериментите.

Може да се счита, че методът на Box-Jenkins е приложим в разглеждания в настоящата работа случай. Една от възможните стратегии за управление на запасите е да се анализира потреблението за $\boldsymbol{k}$ лага (седмици) назад във времето и да се прави прогноза за следващия лаг (следващата седмица). Процесът на вземане на решение трябва да се изпълнява непрекъснато, като се анализират еднакви по дължина, „пълзящи" по времевата ос сегменти от данни.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Asteriou, Dimitrios, Stephen G. Hall. (2021). *Applied Econometrics.* 4th. London: Red Globe Press.
2. Box, George E.P., Gwilum M. Jenkins, Gregory Reinsel, Greta M. Ljung. (2016) *Time Series Analysis: Forecasting and Control.* 5th. Hoboken: John Wiley & Sons.
3. Harris, Ford W. (1913). „How Many Parts to Make at Once." *Factory, The Magazine of Management,* p. 135-136.
4. Ohno, Taiichi. (1988). *Workplace Management.* Cambridge, Massachusetts: Productivity Press.
5. Reitman, Valerie. (1997). „Toyota Motor Shows Its Mettle After Fire Destroys Parts Plant." *Wall Street Journal*, 8 May 1997 г.
6. Atanasov, B., R. Nukolaev, T. Milkova, D. Mihaylov. (2015). Izsledvane na operaciite. Varna: Nauka i Ikonomika.

THE THEORETICAL-MULTIPLE APPROACH IN MATHEMATICS EDUCATION

Katya Chalakova
PMG „Ivan Vazov“ - Dimitrovgrad, Bulgaria

Donka Valeva
OU „Aleko Konstantinov“ - Dimitrovgrad, Bulgaria

Absctract: *The education and mental development of students is closely related to the didactic development of the learning content in mathematics. The theoretical-multiple approach is an essential part of the theoretical foundations for revealing regularities in mathematics. The requirements for logical consistency in their construction create a basis for the completion of the cognitive process. The main aspects related to the application of the set-theoretical approach in the study of mathematical concepts are considered in the present work in order to build students' knowledge, skills and competences for using mathematics as a way of thinking.*

Keywords*: Education; Mathematics; Theoretical-multiple approach*

JEL code: *C00, I20*

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕТСВЕНИЯ ПОДХОД В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

Катя Чалъкова
ПМГ „Иван Вазов“ - Димитровград, България

Донка Вълева
ОУ „Алеко Константинов“ - Димитровград, България

I. Принцип за системност

Дидактическите принципи са основни, изходни положения за *функционална технологична организация* на обучението. Те не са опора за теорията и практиката на обучението, а са част от тази теория и йерархически изпълняват базисни функции. Същността на принципа за системност се състои в усвояване то на знания, умения и компетенции в определена логическа връзка, в която водещо значение имат съществените признаци на предметите и явленията и тяхната съвкупност една система. Според Ушински (Ушински, 1949) под система се разбира множество от елементи с отношения и връзки помежду им, образуващи определена цялост. При прилагането на принципа за системност в обучението по математика новите понятия, усвоени от учениците, трябва да заемат своето логическо място в системата от познания, която те вече имат. Системността е своеобразна форма на организиране на учебния материал.

II. Основни положения от логиката

1. Съждение

По своята същност съждението е мисъл, за която може да се постави въпросът дали е вярна или не е вярна (Ганчев, 1968: 6-7).

В началните класове обучението е насочено към изграждане на основни умения за вярност на сложно съждение, което се състои поне от две прости съждения. Например: Навън грее слънце и духа вятър. Навън грее слънце или духа вятър. Съюзите „и“ и „или“ изпълняват ролята на логически връзки. Т.е. конюнкцията и дизюнкцията са основните понятия от теоретико-множествения подход, с които учениците се запознават. Тези понятия не съществуват с научните си наименования в учебния процес, но чрез тях започват да се изгражда учебния предмет математика. Така самият учебен предмет се развива като цялостна система, близка до научната систематичност.

2. Конюнкция – ако p и q са съждения, то $p \wedge q$ е съждение. Приема се, че съждението $p \wedge q$ е вярно, ако и двете съждения p и q са верни.

Първите логически връзки се появят при изучване на двуцифрени числа – двуцифрени число с различни цифри. Т.е. числото се състои от две цифри и те са различни. Ако едното от двете условия не е изпълнено, твърдението няма да е вярно. Запознаването с видовете триъгълници според ъглите и страните и понятието „равностранен триъгълник“ също съдържа в себе си прилагането на конюнкция. В следващите етапи (прогимназиален и гимназиален) от обучението в часовете по математика конюнкцията се прилага и за повече от две твърдения – решаване на уравнения, за извод за броя и вида на корените, при доказателства на геометрични задачи.

3. Дизюнкция – ако p и q са съждения, то $p \vee q$ е съждение. Отговорът на въпроса кога дизюнкцията е вярна включва в себе си два случая:

1 сл. неизключваща (нестрога) дизюнкция – когато поне едно от съжденията p и q е вярно, а когато и двете са неверни, $p \vee q$ също е невярно.

2 сл. изключваща (строга) дизюнкция – приема се, че $p \vee q$ е вярно когато само едно от съжденията p и q е вярно, а когато и двете са неверни (верни) $-\, p \vee q$ също е невярно.

В обикновените разговори при използване на съюз „или“ се има предвид, че е налице само една от двете възможности. По тази причина в обучението по математика (общозадължителна подготовка) се използва неизключваща дизюнкция. Например: Духа вятър или вали дъжд.

Използването на това понятие е в пряка зависимост от точната математическа реч и оттам правилните изводи, които показват трайност на знанията. Например: В началните класове учениците се запознават с правилото – ако един от множителите в дадено произведение е равен на нула, то и цялото произведение в равно на нула. В прогимназиален етап, при решаване на уравнение от вида $(ax+b)(cx+d)=0,$ те трябва да съобразят, че корените на уравнението се намират от $ax+b=0 \vee cx+d=0$.

4. Отрицание – ако p е съждение, то 7p е съждение. Приема се, че 7p е вярно твърдение, ако p е невярно, а когато p е вярно, 7p се приема за невярно.

Първото запознаване с това понятие е още в първи клас когато ученици се запознават с действие изваждане. Отрицанието намира по-голямо приложение при усвояване на правилата за извършване на дадени действия. В VII клас се въвежда знакът $\neq$, а в профилираната подготовка по математика учениците изучват и начина за доказване чрез допускане на противното.

5. Импликация – ако p и q съждения, то $p \to q$ е съждение и се нарича импликация на p (предходник) и q (наследник).

В часовете по математика често се използват съждения като следните:

- Ако даден триъгълник е равностранен, то всичките му ъгли и страни са равни.
- Ако $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$, то $AB = A_1B_1$.
- Ако четириъгълника *ABCD* е успоредник, то диагоналите *AC* и *BD* взаимно се разполовяват.

Почти всяка математическа теорема може да се изкаже във формата на импликация, като след съюза "ако" се изкаже условието на теоремата, а между условието и заключението се изкаже частицата „то", т.е. като съждението, изразяващо условието на теоремата, се постави като предходник, а съждението изразяващо заключението ú, се постави за наследник. По този начин учениците придобиват умения за изказване на теоремите като условни.

Импликацията е в основата на синтетичния метод за решаване на задачи. Последователността в обучението по математика е свързана както с този метод, така и с аналитичния метод, т.е. аналитико-синтетичния метод, чрез който учениците се учат да изграждат компетенции за използване на теоретичните постановки в различни математически ситуации.

6. Равнозначност – ако p и q съждения, то $p \leftrightarrow q$ е съждение и се нарича равнозначност на p и q .

В математическа символика е прието за равнозначността да се използва знака „$\Leftrightarrow$" – така се изказват теореми, изразяващи две взаимно обратни теореми. У учениците се изграждат умения за това кога две твърдения са едновременни верни и едновременно неверни.

Релациите „еквивалентност" ($\Leftrightarrow$) и „следва" ($\Rightarrow$) създават условия за съзнателност при усвояването на математическите правила, логически връзки при тяхното прилагане и преодоляване на формалните им знания.

В процеса на обучението по математика в училище последователно във всеки клас нараства сложността на връзката между знанията, уменията и компетенциите за извършване на дейности, свързани с вярното решаване на задачите. Налага се те да прилагат логически връзки за повече от две съждения, както и да прилагат различни връзки между тях. Например: ред на действията при извършване на аритметични операции с числа в начален етап, тъждествени преобразувания при изрази и решаване на уравнения, доказателство на връзки при геометрични задачи и други.

III. Теория на множествата – методически аспекти в прилагането ú

Множество е основно понятие в математиката. То не се дефинира, но неговото съдържание се разкрива чрез подходящи примери в учебното съдържание. В началните класове вместо това понятие се използва понятието „съвкупност". „Теория на множествата" е дял от математиката, който представлява основа на обучението за:

- дейност на учителя за представяне на учебното съдържание в закономерна последователност;
- определяне на насочеността на учебния процес за разширяване на придобитите знания;
- изграждане на логически връзки от конкретното към общото;
- оптимизиране на процеса на възприемане на новите знания, т.е засилване на познавателната дейност на учениците;
- степента на познавателно развитие на учениците оптимално се надгражда и развива.

Задаване и означение.

От първи до шести клас задаването на множество се прави описателно като учениците изграждат умения за разбиране на елементите на дадено множество с определени характеристики и техните свойства.

Въвеждането на самото понятие „множество“ става в шести клас. Запомнянето на начините за записване на принадлежност към множество е необходимо за записването на решенията на геометрични задачи в следващите класове. За пръв път се въвежда и сечение на множества чрез онагледяване с кръговете на Ойлер-Вен. С практически задачи се обяснява и обединението на две множества, като се разглежда броят на елементите на обединението като от сбора на всички елементи се извади броят на елементите на сечението.

В осми клас в раздел „Комбинаторика“ изучаването продължава с разглеждане на начини за преброяване на елементи на крайни множества. У учениците се изграждат знания и умения за:

- прилагане на дизюнкция и конюнкция при елементите на множествата за прилагане на правилата за събиране и умножение на възможности (с всички или определени елементите на дадените множества);
- значението на наредбата на елементите при избор.

В девети клас теорията на множества учениците придобиват компетенции за връзка между изучаваните понятия и теорията на множествата – например, че несъвместимите събития са множества без общи елементи. Понятието „вероятност“ е тясно свързано със сечение и обединение на множества. Затвърждават се и основните действия със съждения – конюнкция, дизюнкция и отрицание.

От десети до дванадесети клас учениците прилагат придобитите знания при решаване на алгебрични и геометрични задачи, като използват основно правилата за доказване на логическите връзки между отделните елементи.

IV. Заключение

Теоретико-множественият подход изгражда логическа връзка между знанията, уменията и компетенциите и формирането им в обучението по математика. Създаването на умения за извършване на дадена дейност се основава върху придобитите знания за обектите, с които те са свързани, подпомага се ориентировъчната дейност на обучаемите и поетапно се формира всяко от тях, свързано с нови знания. Ефективността на учебния процес се осъществява с логическата конструкция – решението на задачата и психическия процес –

решаването на задачата. Съзнанието на ученика е ориентирано към определена цел.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Bankov, K., T. Stoeva, I. Tsvetkova, D. Petrova. (2017). Matematika, Kniga za uchitelya 8 klas. „Prosveta-Sofiya” AD.
2. Bankov, K., I. Tsvetkova, D. Petrova, G. Nikolova, S. Nakov. (2018). Matematika, Kniga za uchitelya 9 klas. „Prosveta-Sofiya” AD.
3. Ganchev, I. (1968). Nachalni poznaniya po matematicheska logika. Narodna prosveta, Sofiya.
4. Ganchev, I., Ĭ. Kuchinov. (1987). Organizatsiya i metodika na uroka po matematika. Narodna prosveta, Sofiya.
5. Ninkova, P., M. Lilkova, T. Stoeva, I. Sharkova, S. Stavrova. (2017). Matematika, Kniga za uchitelya 5 klas. „Prosveta-Sofiya” AD.
6. Ninkova, P., M. Lilkova, I. Sharkova, L. Radenkova. (2018). Matematika, Kniga za uchitelya 7 klas. „Prosveta-Sofiya” AD.
7. Ushinsky, K. (1949). Sobrani sochineniya. T.5., Moskva.

GEOMETRIC PROBABILITY

Maria Mitreva
"Hristo Botev" Language High School - Kardjali, Bulgaria

Abstract: *The proposed report addresses some basic principles for the nature and application of geometric probability. Specific tasks related to both basics and certain subtleties in their formulation and resolution have been proposed.*

Keywords*: probability, geometric probability.*

JEL code: *C02*

ГЕОМЕТРИЧНА ВЕРОЯТНОСТ

Мария Митрева
Езикова гимназия „Христо Ботев“ - гр. Кърджали, България

Фундаменталната математическа подготовка на учениците е предпоставка за успешното овладяване на редица специални дисциплини в различни специалности във висшите училища. Изучаването на случайни процеси е от голямо значение в различни области на науката и най-вече в икономиката. Това налага учениците да са много добре подготвени по отношение на основни знания по теория на вероятностите. Това обаче е тема, която не е достатъчно добре застъпена в училищния материал. Освен на класическия подход в теория на вероятностите трябва да се отделя повече внимание на геометричната вероятност, която се налага да се използва когато изходите от случаен експеримент са неизброимо множество.

Целта в настоящия доклад е да бъдат разгледани някои основни принципи на същността и приложението на геометрична вероятност, като се предлагат подходящи задачи, чрез които учениците и студентите да осмислят това понятие и да придобият умения за правилното му прилагане в различни практико-приложни задачи.

Стандартният начин за пресмятане вероятността за реализиране на дадено случайно събитие е като се използва формулата за класическа вероятност, а именно, ако:

A- случайно събитие;

$P(A)$- вероятността да се реализира събитието A е

$$P(A)=\frac{m}{n}, \qquad (1)$$

където m е броят на благоприятните изходи за събитието A, а n е броят на всички изходи. Един елементарен пример за това е: Каква е вероятността от една урна, ако изберем произволна топка, тя да е бяла, при условие, че в урната има 3 бели и 4 черни топки?

Може да се пресметне по следния начин:

Събитието A е „извадената топка е бяла“. Броят на всички възможности е да изберем някоя от седемте топки, т.е. 7, а броят на благоприятните е 3, т.е. $P(A)=\frac{3}{7}$.

Разбира се има и много по-сериозни задачи, свързани с формулата за класическа вероятност, където броят на всички, както и броят на благоприятните възможности се пресмятат на основата на редица формули, свързани със знания, базирани на комбинаториката.

Нека сега разгледаме един по-различен пример: Стреляме по мишена, която има кръгла форма с радиус 20 см, която се намира на стена във вид на правоъгълник с размери 3м×2м и се интересуваме каква е вероятността изстрелът да попадне в мишената, ако със сигурност е върху стената, на която е разположена мишената? Тук, както става ясно за брой на благоприятните, както и за брой на всички възможности не може да говорим, тъй като броят на точките върху стената, както и на тези върху мишената са не само безкраен брой, но са неизброимо много. Тогава възниква въпросът какъв е шансът да попадне в мишената, отнесен към това да попадне в стената, или казано по друг начин какво е отношението на частта да попадне в мишената към частта да попадне върху стената. Логично е да отнесем лицето на кръга към лицето на стената. Тогава търсената вероятност ще бъде:

$$\frac{S_{кръга}}{S_{стената}},$$

където с S сме означили съответното лице.

Дадено е, че $r=0{,}2$ м $\Rightarrow S_{кръга}=\pi r^2=\pi.0{,}2^2=\pi.0{,}04\approx 3{,}14.0{,}04=1{,}256$ м^2, а $S_{стената}=2\times 3=6$ м^2. Следователно $P(A)=\frac{1{,}256}{6}\approx 0{,}21$.

Можем да кажем, че геометричната вероятност се прилага, когато множеството от всички възможности, както и това от благоприятните е неизброимо и вероятността се пресмята като отношение на мерките на двете множества. Това може да бъде направено в общия случай в зависимост от конкретната задача дали е едномерна, двумерна или тримерна. Тогава трите възможности за пресмятане на вероятността са:

1. $P(A)=\frac{дължина\ на\ отсечка}{дължина\ на\ отсечка}$;
2. $P(A)=\frac{лице\ на\ фигура}{лице\ на\ фигура}$;
3. $P(A)=\frac{обем\ на\ тяло}{обем\ на\ тяло}$.

Именно такъв тип вероятност наричаме геометрична вероятност.

Първо ще разгледаме три основни (типични) задачи, свързани с трите варианта за геометрична вероятност, които бяха вече споменати.

Задача 1: По случаен начин се избира реално число в интервала [-2, 5]. Каква е вероятността абсолютната стойност на числото да е ≤ 1?

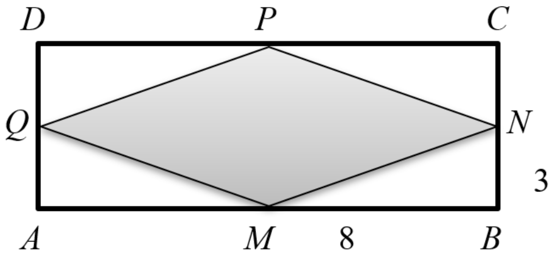
Преди да предложим решението на тази задача ще обърнем внимание на следния факт. Когато имаме неизброимо множество от възможности, то вероятността да се получат краен брой конкретни числа е равна на 0. Наистина, краен брой стойности k, отнесени фактически към безброй много стойности (още повече тяхното множество е дори неизброимо) е $\frac{k}{\infty} \to 0$ и именно заради това приемаме тази вероятност за равна на 0.

Да се върнем към решаването на задачата. Ако случайното събитие A е „числото по модул е ≤ 1“, което според току що изясненото е равносилно на „числото по модул е <1“, то благоприятни са всички случаи, ако числото е в интервала [-1, 1] или (-1, 1). Дължината на този интервал е 2, а дължината на интервала, в който попадат всички възможности е 5-(-2)=7, то тогава $P(A)=\frac{2}{7}$.

Задача 2: Каква е вероятността, точка взета от вътрешността на правоъгълник $ABCD$ със страни $AB=CD=8$см и $BC=AD=3$см, да попадне във вътрешността на четириъгълник, чиито върхове са средите на страните на изходния правоъгълник?

Тук, отново бихме искали да направим някои уточнения. Вероятността на дадено случайно събитие тук се изразява с отношение на лица и вероятността да попаднем по границата е „нула“, тъй като „лицето“ на съвкупност от отсечки (и криви) е равно на 0.

Сега да пристъпим към решаването на задачата (фиг. 1).



Фигура 1

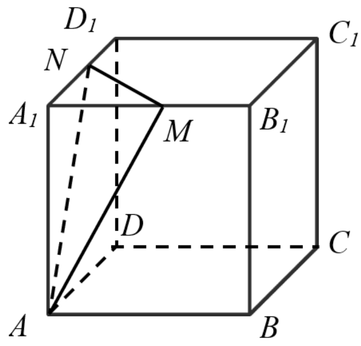
Нека M, N, P, Q са средите съответно на AB, BC, CD, AD. Всички възможности се получават от лицето на $ABCD$, а именно $S_{ABCD}=8.3=24$ см^2, а благоприятните от лицето на $MNPQ$ и S_{MNPQ} лесно се пресмята (това не е обект на настоящото изследване и нека всеки сам да стигне до това), че е $\frac{1}{2}S_{ABCD}=12$ см^2 и тогава търсената вероятност е $\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$.

Задача 3: Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с дължина на ръба 1 см. Построена е равнина през върха A и средите M и N, съответно на ръбовете A_1B_1 и A_1D_1. Ако по случаен начин избираме точка от вътрешността на куба, то каква е вероятността тази точка да е от вътрешността на пирамидата $AMNA_1$?

Тук, надяваме се, че не е необходимо да се правят обяснения, че вероятността дадена точка да попадне в стената е 0.

За да решим задачата използваме обемите на куба и пирамидата.

$V_{куба}=1$ см^3. Да разгледаме сега пирамидата $AMNA_1$ (фиг. 2)



Фигура 2

Можем да я разгледаме с основа A_1MN и връх A. От $AA_1 \perp (A_1MN) \Rightarrow$ $V_{AMNA_1} = \dfrac{1.S_{A_1MN}}{3} = \dfrac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}{3} = \dfrac{1}{24}$ см^3. Следователно търсената вероятност е равна на $\dfrac{\frac{1}{24}}{1} = \dfrac{1}{24}$.

От изложените решения на задачи 2 и 3 става ясно, че ако се знае принципът за пресмятане на геометрична вероятност, особено при по-сложни задачи, трудността не идва от гледна точка на пресмятане на съответната вероятност, а от това да бъдат пресметнати съответните лица или обеми.

Сега ще пристъпим към разглеждане на някои по-сложни задачи, свързани с тази проблематика.

Задача 4: Отсечка с дължина един метър е разделена по случаен начин на две части. Каква е вероятността дължината на едната част да е повече от два пъти от дължината на другата част?

Решение: Нека означим дължината на едната част с *x*, тогава дължината на другата е 1-*x* и $x \in (0,1)$. Естествено, повече от два пъти е дълга по-дългата част. Тогава разглеждаме два случая:

Случай 1: $x \geq 1 - x$ (вече уточнихме, че тук равенството няма значение за пресмятане на вероятността), т.е. $2x \geq 1 \;\Leftrightarrow\; x \geq \dfrac{1}{2}$ (2) и по-голямата част в този случай е този с дължина „*x*“. Тогава $x > 2(1-x) \;\Leftrightarrow\; 3x > 2 \;\Leftrightarrow\; x > \dfrac{2}{3}$ и като отчетем (2) като решим системата

$$\left| \begin{array}{l} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x > \dfrac{2}{3} \end{array} \right. \Rightarrow x \in \left(\dfrac{2}{3}, 1\right). \quad (3)$$

Случай 2: $1 - x \geq x \;\Rightarrow\; x \leq \dfrac{1}{2}$. (4)

Тогава, изхождайки от това, че по-голямата част е тази с дължина $1-x$, то следва $1-x \geq 2x \Leftrightarrow 3x<1 \Leftrightarrow x<\frac{1}{3}$ и като отчетем (4), то в този случай се получава $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$. (5)

Тогава благоприятните случаи са обединението на интервалите от (3) и (5), чиято сумарна дължина е $1-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-0=\frac{2}{3}$, а всички възможности се определят от дължината на целия интервал (0, 1), която е 1. Окончателно получаваме, че търсената вероятност е $\frac{\frac{2}{3}}{1}=\frac{2}{3}$.

Един грешен подход при тази задача би бил, ако не се разгледат двата случая, а само единия и тогава би се получила грешна вероятност - $\frac{1}{3}$.

В този смисъл, тук бихме искали да наблегнем на прецизността в условието на задачата. Ще формулираме подобна на последната задача, но малките разлики в условието я правят съществено различна.

Задача 4‘: Отсечка с дължина 1 м по случаен начин е разделена на две части, които означаваме с дължини *x* и *y*. Каква е вероятността *x>2y?*

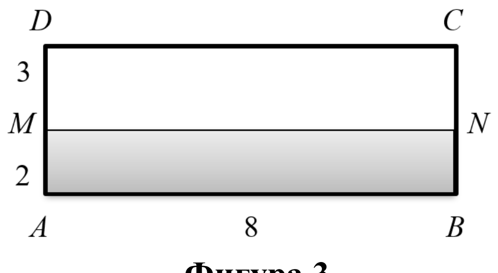
Решение: Тук отново полагаме $y=1-x$. За пресмятане на търсената вероятност ще приложим формулата за пълната вероятност, а именно:

$$P(x>2y)=P(x>y)P(x>2y/x>y)+P(x<y)P(x>2y/x<y)=$$
$$=P(x>1-x)P(x>2-2x/x>1-x)+P(x<1-x)P(x>2-2x/x<1-x)=$$
$$=P\left(x>\frac{1}{2}\right)P\left(x>\frac{2}{3}\middle|x>\frac{1}{2}\right)+P\left(x<\frac{1}{2}\right)P\left(x>\frac{2}{3}\middle|x<\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}.0=\frac{1}{3}.$$

Разликата в отговорите на двете задачи е именно в точността на условието. В първата задача е казано едното (т.е. което и да е), а във втората е конкретизирано, след тяхното означаване, за кое точно става въпрос.

Сега ще разгледаме една задача, чието решение е свързано с друг вид особености.

Задача 5: В правоъгълник с размери 8см×5см (фиг. 3) точките *M* и *N* лежат съответно на страните *AD* и *BC*, като $MN \parallel AB$ и *AM*=2см. Ако точка със сигурност е в правоъгълника *ABCD*, то каква е вероятността да е в правоъгълника *ABNM?*



Фигура 3

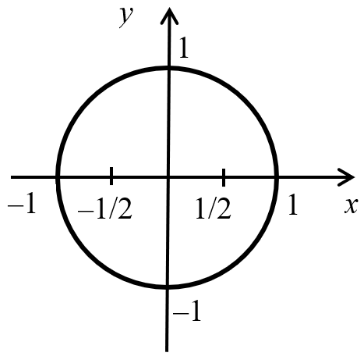
Решение: Всички възможности се описват количествено с лицето на правоъгълника *ABCD*, т.е. 8.5=40 см^2.

Благоприятните възможности числово може да зададем с лицето на правоъгълника *ABNM*, т.е. 2.8=16 см^2 и тогава търсената вероятност е равна на $\frac{16}{40}=\frac{2}{5}=0{,}4$.

Веднага може да забележим, че до това може да достигнем и без да използваме лица, а линейни мерки: двата правоъгълника имат обща страна *AB* и тогава търсената вероятност е отношението на другите им две страни, т.е. $\frac{2}{5}$.

Дали така можем да разсъждаваме и в следващата задача?

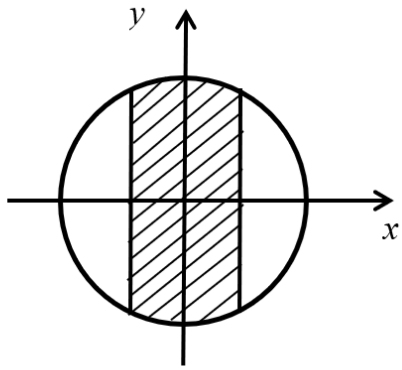
Задача 6: Нека в декартова координатна система е построена окръжност с център т. *O* и радиус 1. Ако със сигурност избираме точка от вътрешността на кръга с граница построената окръжност, то каква е вероятността нейната абсциса (координата й по оста *Ox*) да е по модул по-малка от $\frac{1}{2}$ (Фиг. 4)?



Фигура 4

Решение: Един грешен подход би бил, ако се основаваме на предходната задача и изберем линейния (едномерния) метод, т.е. точките по модул по-малки от $\frac{1}{2}$ са точките в интервала $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, чиято дължина е 1, а всички възможни абсциси са в интервала (-1, 1), чиято дължина е 2 и тогава бихме стигнали до отговора $\frac{1}{2}$.

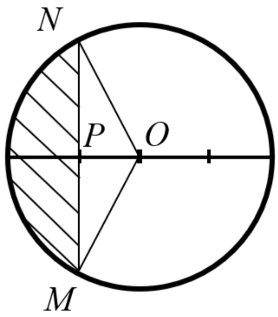
Тук правилното решение се основава като пресметнем лицето на защрихованата част на фиг. 5 и го отнесем към лицето на кръга.



Фигура 5

Знаменателят в търсената вероятност е лицето на кръга, което пресмятаме лесно: $S_{кръга}=\pi r^2=\pi$.

Лицето на защрихованата част ще намерим като пресметнем лицата на двата сегмента в бяло на фиг. 5 (които са еднакви) и от лицето на целия кръг ги извадим. Ще пресметнем лицето само на единия сегмент и след това ще го удвоим (фиг. 6)



Фигура 6

Нека сегмента е защрихованата част на фиг. 6. $OP = \frac{1}{2}$, $ON = r = 1 \Rightarrow$ $\angle ONP = \frac{\pi}{6} (30°)$ и $\angle PON = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \angle MON = \frac{2\pi}{3}$.

$$S_{сегм\,\overline{MN}} = S_{сектOMN} - S_{\Delta OMN} = \frac{r^2 2\pi}{3}.\frac{1}{2} - r^2 \sin\frac{2\pi}{3}.\frac{1}{2} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.1{,}22837 \approx 0{,}6142.$$

Тогава търсената вероятност е:

$\frac{\pi - 2.0{,}6142}{\pi} \approx 0{,}609$, което е и вярната търсена вероятност.

Разгледаните тук задачи демонстрират някои особености при прилагане на геометрична вероятност и показват значението на всеки един детайл от условието на задачата. Считаме, че анализираните теоретични постановки и предложените примери могат да спомогнат за овладяване на някои тънки моменти при решаване на задачи от геометрична вероятност, както от страна на учениците и студентите, така и от страна на техните преподаватели.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Galabova, D., M. Siderova (2021). Matematika za 12. klas. Profilirana podgotovka. Sofia: Vedi.
2. Nikolaev, R., Suruzhon, D., Stoyanov, T., Zapryanova, T., Milkova, T.,Miryanov, R. (2021). Prilozhna matematika. Varna: Nauka i ikonomika.
3. Yordanova, V., Mihaylov, D., Petkov, Y. (2021). Prilozhna matematika: Rakovodstvo. Varna: Nauka i ikonomika.

ФУНДАМЕНТАЛНАТА ПОДГОТОВКА
ВЪВ ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ
Сборник с доклади
от международна научно-практическа конференция

THE ROLE OF FUNDAMENTAL PROGRAMS
IN HIGHER EDUCATION
Conference proceeding

Предпечатна подготовка *Венета Кишева*

Издателски коли 11,6

Издателство „Наука и икономика“
Икономически университет – Варна
ул. „Евлоги Георгиев“ 24
Печатна база на ИУ – Варна

ISSN 2815-3863

ИКОНОМИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА

КАТЕДРА „СТАТИСТИКА И ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА“