



45 години катедра
“Приложна математика”

МАТЕМАТИКАТА КАТО ФУНДАМЕНТАЛНА И ПРИЛОЖНА НАУКА

**Сборник с доклади от международна
научно-практическа конференция**



**МАТЕМАТИКАТА
КАТО ФУНДАМЕНТАЛНА И ПРИЛОЖНА НАУКА**

**Сборник с доклади
от международна научно-практическа конференция**

МАТЕМАТИКАТА КАТО ФУНДАМЕНТАЛНА И ПРИЛОЖНА НАУКА

**Сборник с доклади от международна
научно-практическа конференция**

**Посветена на 45 години
катедра „Приложна математика”**



2015

Издателство „Наука и икономика”
Икономически университет – Варна

ОРГАНИЗАЦИОНЕН КОМИТЕТ

Председател

Доц. д-р Росен Николаев – ръководител катедра
„Приложна математика”

Членове:

Проф. д-р ик.н. Бойко Атанасов

Проф. д-р Дочо Дочев

Доц. д-р Дико Суружон

Доц. д-р Тодор Стоянов

Доц. д-р Теодора Запрянова

Доц. д-р Танка Милкова

НАУЧЕН СЪВЕТ

Председател

Проф. д-р ик.н. Бойко Атанасов

Членове:

Проф. д-р Дочо Дочев

Доц. д-р Росен Николаев

Дмитро Митин – КНУ „Тарас Севченко” – Украйна

Доц. д-р Дико Суружон

Доц. д-р Тодор Стоянов

Доц. д-р Теодора Запрянова

Доц. д-р Танка Милкова

Публикуваните доклади не са редактирани и коригирани. Авторите им носят пълна отговорност за съдържанието, оригиналността и за грешки, допуснати по тяхна вина.

ISBN 978-954-21-0860-3

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

ПЛЕНАРНИ ДОКЛАДИ

1. **Проф. д-р ик. н. Бойко Атанасов (ИУ-Варна)**
45 ГОДИНИ КАТЕДРА „ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА“ 13
2. **Проф. д-р Никола Зяпков (ШУ „Епископ К. Преславски“)**
ЕДИН МЕТОД ЗА НАУЧНО ИЗСЛЕДВАНЕ
В МАТЕМАТИКАТА 23

Секция I

ФУНДАМЕНТАЛНА МАТЕМАТИКА

1. **Vladimir Kostov (Universit'e de Nice,
Laboratoire de Math'ematiques, Parc Valrose)**
SOME FACTS AND CONJECTURES
ABOUT THE PARTIAL THETA FUNCTION 47
2. **Dmytro Mitin (Taras Shevchenko National University of Kyiv)**
SUPERFRACTAL APPROXIMATION OF FUNCTIONS 51
3. **Pirmyrat Gurbanov, Gurtmyrat Motukov
(Magtymguly Turkmen State University, Ashgabat, Turkmenistan)**
SOME NONLOCAL PROBLEM
FOR MIXED EQUATION WITH SECOND ORDER..... 54
4. **Shamyrat Atayev (The Ministry Education of Turkmenistan)**
SOME PROBLEMS FOR MIXED EQUATION
WITH FOURTH ORDER 57
5. **Professor, PhD Gancho T. Tachev
(University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy)**
POINTWISE APPROXIMATION
BY BERNSTEIN POLYNOMIALS..... 60

6. **Доц. д-р инж. Анна Томова (ВВМУ “Н. Й. Вапцаров”)**
ЕДИН МЕТОД ЗА ПОЛУЧАВАНЕ НА ДИОФАНТОВИ
УРАВНЕНИЯ С БЕЗБРОЙ РЕШЕНИЯ В ЦЕЛИ ЧИСЛА 71
7. **Д-р Красимир Марков (БМИ - ЕООД)**
КАРДИНАЛНО-ЗНАЧНИ ИНВАРИАНТИ НА ЧАСТИЧНО
НАРЕДЕНИ МНОЖЕСТВА 79

Секция II
ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА

1. **Professor, DSc Diana Stephanova,
Associate Professor, PhD Mariya Daskalova
(Institute of Biophysics and Biomedical Engineering,
Bulgarian Academy of Sciences)**
MATHEMATICAL MODELS IN NEUROSCIENCE 83
2. **Проф. д.м.н. Станчо Димиев (ИМИ, БАН)**
ИГРИ И СТРАТЕГИИ 94
3. **Prof. Zdravko Slavov, PhD (Varna Free University)**
EDGEWORTH, PARETO AND MULTI-OBJECTIVE
MATHEMATICAL PROGRAMMING 101
4. **Prof. A. B. Andreev, DSc, Assoc. Prof. M.R. Racheva, DSc
(Technical University of Gabrovo)**
A POSTPROCESSING PROCEDURE FOR EIGENVALUE
PROBLEMS – BOUNDS AND ESTIMATES 110
5. **Проф. д-р Тодорка Атанасова, ас. д-р Мирослава Иванова
(Тракийски университет - Стара Загора)**
ИНСТИТУЦИОНАЛНИ ВЪЗДЕЙСТВИЯ И
ОТРАЖЕНИЕТО ИМ ВЪРХУ БЪЛГАРСКИЯ БИЗНЕС 120

6. **Проф. д.м.н. Иван Иванов, гл. ас. д-р Боряна Богданова**
(СУ „Св.Кл.Охридски“)
 РАВНОВЕСИЕ В ЛИНЕЙНОКВАДРАТИЧНИ
 ДИФЕРЕНЦИАЛНИ ИГРИ 132

7. **Гл. ас. д-р Боряна Богданова, проф. д.м.н. Иван Иванов**
(СУ „Св.Кл.Охридски“)
 МОДЕЛИРАНЕ НА РАЗПРОСТРАНЕНИЕТО
 НА ФИНАНСОВА ИНФЕКЦИЯ ЧРЕЗ ИГРОВИ МОДЕЛИ
 И УЕЙВЛЕТ ТРАНСФОРМАЦИЯ 141

8. **Проф. д-р Дочо Дочев (ИУ-Варна), проф. д-р Здравко Славов**
(ВСУ), ас. Ангел Генчев (ИУ-Варна)
 ИГРОВИ МОДЕЛ НА ПРЕГОВАРЯНЕТО И ДОГОВАРЯНЕТО
 ПРИ СЪСТАВЯНЕ НА ПРАВИТЕЛСТВО НА РЕПУБЛИКА
 БЪЛГАРИЯ СЛЕД ИЗБОРИТЕ НА 05.10.2014 г. 150

9. **Доц. д-р Жечка Димитрова, ас. д-р Руска Димитрова**
(Университет "Проф. д-р Асен Златаров", Бургас)
 МАТЕМАТИЧЕСКИ МЕТОДИ ЗА ФОРМАЛИЗИРАНЕ
 НА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТТА И ОЦЕНКА НА РИСКА
 В БИЗНЕСА 161

10. **Доц. д-р Мирослав Петров, доц. д-р Мариел Пенев**
(ТУ - Габрово), ас. Даниел Ангелов (ТК - Ловеч)
 РЕГРЕСИОННИ МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ
 ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ ВЛИЯНИЕТО НА РАЗЛИЧНИ
 ТЕХНОЛОГИЧНИ ПАРАМЕТРИ ВЪРХУ
 КАЧЕСТВЕНИТЕ ПОКАЗАТЕЛИ НА ШЕВА 170

11. **Ас. Жейно Жейнов, доц. Милена Карова (ТУ - Варна)**
 ПРИЛОЖЕНИЕ НА ГЕНЕТИЧЕН АЛГОРИТЪМ
 ПРИ МОДЕЛИРАНЕ НА ОПТИЧНО ПОЛЕ 178

12. Доц. д-р Михал Стоянов (ИУ - Варна) АКТУАЛНИ ТЕНДЕНЦИИ В РАЗВИТИЕТО НА ТЪРГОВИЯТА НА ЕДРО В БЪЛГАРИЯ	186
13. Доц. д-р Донка Желязкова (ИУ - Варна) МОДЕЛ ЗА ОПТИМИЗАЦИЯ НА ОБЩОТО КОЛИЧЕСТВО ИЗВЪРШЕНА РАБОТА ОТ ТОВАРНИЯ ТРАНСПОРТ	197
14. Доц. д-р Юлиян Василев (ИУ - Варна) ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ В СРЕДАТА НА SPSS	204
15. Доц. д-р Танка Милкова (ИУ - Варна) ОПТИМИЗИРАНЕ НА РЕНТАБИЛНОСТТА ПРИ УПРАВЛЕНИЕТО НА ЗАПАСИ	209
16. Доц. д-р Георги Маринов (ИУ - Варна) ПАНЕЛНИ ТЕСТОВЕ ЗА КОИНТЕГРАЦИЯ C R - ПАКЕТЪТ PCO	215
17. Гл. ас. д-р Радан Мирянов (ИУ - Варна) СЪПОСТАВКА НА ДВА МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛА ЗА ОПТИМИЗИРАНЕ НА МОРСКИТЕ ПРЕВОЗИ ОТ ГЛЕДНА ТОЧКА НА ТРАНСПОРТНИТЕ ОПЕРАТОРИ	221
18. Гл. ас д-р Велина Йорданова (ИУ - Варна) НЯКОИ ПРЕДПОСТАВКИ ЗА ПРИЛОЖЕНИЕ НА МАТЕМАТИКАТА В ИКОНОМИКАТА	230
19. Гл. ас. д-р Пламена Недялкова (ИУ - Варна) ПРОЕКТИРАНЕ И ОЦЕНЯВАНЕ НА СИСТЕМАТА ЗА ВЪТРЕШЕН КОНТРОЛ	236

- 20. Ас. д-р Маргарита Борисова (УНСС)**
ПОЛИТИЧЕСКАТА ИКОНОМИЯ И МАТЕМАТИКАТА
ВЪВ ФРАНЦИЯ (XIX И НАЧАЛОТО НА XX ВЕК) 246
- 21. Ст. пр. д-р Димитър Димитров (ИУ - Варна)**
ИНТЕГРАЛЕН КОЕФИЦИЕНТ НА КОНКУРЕНТОСПОСОБ-
НОСТ НА СПОРТНИЯ АНИМАЦИОНЕН ПРОДУКТ
В МОРСКИТЕ ХОТЕЛСКИ КОМПЛЕКСИ 253
- 22. Ас. Антоанела Терзиева (МГУ „Св. Иван Рилски“)**
МОДЕЛИРАНЕ ДИНАМИКА НА ПОПУЛАЦИИ
ЧРЕЗ РАЗКЛОНЯВАЩИ СЕ СТОХАСТИЧНИ ПРОЦЕСИ
С ТРИ ТИПА ЧАСТИЦИ 268
- 23. Ас. Невена Господинова (ИУ - Варна)**
ПРЕДПОСТАВКИ ЗА ПРИЛАГАНЕ МЕТОДИТЕ
НА ИКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОТО МОДЕЛИРАНЕ
ПРИ ОПТИМИЗИРАНЕТО НА БИЗНЕС ПРОЦЕСИ 277

Секция III МЕТОДИЧЕСКИ ПРОБЛЕМИ ПРИ ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

- 1. Професор, доктор педагогических наук, Мария Шабанова**
(Северный (Арктический) федеральный университет
имени М.В. Ломоносова)
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ:
ЭФФЕКТЫ И РИСКИ 283
- 2. Проф. дпн Сава Гроздев (ВУЗФ - София),**
доц. д-р Веселин Ненков (ТК - Ловеч)
ОТНОСНО НЯКОИ СПЕЦИАЛНИ ВИДОВЕ ОКРЪЖНОСТИ
В РАВНИНАТА НА ТРИЪГЪЛНИКА И ТЕХНИТЕ
ОБОБЩЕНИЯ ЧРЕЗ КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ 300

3. **Доцент, кандидат педагогических наук, Форкунова Л.В.,
Юрьева Ю.А. (Северный (Арктический) федеральный
университет имени М.В. Ломоносова)**
ПРОЕКТИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСА
«АФЛАТУН: СОЦИАЛЬНОЕ И ФИНАНСОВОЕ
ОБРАЗОВАНИЕ ДЕТЕЙ» 318

4. **Assoc. Prof. PhD Georgi Marinov (UE - Varna),
Prof. PhD Bogdan Oancea
("Nicolae Titulescu" University of Bucharest)**
"USING R IN TEACHING INTERNATIONAL FINANCE
AND OTHER COURSES" (A SUMMARY OF EXPERIENCE
OF USAGE OF FREE ECONOMETRIC SOFTWARE
IN BULGARIA AND ROMANIA) 329

5. **Доц. д-р Зорница Петрова (ФПМИ на ТУ-София)**
ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА
И СТУДЕНТСКИЯ ТРУД..... 335

6. **Доц. д-р Росен Николаев, гл. ас. д-р Йордан Петков
(ИУ - Варна)**
МЯСТО И РОЛЯ НА ИКОНОМИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ –
ВАРНА В НАЦИОНАЛНАТА СТУДЕНТСКА
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА (2006-2015 г.)..... 343

7. **Гл. ас. д-р Маргарита Шопова (СА "Д. А. Ценов")**
РАЗВИВАНЕ НА ТВОРЧЕСКОТО МИСЛЕНЕ ЧРЕЗ
ПРЕОПРЕДЕЛЕНИ И НЕОПРЕДЕЛЕНИ ЗАДАЧИ 367

8. **Гл. ас. д-р Лиляна Каракашева-Йончева
(ШУ „Епископ Константин Преславски“)**
САМОСТОЯТЕЛНАТА РАБОТА НА СТУДЕНТИТЕ
В ПРОЦЕСА НА ОБУЧЕНИЕ ВЪВ ВИСШЕТО УЧИЛИЩЕ375

9. **Гл. ас. д-р Деян Михайлов (ИУ - Варна)**
 ВХОДНОТО НИВО ПО МАТЕМАТИКА НА СТУДЕНТИТЕ
 ПЪРВОКУРСНИЦИ ПО СПЕЦИАЛНОСТИ
 ОТ НАПРАВЛЕНИЕ ИКОНОМИКА 391

10. **Гл. ас. д-р Йордан Петков, Виктория Станчева (ИУ - Варна)**
 ИЗСЛЕДВАНЕ НА ПРАКТИКО-ПРИЛОЖНИТЕ
 МАТЕМАТИЧЕСКИ УМЕНИЯ НА СТУДЕНТИ
 ОТ ИКОНОМИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА 400

11. **Ас. Невена Господинова, ас. Ангел Генчев (ИУ - Варна)**
 НЯКОИ ОСОБЕНОСТИ ПРИ ПОДБОРА
 И ПОДГОТОВКАТА НА СТУДЕНТИ ОТ ИКОНОМИЧЕСКИ
 УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА ЗА НАЦИОНАЛНАТА
 СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА 409

12. **Катя Чалъкова (ПМГ „Иван Вазов“, Димитровград)**
 ЕДИН ВИД ТЕСТОВЕ ЗА РАЗВИТИЕ
 НА ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАТА
 ИНТЕЛИГЕНТНОСТ НА УЧЕНИЦИТЕ 418

13. **Виктория Атанасова (ИУ - Варна)**
 ПОГЛЕДЪТ НА СТУДЕНТИТЕ
 ВЪРХУ ПОВИШАВАНЕ ЕФЕКТИВНОСТТА
 НА ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА 424

НАУЧНИ СЪОБЩЕНИЯ

1. **Roumen Anguelov (University of Pretoria -
 South Africa, Bulgarian Academy of Sciences)**
 PARAMETER IDENTIFICATION
 IN ADVECTION-DIFFUSION MODELS 435

2. **Prof. Dr. Habil. Georgi D. Dimov,**
Prof. Dr. Habil. Dimiter Vakarelov
(“St. Kl. Ohridski” University of Sofia)
CONTACT RELATIONS
AND COMPACT T_0 -EXTENSIONS 437
3. **Assist. Prof. Dr. Elza Ivanova-Dimova**
(“St. Kl. Ohridski” University of Sofia)
ON A NEW LOWER-VIETORIS-TYPE TOPOLOGY
IN HYPERSPACES 438

ПЛЕНАРНИ ДОКЛАДИ

45 ГОДИНИ КАТЕДРА „ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА“

*Проф. д-р ик. н. Бойко Атанасов
Икономически университет – Варна*

Икономически университет – Варна, основан като Висше търговско училище от Варненската търговско-индустриална камара, най-старото висше икономическо училище в България, вече 95 години функционира, развива се и се адаптира, за да отговаря на актуалните образователни потребности на своето съвремие. От своето основаване през 1920 година до сега висшето училище е претърпяло редица структурни и идейни реформи, чиято основна цел винаги е била да се гради и съхранява авторитета на една от най-престижните образователни институции, възпитаниците на която благодарение на придобитите умения активно допринасят за развитието на икономиката и стопанската дейност в национален и международен мащаб. От позицията на времето следва да се отбележи, че основателите на Висшето търговско училище успешно са приложили модела на най-престижните за своето време западноевропейски търговски училища в Германия, Австрия, Франция и др. Тази градивна тенденция намира своето приложно поле в образователните и научно-изследователски подходи, прилагани и до днес от академичния състав на университета. В унисон със световната практика и необходимостта от адаптивност към промените в икономиката и обществото през изминалите 95 години в университета са разкрити и преструктурирани редица факултети и катедри.

Днес едно от утвърдените звена в структурата на Икономически университет – Варна е катедра „Приложна математика“, неиз-

менна част от факултет „Информатика“. През настоящата 2015 година се навършват 45 години от основаването на катедра „Приложна математика“, правопреемник на учредената през 1970 г. катедра „Висша математика“ на Търговско-статистическия факултет на тогавашния ВИНС „Димитър Благоев“.

В ретроспективен план историческите корени на катедрата могат да бъдат проследени в далечната 1920 г., когато на своята XXV сесия, проведена на 14 май, Варненската търговско-индустриална камара взема официално решение да бъде основано Висше търговско училище във Варна. За негов ректор е избран проф. Цани Калянджиев, на когото е възложена задачата да проведе изследователска работа във водещи европейски университети и да пренесе техният опит в новото висше икономическо училище.

За изпълнението на поставеното нелеко поръчение проф. Калянджиев ангажира екип от преподаватели, работещи предимно в средноевропейски университети, с които започват учебния процес на първия випуск студенти, записани в двугодишна форма на обучение. Сред тях са имената на проф. Владимир Косински, доц. Фридрих фон Щейман, Феодор Белмер, Наум Долински, доц. Оскар Андерсон и др. Сред тези първи преподаватели във висшето училище е и името на доц. Светослав Греков, завършил математика в Софийския университет и изпратен от върховния училищен съвет на специализация при проф. Лайтнер в Берлинското търговско училище. Хрониките показват, че още първият записан випуск студенти е имал в учебния план дисциплини като Политическа аритметика и Търговско смятане, които са били определени от Академичния съвет като задължителни, а в последствие обединени в една обща дисциплина с хорариум 225 часа.

През първите 50 години от своето съществуване Висшето икономическо училище е претърпяло редица структурни и идейни реформи, функционирало е в трудни и динамични условия на войни, кризи, изострени вътрешни политически и икономически отношения, и винаги академичното ръководство се е стремяло към основ-

ната идея да отговаря на образователните потребности на своето съвремие. В тази връзка можем да споменем, че е имало години в средата на миналия век, когато са били подготвяни специалисти не само с икономически умения, а също така и технически и технологично насочени¹. В структурно отношение можем да споменем, че академичният състав на университета първоначално е бил обособен в пет комисии, които се оказват първообраз на съвременните катедри. По-късно се формират и отделните факултети. Различни исторически документи свидетелстват, че в периода от 1920 г. до 1970 г. са се откривали и закривали редица катедри, за да обединят и синхронизират дейностите на преподаватели, които са работели в сродни насоки, с оглед осигуряване на обучението на студенти в дадена специалност. Архивни документи на университета свидетелстват за наличие на катедри с наименования „Математика“ през 40-те години на миналия век, „Приложна математика“ (в Стопанския факултет) през 50-те години на миналия век и катедра „Статистика и математика“ през 60-години на миналия век, които очевидно са обединявали преподаватели по различни математически дисциплини. През тези години във висшето училище са работели преподаватели по математика, приложна математика, висша математика, геометрия и дескриптивна геометрия, сред които са имената на академик Любомир Чакалов, проф. д-р Благовест Долапчиев, Борис Божилов Иванов, Венера Сотирова Димова, Георги Петров Йорданов, Анна Йорданова Петрова, Георги Иванов Георгиев, Димитър Стефанов Табаков, Стефан Колев Платиканов, Марин Борисов Маринов.

Поради едни или други причини така съществуващите катедри

¹ В университета (тогава Варненски държавен университет „Св. Кирил Славянобългарски“) са били формирани два факултета – Стопански (включващ 16 катедри) и Машинен (включващ 30 катедри). Машинният факултет съществува от 1945 г. до 1949 г. В края на 50-те и началото на 60-те години на миналия век е провеждана политика за въвеждане на технически дисциплини в икономическите специалности, тъй като се е развивала идеята за създаване на инженерно-икономически специалности. Вж. по-подробно: Близнаков, П., Здр. Ковачев, Ст. Цонев. Кратка история на Икономически университет – Варна. Университетско издателство ИУ – Варна, 2001.

са били закрити, но в края на 60-те години на XX-ти век под влияние на руската школа силно се е развило направлението, свързано с приложение на математически (количествени) методи в икономическите изследвания. Така се е появило едно звено „Математика и математически методи в икономиката“ от преподаватели от различни катедри на университета, чиито научни и изследователски интереси са били насочени в тази област. Сред тях са имената на доц. Борис Божилов, проф. Костадин Бонев, доц. д-р ик. н. Пенчо Генев, доц. Кънчо Кънчев, проф. Георги Минчев, проф. д-р Илия Личев, проф. д-р ик. н. Георги Димитров, ас. Недка Желева, ас. Лука Луков, ст. преп. Радослав Недев, ст. ас. Христина Павлова, доц. д-р Рафаил Стайков, проф. д-р Любомир Станев, доц. д-р инж.-икон. Симеон Христов².

През този период от време по инициатива на група учени-икономисти от страната, подкрепена от тогавашните академични ръководства, през 1965 г. Държавно издателство – Варна започва да издава една нова научно-популярна поредица „Математически методи в икономиката“. Монографичните изследвания от тази поредица са имали за цел да запознаят научната общност с големите възможности, които предоставят съвременните математически методи за извършване на съдържателни икономически изследвания. Автори в издадените монографии са били едни от най-известните български учени-икономисти.

Постепенно е назряла идеята за формиране на нова катедра, в която да се обединят преподаватели, развиващи приложните аспекти на математиката, с оглед адаптирането им за решаване на икономически проблеми. Така, като първообраз на съвременната катедра „Приложна математика“ се приема основаната през 1970 г. катедра „Висша математика“ от проф. Костадин Бонев – хабилитиран по „математически методи и приложение на изчислителната техника в

² Алманах на Висшия институт за народно стопанство „Д. Благоев“ – Варна 1921 – 1971. Варна – 1972 г.

икономиката“ (със съвременен еквивалент „3.8. Икономика“). Проф. Костадин Бонев е един от водещите изследователи в областта на икономико-математическото моделиране в България. В академичния състав на новоучредената катедрата към Търговско-стокоевдения факултет на тогавашния ВИНС „Димитър Благоев“ са включени доц. Костадин Бонев, ст. преп. Радослав Недев, ст. преп. Рафаил Стайков, ст. ас. Христина Павлова, ас. Недка Желева, ас. Лука Луков. През следващите една-две години в катедрата постъпват ас. Бойко Атанасов, ас. Петър Петров, ас. Димо Димитров и ас. Васил Мирянов. В този академичен състав новата катедра започва своята научно-изследователска и преподавателска работа и благодарение на упорития и целеустремен труд на своите членове и забележителния управленски талант на своя ръководител бързо се утвърждава като основно звено в структурата на висшето учебно заведение. Основните дисциплини, преподавани от членовете на катедра „Висша математика“, са Висша математика, Математическо програмиране и Икономико-математическо моделиране. Благодарение на своя висок професионализъм, скромност и отзивчивост проф. Бонев се превръща в най-дългогодишния ръководител на катедрата в периода от 1970 г. до 1987 г. През този период от време в катедрата са привлечени нови научни работници, сред които са Дочо Дочев, Юлка Вълкова, Мирослав Каракулаков, Веселин Бошнаков, Любов Димитрова, Дико Суружон, Григор Юшенлийски, Румен Ангелов, Огнян Енчев и Иван Гинчев.

През този период катедра „Висша математика“ поддържа тесни контакти със сродните катедри от ВИИ „Карл Маркс“ (сега УНСС) и Одеския институт за народно стопанство. Като резултат от това ползотворно сътрудничество са написани и издадени редица съвместни учебници и учебни пособия по различни математически дисциплини.

През следващите 12 години, от 1987 г. до 1999 г., управлението на катедрата е поверено на един достоен учен и преподавател – проф. д-р Дочо Дочев. През този период се утвърждава авторитетът

на катедрата, като се привличат нови преподаватели и се развиват и утвърждават нови приложни математически дисциплини. С оглед придобиване на по-актуално и съвременно звучене в средата на 90-те години на XX век наименованието на катедрата се променя на „Математически науки“. По време на управлението на проф. д-р Дочо Дочев към катедрата се присъединяват нови членове, някои от които са Росен Николаев, Владимир Костов, Румен Козарев, Тодор Стоянов, Радан Мирянов, Теодора Запрянова.

Следващият мандат от 1999 г. до 2003 г. е поверен на проф. д-р ик. н. Бойко Атанасов и това отново се оказва разумно и успешно решение на катедрата. Впоследствие, в резултат от активна съвместна научно-изследователска работа, петима от членовете на катедрата придобиват образователна и научна степен „доктор“ в ОВО 3. Социални, стопански и правни науки. Новите членове на катедрата от този мандат са Танка Милкова и Йордан Петков.

От 2003 г. до 2009 г. ръководител на катедра „Математически науки“ е доц. д-р Димо Димитров. През този период в катедрата постъпва Велина Йорданова. Един от най-големите успехи за катедрата в годините от 2003 г. до 2007 г. е обучението на студенти бакалаври по специалност „Математика и информатика“. За голямо съжаление от тази специалност успешно се дипломираха студентите само от първия приет випуск.

От 2009 г. до 2011 г. ръководител на катедрата е доц. д-р Дико Суружон, който довършва втория мандат на предходния ръководител, след неговото пенсиониране.

От 2011 г. до днес ръководител на катедрата е доц. д-р Росен Николаев. По време на неговото управление към академичния състав на катедра „Математически науки“ се присъединяват Ангел Генчев, Деян Михайлов и Невена Господинова. В началото на 2014 г. наименованието на катедрата е променено от „Математически науки“ на „Приложна математика“ с решение на Академичния съвет, като решението е продиктувано от желанието, то по-точно да съответства на водените дисциплини пред студентите по икономика,

обучавани в Икономически университет – Варна.

Към настоящия момент академичният състав на катедра „Приложна математика“ включва 11 преподаватели на основен трудов договор, от които трима са с придобита образователна и научна степен „доктор по математика“ (доц. д-р Дико Суружон, доц. д-р Тодор Стоянов, доц. д-р Теодора Запрянова), четирима – с придобита образователна и научна степен „доктор по икономика“ (доц. д-р Росен Николаев, доц. д-р Танка Милкова, гл. ас. д-р Радан Мирянов, гл. ас. д-р Велина Йорданова), един – с придобита образователна и научна степен „доктор по администрация и управление“ (гл. ас. д-р Йордан Петков) и един – с придобита образователна и научна степен „доктор по информатика и компютърни науки“ (гл. ас. д-р Деян Михайлов). Сред академичния състав на катедра „Приложна математика“ има и двама асистенти, обучаващи се в докторантура – ас. Ангел Генчев и ас. Невена Господинова. Петима от преподавателите от катедрата са хабилитирани по професионални направления „Математика“ и „Икономика“. Към академичния състав на катедрата се включват както редица хонорувани асистенти, така и двама хонорувани професори – утвърдени учени и преподаватели в Икономически университет – Варна, а именно проф. д-р ик. н. Бойко Атанасов и проф. д-р Дочо Дочев. Към катедрата като хонорувани професори са работили също проф. д.п.н. Сава Гроздев, проф. д.м.н. Грозьо Станилов, проф. д.м.н. Степан Терзиян, доц. д-р Петър Рашков и др.

Катедра „Приложна математика“ участва активно в процеса на осигуряване на професионална подготовка на хилядите студенти от ОКС „Бакалавър“ и ОКС „Магистър“, обучаващи се в различните специалности в Икономически университет – Варна по професионални направления „Администрация и управление“, „Икономика“, „Туризм“ и „Информатика и компютърни науки“. Преподавателите от катедрата провеждат обучение на студентите както по базови математически дисциплини, така и по приложни дисциплини, ориентирани към широките възможности за приложение на математиката в информатиката и икономиката, като например „Математичес-

ки анализ“, „Линейна алгебра и аналитична геометрия“, „Алгебра“, „Геометрия“, „Диференциални уравнения“, „Теория на вероятностите и математическа статистика“, „Дискретна математика“, „Числени методи“, „Моделиране и оптимизиране“, „Оптимизационни методи“, „Приложна теория на игрите“, „Количествени методи в логистиката“, „Количествени методи в управлението“, „Изследване на операциите“, „Финансова математика“, „Управление на запасите“, „Теория на управленските решения“, „Теория за вземане на решения“, „Управление на риска“ и др.

Към дейностите, осъществявани от академичния състав на катедра „Приложна математика“, следва да се отчете и участието на някои хабилитирани преподаватели в процеса на осигуряване на фундаментална, специална и методологична подготовка на обучавщите се в докторантура по различни докторски програми на Икономически университет – Варна.

От началото на 2014 г. катедра „Приложна математика“ получи програмна акредитация за срок от четири години да обучава докторанти по докторска програма „Оптимално управление на икономически системи“ в професионално направление 3.8. Икономика, Област на висшето образование 3. Социални, стопански и правни науки. В екипа на докторската програма са включени както хабилитирани лица от катедрата, така и хабилитирани преподаватели от различни катедри на Стопански факултет при Икономически университет – Варна. Докторската програма „Оптимално управление на икономически системи“ има за цел да даде на успешно завършилите я докторанти широк спектър от знания, умения и компетенции, основните от които могат да се сведат до следното: познаване на специализираната литература и научните постижения в областта на математическите методи и тяхното приложение в икономиката; познаване и възможност за прилагане на математически методи при моделиране на икономически явления и процеси; овладяване на съвременни информационни технологии и умения за приложението им както при осъществяване на научни разработки, така и в различ-

ните области на професионалната дейност.

Считаме, че тази докторска програма до голяма степен възстановява и продължава създадените добри позиции преди години, а именно обучаването на докторанти по научната специалност с тогавашен шифър 05.02.08 с наименование: „Приложение на изчислителна техника и математически методи в икономиката”.

Под ръководството на преподаватели от катедрата се осигурява достойното представяне и заемането винаги на призови места от отборите на Икономически университет – Варна на Националната студентска олимпиада по математика, както и на някои международни състезания.

Много активно през годините е било и участието на академичния състав на катедра „Приложна математика“ в административно-управленската дейност на университета. Представители на катедрата са заемали високи ръководни длъжности в Икономически университет – Варна. Проф. Бонев е избран за декан на Търговско-статистически факултет в периода 1972 г. – 1976 г., както и зам. ректор по следдипломно обучение от 1976 г. до 1983 г. През 1989 г. проф. д-р ик. н. Бойко Атанасов е избран за декан на Търговско-статистическия факултет, а през 1991 г. поема деканското ръководство на новосъздадения факултет по Информатика. В периода 1994 г. до 1999 г. проф. д-р ик. н. Бойко Атанасов е заместник ректор по Учебната работа в университета, а от 1999 г. до 2003 г. е ректор на Икономически университет – Варна. Проф. д-р Дочо Дочев е бил декан на факултет „Информатика“ един мандат в периода 1995 г. – 1999 г. Доц. д-р Рафаил Стайков в периода 1985 г. – 1989 г. е бил декан на факултет за „Чуждестранни студенти“ към ВИНС „Д. Благоев“. Доц. д-р Димо Димитров е бил зам. декан към Търговско-статистическия факултет в периода 1976 г. – 1980 г., а през настоящия мандат от 2015 г. до 2019 г. за зам. декан на факултет „Информатика“ е избран доц. д-р Танка Милкова.

Академичният състав на катедра „Приложна математика“ изявено участва и в научно-изследователския живот на университета,

както и извън него. Хабилитирани лица от катедрата са били членове на научни съвети и комисии към ВАК, научни съвети към БАН, факултетни научни съвети, главни и зам. главни редактори на научни издания, участвали са и участват в редакционни колегии на реномирани научни списания в страната и чужбина. Изключително силно е присъствието на преподаватели от катедрата в екипите на проекти за научно-приложни изследвания и проекти за научни прояви, получили голяма популярност в последните години, което допълнително издига имиджа на университета като едно авторитетно образователно и научно звено. Същевременно е широко застъпено извършването на експертна и консултантска дейност на бизнеса чрез прилагане на математически методи при вземане на управленски решения.

Някои членове на катедрата са провели дългосрочни специализации в Русия, Украйна, Англия, Швейцария, Белгия, Куба, Франция и др. Като постигнати резултати от тези специализации са защитени дисертационни трудове, съвместни научни публикации, споделен научен и педагогически опит и др. п.

Наличието в катедра „Приложна математика“ на специалисти в различни научни направления като математика, икономика, администрация и управление, информатика и компютърни науки гарантира интердисциплинарния характер на обучението, насочено към широкообхватно удовлетворяване на професионалните потребности на студентите, изучаващи математически дисциплини и осигурява както задълбочени теоретични познания по предметната област, така и богати възможности за реално приложение на тези познания в практиката.

ЕДИН МЕТОД ЗА НАУЧНО ИЗСЛЕДВАНЕ В МАТЕМАТИКАТА

Проф. д-р Никола Зяпков
Шуменски университет „Епископ К. Преславски“

Резюме. Ръководен принцип в съвременната математика е следният: когато имаме едно множество, то трябва да се определи неговата група от преобразувания. Изучаването на тази група е мощен метод за научно изследване и получаването на важни резултати в математиката. В доклада се дават приложения на метода в теорията на Галоа, теорията на кодирането и в геометрията.

Ключови думи: група от преобразувания, група от автоморфизми, група на Галоа, самодуален код, оптимален код, геометрия, модел на Клайн.

Въведение

Нека A е едно непразно множество. Всяко биективно изображение на множеството A в себе си наричаме *преобразуване* на множеството A .

Нека G е множеството на всички преобразувания на A . Ако $\varphi \in G$, то обратното изображение φ^{-1} също е биективно изображение. Композицията на две преобразувания на A също е преобразуване на A и тази композиция е асоциативна.

Следователно множеството G е група, която наричаме *група от преобразувания* на A .

Ръководен принцип в съвременната математика е следният: Когато имаме едно множество, то трябва да се определи неговата група от преобразувания. Изучаването на тази група е мощен метод за научно изследване и получаване на важни резултати в математиката. Голяма роля играят подгрупите на G , които оставят неподвижни някои от елементите на A .

В случая, когато A е една алгебрична структура (група, пръс-

тен, поле, векторно пространство и т.н.), то G е *групата от автоморфизми* на тази структура и бележим $\text{Aut}(A) = G$.

1. Приложение на метода в теорията на Галоа

Един от първите математици, който прилага този метод, е гениалният френски математик Еварист Галоа (1811-1832). Той намира критерий за разрешимост в радикали на общото уравнение $f(x) = 0$. Този критерий Галоа намира, като използва гениалната идея на всяко уравнение да съпостави група от субституции на корените на уравнението. Чрез използването на тази група, нейни подгрупи и свързаните с тях радикални разширения на полето от коефициенти той намира критерий за разрешимост на едно уравнение в радикали [1].

Тази група наричаме *група на Галоа* на даденото уравнение и я означаваме с $\text{Gal}(f)$. Е. Галоа доказва, че общото уравнение $f(x) = 0$ е решимо в радикали тогава и само тогава, когато $\text{Gal}(f)$ е разрешима група.

Горният пример може да бъде обобщен и за полета K с произволна характеристика (виж. например²).

Групата на Галоа на общото уравнение от n -та степен е изоморфна на S_n (симетричната група). Тъй като S_n е неразрешима при $n \geq 5$, то от този критерий веднага следва теоремата на Абел-Руфини за нерешимост в радикали на общото уравнение от степен $n \geq 5$.

Определение 1. Крайното разширение E на полето K наричаме *нормално разширение* (или *разширение на Галоа*) на полето K , ако K е неподвижно подполе на групата G на $\text{Aut}(E)$. Групата G наричаме *група на Галоа* на нормалното разширение E на K и бележим

¹ E. Galois. Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux (dated 6 January 1831, edited by J. Lioville) J. Math. Pures Appl., 11 (1846), 417–433.

² И. Михайлов, Н. Зяпков, Висша алгебра и теория на Галоа, Фабер, 2004

$\text{Gal}(E / K)$.

Теорема 2 [²] (**Основна теорема в теорията на Галоа**). Нека E е нормално разширение на полето K с група на Галоа G . Съществува биективно изображение между подгрупите на G и междинните за E и K полета. За дадено междинно разширение F съответната подгрупа H на G съвпада с множеството от всички автоморфизми на E , които оставят неподвижни елементите на F . За дадена подгрупа H на G , съответното междинно поле се състои от онези елементи на E , които остават неподвижни при всеки автоморфизъм от H .

Следствие 3. Нека E е нормално разширение на полето K с група на Галоа G и C е междинно разширение на K , като $\text{Gal}(E / C) = H$. Тогава C е нормално разширение на K тогава и само тогава, когато H е нормална подгрупа на G , като $\text{Gal}(C / K) \cong G / H$.

Това означава, че е в сила точната редица

$$(1) \quad 1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow G / H \cong \text{Gal}(C / K) \rightarrow 1.$$

От тук по естествен начин възниква и така наречената задача за вложимост на полета, която в известна степен е обратна теорема на Следствие 3. Нашата формулировка е следната: Нека K е разширение на Галоа на полето k и $\text{Gal}(K / k) = F$ и е дадена точната редица от крайни групи

$$(2) \quad 1 \rightarrow H \rightarrow G \xrightarrow{\alpha} F = \text{Gal}(K / k) \rightarrow 1.$$

Да решим задачата за вложимост $(K / k, G, \alpha)$ означава да построим полето L , съдържащо K и нормално над k , като $\text{Gal}(L / k) = G$ и за всеки елемент $g \in G$ ограничението му върху K да съвпада с $\alpha(g)$.

Ако $F = \{\text{id}\}$, то получаваме така наречената Обратна задача в теорията на Галоа: за дадено поле K и дадена крайна група G да се построи разширение на Галоа L на K с група на Галоа G .

Класическата обратна задача в теорията на Галоа е задачата, когато $K = \mathbb{Q}$. Въпросът дали всички крайни групи могат да се реа-

лизируют като групи на Галоа над Q е един от най-предизвикателните проблеми в математиката, който все още не е решен.

Първото систематично изучаване на Обратната задача започва през 1892 г., когато Д. Хилберт установява следният резултат:

Теорема 4. За всяко $n \geq 1$ симетричната група S_n и алтернативната група A_n се реализират като групи на Галоа над Q .

Следващият важен резултат е получен през 1937 г. от А. Шолц [³] и Х. Райнхард [⁴], които доказват следната теорема.

Теорема 5. За всяко нечетно просто число p , всяка крайна p -група се реализира като група на Галоа над Q .

За полета от алгебрични числа и разрешими групи Обратната задача е решена от И. Р. Шафаревич през 1954 г. в цикъл от работите [^{5, 6, 7, 8}], като е доказана.

Теорема 6. Всяка разрешима група може да се реализира като група на Галоа над поле от алгебрични числа.

Измежду простите групи, проективните групи $PSL(2, p)$ за някои нечетни прости числа p са първите реализирани като групи на Галоа.

Теорема 7 (Ших [⁹]). Нека p е нечетно просто число, такова че 2, 3 или 7 са квадратични неостатъци по модул p . Тогава $PSL(2, p)$ се реализира като група на Галоа над Q .

³ Scholz A., Konstruktion von Zahlkörpern mit beliebiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung, Math. Z., 1936, Bd. 42, S. 161-188

⁴ Reichardt H., Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppe von Primzahlpotenzordnung, J. reine angew. Math., 1937, Bd. 177, S. 1-5

⁵ Шафаревич И., О задаче погружений полей, ДАН СССР, 1954, Т. 95, № 3, 459-461

⁶ Шафаревич И., О построении полей с заданной группой Галуа порядка $l\alpha$, Изв. АН СССР, Сер. Мат., 1954, Т. 18, № 3, 261-296

⁷ Шафаревич И., Об одной теореме существования в теории алгебраических чисел, Изв. АН СССР, Сер. Мат., 1954, Т. 18, № 4, 327-334

⁸ Шафаревич И., О задачи погружения полей, Изв. АН СССР, Сер. Мат., 1954, Т. 18, № 5, 389-418

⁹ Shih, K. Y., On the construction of Galois extensions of function fields and number fields, Math. Ann. 207 (1974), 99-120

Теорема 8 (Мале и Мацат [10]). Нека p е нечетно просто число и $p \not\equiv \pm 1 \pmod{24}$. Тогава могат да бъдат построени семейства от полиноми над $Q(t)$ с група на Галоа $PSL(2, p)$.

Измежду 26-те спорадични прости групи, всичките с изключение евентуално на една, а именно групата на Матьо M_{23} (нейният ред е $2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$), са реализирани като група на Галоа над Q от Мацат и неговите сътрудници.

Групата на Фишер-Гриес известна като „чудовището“, е най-голямата спорадична проста група. Нейният ред е:

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 59 \cdot 71.$$

През 1984 г. Томсън успя да докаже следната теорема за съществуване.

Теорема 9 (Томсън[11]). Групата „чудовище“ е група на Галоа над Q .

По-късно някои семейства от прости линейни групи са реализирани като групи на Галоа над Q [12].

За още факти относно Обратната задача може да се обърнем към статията на Михайлов и Зяпков „Обратната задача в теорията на Галоа“[13].

Един от успешните подходи за решаването на Обратната задача е задачата за вложимост на полета. В общия случай за решение на задачата за вложимост се допуска алгебра на Галоа.

Определение 10. Асоциативната и комутативна крайномерна сепарабелна алгебра A над полето k ще наричаме *S-алгебра*.

¹⁰ Malle G., Matzat B. H. - Realisierung von Gruppen $PSL_2(F_p)$ als Galoisgruppen uber Q , Math. Ann. 272 (1985), pp. 549-565

¹¹ Thompson J. G., Some finite groups which appear as $\text{Gal}(L/k)$, where $k \subseteq Q(\mu_n)$, J. Algebra 89 (1984), 437-499

¹² Malle G., Matzat B. H., Inverse Galois Theory, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 1999

¹³ Michailov I., Ziapkov N., The Inverse Problem in Galois Theory, Proceedings of the Thirty Seventh Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Borovec, Bulgaria (2008), 17-28

Определение 11. S -алгебрата над полето k наричаме *алгебра на Галоа* с група на Галоа G , ако съществува хомоморфизъм на групата G в групата от автоморфизми над k на алгебрата A и A притежава G -нормален базис над k .

Определение 12. Когато решението на задачата за вложимост е поле, то такова решение се нарича *собствено решение*.

Едно необходимо (но не достатъчно) условие за решимост на задачата за вложимост $(K/k, G, \alpha)$ е намерено от Д. К. Фаддеев^[14] и Х. Хасе^[15]. Това условие се нарича условие за съгласуваност.

По-кратко доказателство на Теорема 6 дава през 1976 г. В. И. Ишханов^[16]. Шафаревич в своето доказателство на Теорема 6 (обем 123 стр.) въвежда класове от полета, наречени шолцеви, а Ишханов въвежда класове от полета, наречени квазишолцеви. И двата класа полета се определят в аритметични термини.

През 1977 г. Н. П. Зяпков и А. В. Яковлев^[17] въвеждат нов клас от полета – универсално съгласувани полета. Те се определят чисто алгебрично (в хомологични термини). Те доказват, че всяка група от нечетен ред е група на Галоа над полета от алгебрични числа. Доказателството е по-ясно и по-конкретно в сравнение с доказателствата на Шафаревич и Ишханов. Друго доказателство на този факт е направено от Нойкирх.^[18, 19]

Определение 13. Казваме, че разширението на Галоа k/K с група на Галоа F е *универсално съгласувано* от период q , ако полето K съдържа примитивен корен на единицата ξ от степен q и за всяка

¹⁴ Фаддеев Д. К., Об одной гипотезе, ДАН СССР, 1954, Т. 94, № 6, С. 1012-1016

¹⁵ Hasse H., Existenz und Mannigfaltigkeit Algebren mit vorgegebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers, Math Nachr., 1948, Bd. 1, № 1, 40-61, Bd. 1, № 4, 213-217

¹⁶ Ишханов В. В., О полупрямой задаче погружения с нильпотентным ядром, Изв. АН СССР, Сер. Мат., 1976, Т. 40, № 1, С. 3-25

¹⁷ Зяпков Н. П., Яковлев А. В., Универсально согласные расширения Галуа, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1977, Т. 71, 133-152

¹⁸ Neukirch J., On solvable number fields, Invent. math., 1979, v. 52, № 62, 135-164

¹⁹ Neukirch J., Schmidt A., Wingberg K., Cohomology of number fields, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 323, Springer-Verlag, 2000

подгрупа F_0 на F хомоморфизмът $H^2(F_0, \langle \xi \rangle) \rightarrow H^2(F_0, K^*)$, индуциран от влагането $\langle \xi \rangle \rightarrow K^*$ е нулев.

Теорема 14^[17]. Разширението на Галоа K/k , съдържащо примитивен корен на единицата от степен q е универсално съгласувано от период q тогава и само тогава, когато условието за съгласуваност е изпълнено за всички задачи за вложимост $(K/k, G, \alpha)$ с абелово ядро от период q .

Условието на Теорема 14 е опростено чрез:

Теорема 15^[17]. Нека K/k е разширение на Галоа с група на Галоа F , съдържащо примитивен корен на единицата от степен q . Нека $\varphi: S \rightarrow F$ е епиморфизъм на свободната група S върху F , $R = \text{Ker } \varphi$, $G = S/[R, R]R^q$, α е епиморфизъм на G върху F , индуциран от φ . Разширението K/k е универсално съгласувано тогава и само тогава, когато условието за съгласуваност е изпълнено за задачата $(K/k, G, \alpha)$.

Съгласно тази теорема е достатъчно да проверяваме за съгласуваност само една задача, а не всички задачи с абелово ядро с период q .

Определение 16. Разширението на Галоа K/k , несъдържащо корен p -ти на единицата (p -просто число) наричаме *универсално съгласувано* от период p^n , ако полето K_1 , получено от K чрез присъединяване на корен p -ти на единицата, съдържа примитивен корен на единицата от степен p^n , е универсално съгласувано съгласно Определение 13.

Определение 17. Разширението на Галоа K/k , несъдържащо корени на единицата от степени $p_1, p_2, \dots, p_m$ (p_i - различни прости числа) наричаме *универсално съгласувано* от период $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$ ако е универсално съгласувано за всеки от периодите $p_1^{n_1}, p_2^{n_2}, \dots, p_m^{n_m}$.

В ^[18] е доказана следната важна теорема:

Теорема 18. Нека $p_1, p_2, \dots, p_m$ са различни нечетни прости числа, а числото $q = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$, K/k е универсално съгласувано разширение от период q (съгласно Определение 17). Тогава за всяка задача за вложимост $(K/k, G, \alpha)$ с ядро група от ред делищ q (не непременно абелова) съществува решение, което е поле.

Тъй като ядрото на α е група от нечетен прост ред, то тази група е разрешима съгласно знаменитата теорема на Фейт и Томсън.^[20] Този факт се използва съществено при доказателството на теоремата.

Теорема 19^[18]. За всяко нечетно число q съществува универсално съгласувано от период q разширение на Галоа K_q над полето на рационалните числа Q от нечетна степен.

От този резултат следва.

Теорема 20[Н. Зяпков, А. Яковлев^{18]}. За всяка група G от нечетен ред съществува разширение на Галоа на поле от алгебрични числа с група на Галоа G .

Реализирането на 2-групи като групи на Галоа е важно и бързо развиващо се направление в Теорията на Галоа.

По-нататък в изложението ще искаме решението на задачата за вложимост, свързана с точната редица

$$(3) \quad 1 \rightarrow A \rightarrow G \xrightarrow{\alpha} F = \text{Gal}(K/k) \rightarrow 1$$

да бъде поле (а не алгебра на Галоа).

Важно място заемат задачите, свързани с точната редица

$$(4) \quad 1 \rightarrow C_2 \rightarrow H \rightarrow F = \text{Gal}(K/k) \rightarrow 1,$$

където C_2 е циклична група от ред 2.

Съгласно известната теорема ([²¹], I, §10) всяка задача (3) с 2-ядро A може да се сведе към някоя задача от вида (4). Критерий за

²⁰ Feit, W., Thompson J., Solvability of groups of odd order, Pacific Journal of Mathematics, vol. 13, pp. 775–1029, 1963

²¹ Ишханов В. В., Лурье Б. Б., Фаддеев Д. К., Задача погружения в теории Галуа, Наука, Москва, 1990

разрешимостта на (4) ни дава следната теорема.

Теорема 21^[22]. Нека K/k е крайно разширение на Галоа с характеристика различна от 2 и нека

$$(5) \quad 1 \rightarrow C_2 \rightarrow H \rightarrow F = \text{Gal}(K/k) \rightarrow 1,$$

е неразцепимо разширение на групи с характеристичен клас $c \in H^2(F, C_2)$. Тогава задачата за вложимост, свързана с (5) е разрешима тогава и само тогава, когато $j(c) = 1$ в $H^2(F, K^*)$, където изображението $j: H^2(F, C_2) \rightarrow H^2(F, K^*)$ се индуцира от включването $C_2 = \{\pm 1\} \subset K^*$.

Определение 21^[23]. Ако A и B са крайномерни прости алгебри над полето K , то ще казваме, че те са *еквивалентни* ($A \sim B$), ако за естествените числа m и n алгебрата $A \otimes K_m$ е изоморфна на алгебрата $B \otimes K_n$ (K_m и K_n са съответно алгебри на матриците от ред m и n с елементи от полето K).

Тази релация е релация на еквивалентност. Нека $B(K)$ е броят на класовете на еквивалентност. В $B(K)$ въвеждаме произведение на класове по правилото $[A][B] = [A \otimes_K B]$. Относно тази операция $B(K)$ е абелова група, която наричаме *група на Брауер* на полето K .

Когато $F = \text{Gal}(K/k)$ групата на Брауер ще означаваме с $\text{Br}(K/k)$. Кохомологичната група $H^2(F, K^*)$ е канонично изоморфна на относителната група на Брауер $\text{Br}(K/k)$. Съгласно този изоморфизъм можем да считаме, че $j(c)$ е елемент на $\text{Br}(K/k)$. Този елемент $j(c)$ ще наричаме *препятствие* на задачата (4). Тъй като $j(c)^2 = 1$, то следва (виж ^[24]), че кръстосаното произведение

²² Schneps L., Explicit Realizations of Subgroups of $\text{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ as Galois Groups, J. Number Theory, 39, 1991, pp. 5-13

²³ Херстейн И., Некоммутативные кольца, Москва, Мир, 1972

²⁴ Merkurjev A., On the norm residue symbol of degree 2, Soviet Math. Dokl., 24, 1981, 546-551

$[K, F, c]$ може да се представи като произведение на кватернионни алгебри.

Определение 22. Нека k е поле с характеристика различна от 2 и $a, b \in k^*$. Кватернионна алгебра (или алгебра на кватернионите) $(a, b / k)$ наричаме алгебрата над k , породена от елементите i и j с релациите $i^2 = a, j^2 = b, ij = -ji$. Съответно с (a, b) ще означаваме класът на еквивалентност $(a, b / k)$ в групата на Брауер $\text{Br}(k)$. Ще казваме, че $(a, b / k)$ се *разпада*, ако $(a, b / k)$ е изоморфна на матричната алгебра $M_2(k)$, т.е. $(a, b) = 1 \in \text{Br}(k)$.

Определение 23. Ще казваме, че елементите $a \in k^* \setminus k^{*2}$ и $b \in k^* \setminus k^{*2}$ са *квадратично независими*, ако $ab \notin k^{*2}$, т.е. $k(\sqrt{a}) \neq k(\sqrt{b})$. Елементът $a \in k^* \setminus k^{*2}$ наричаме *ригиден*, ако множеството от елементи на k , представени чрез квадратичната форма $\langle 1, a \rangle = x^2 + ay^2$ е точно $k^{*2} \cup ak^{*2}$.

Ще разгледаме реализирането на Q_8 като група на Галоа над поле с характеристика, различна от 2.

Кватернионната група Q_8 има ред 8 и се задава с представянията

$$Q_8 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = 1, \tau^2 = \sigma^2, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau \rangle.$$

Теорема 24^[25]. Нека характеристиката на полето K е различна от 2. Задачата $1 \rightarrow C_4 = \langle \sigma \rangle \rightarrow Q_8 \rightarrow C_2 = \langle \rho \rangle = \text{Gal}(k(\sqrt{b}) / k) \rightarrow 1$ е разрешима тогава и само тогава, когато съществува елемент $a \in k^* \setminus k^{*2}$, така че a и b са квадратично независими и

$$(a, ab)(b, b) = (a, -b)(b, b) = 1 \in \text{Br}(k).$$

Диедралната група от ред 16 се задава така:

$$D_{16} \cong \langle \sigma, \tau \mid \sigma^8 = \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^7\tau \rangle.$$

²⁵ Michailov I., Ziapkov N., Embedding obstructions for the generalized quaternion group, J. Algebra, 226, № 1, 2000, 375-389

Теорема 25^[26]. Задачата

$$1 \rightarrow C_4 = \langle \sigma^2 \rangle \rightarrow D_{16} \xrightarrow[\tau \rightarrow \rho_2]{\sigma \rightarrow \rho_1} C_2^2 = \text{Gal}(k(\sqrt{a}, \sqrt{b}) / k) \rightarrow 1$$

е разрешима тогава и само тогава, когато $(a, b) = 1 \in \text{Br}(k)$, $(a, 2) = (-b, x) \in \text{Br}(k)$ за някое $x \in k^*$.

Теорема 26^[26]. Задачата

$$1 \rightarrow C_8 = \langle \sigma \rangle \rightarrow D_{16} \rightarrow C_2 = \langle \rho \rangle = \text{Gal}(k(\sqrt{b}) / k) \rightarrow 1$$

е разрешима тогава и само тогава, когато съществува $a \in k^* \setminus k^{*2}$, така че a и b са квадратично независими и $(a, ab) = 1$, $(a, 2) = (-b, x) \in \text{Br}(k)$ за някое $x \in k^*$.

Разглеждаме следните групи:

$$D_{8n} \cong \langle \sigma, \tau \mid \sigma^{4n} = \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau \rangle - \text{диедрална група},$$

$$SD_{8n} \cong \langle \sigma, \tau \mid \sigma^{4n} = \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{2n-1}\tau \rangle - \text{полудиедрална група}.$$

Ще изследваме задачи за вложимост, получени от груповите разширения от $H^2(D_{8n}, \mu_2)$ и $H^2(SD_{8n}, \mu_2)$. Съгласно ^[27] $H^2(D_{8n}, \mu_2) \cong \mu_2^3$ и всички неразцепими редици дават следните шест неизоморфни групи:

$$G_1 \cong D_{16n}, G_2 \cong SD_{16n}, G_3 \cong Q_{16n},$$

$$G_4 = \langle \sigma, \tau, \rho \mid \sigma^{4n} = 1, \tau^2 = \rho, \rho^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau \rangle, \rho - \text{централен елемент},$$

$$G_5 = \langle \sigma, \tau, \rho \mid \sigma^{4n} = 1, \tau^2 = \rho, \rho^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau\rho \rangle, \rho - \text{централен елемент},$$

$$G_6 = \langle \sigma, \tau, \rho \mid \sigma^{4n} = 1, \tau^2 = 1, \rho^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau\rho \rangle, \rho - \text{централен елемент}.$$

Освен това $H^2(SD_{8n}, \mu_2) \cong \mu_2^2$ и всички неразцепими редици дават следните три неизоморфни групи

²⁶ Michailov I., Ziapkov N., Embedding problems with Galois groups of order 16, Math. Balk., New Series, v.15, 2001, Fasc. 1-2, 99-108

²⁷ Michailov I., Noether's problem for some groups of order 16n, Acta Arithmetica, 143, 2010, pp. 277-290

$G_7 = \langle \sigma, \tau, \rho \mid \sigma^{4n} = 1, \tau^2 = \rho, \rho^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{2n-1}\tau \rangle$, ρ – централен елемент,

$G_8 = \langle \sigma, \tau, \rho \mid \sigma^{4n} = 1, \tau^2 = \rho, \rho^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{2n-1}\tau\rho \rangle$, ρ – централен елемент,

$G_6 = \langle \sigma, \tau, \rho \mid \sigma^{4n} = 1, \tau^2 = 1, \rho^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{2n-1}\tau\rho \rangle$, ρ – централен елемент.

Теорема 27^[28]. Нека H е група изоморфна на D_{8n} или SD_{8n} и нека L/F е H -разширение, съдържащо биквадратичното разширение $K/F = F(\sqrt{a}, \sqrt{b})/F$. Тогава препятствието за задачата

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow G_i \rightarrow H = \text{Gal}(L/F) \rightarrow 1$$

за $i = 4$ и $i = 7$ е $(b, -1) \in \text{Br}(F)$.

Теорема 28^[28]. Нека H е група изоморфна на D_{8n} или SD_{8n} и $H = \text{Gal}(L/F)$, като L/F съдържа биквадратичното разширение $K/F = F(\sqrt{a}, \sqrt{b})/F$. Тогава препятствието за задачата

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow G_i \rightarrow H = \text{Gal}(L/F) \rightarrow 1$$

за $i = 6$ и $i = 9$ е $(a, -1) \in \text{Br}(F)$.

Теорема 29^[28]. Нека H е група изоморфна на D_{8n} или SD_{8n} и $H = \text{Gal}(L/F)$, като L/F съдържа биквадратичното разширение $K/F = F(\sqrt{a}, \sqrt{b})/F$. Тогава препятствието за задачата

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow G_i \rightarrow H = \text{Gal}(L/F) \rightarrow 1$$

за $i = 5$ и $i = 8$ е $(ab, -1) \in \text{Br}(F)$.

2. Приложение на метода в теорията на кодирането

Нека F_q е крайно поле с $q = p^m$ елемента (p - просто число) и нека F_q^n е n -мерното векторно пространство над F_q .

Определение 30. Всяко k -мерно подпространство C на F_q^n наричаме *линеен код* с дължина n и размерност k и бележим $[n, k]$

²⁸ Ziapkov N., Some relatives of the dihedral group as Galois groups, C.R. de l'Academie bulgarie des Sciences, T. 62, No 9, 2009, pp. 1063-1066

код.

Определение 31. *Разстояние* (на Хеминг) $d(x, y)$ между два вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ от F_q^n наричаме броя на координатите, в които те се отличават, т.е. $d(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$.

Определение 31'. *Тегло* (на Хеминг) $wt(x)$ на вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_q^n$ наричаме броя на ненулевите му координати, т.е. $wt(x) = |\{i \mid x_i \neq 0\}|$.

Определение 32. *Минимално разстояние* $d(C)$ на кода C наричаме най-малкото от разстоянията между две различни кодови думи, т.е. $d(C) = \min\{d(x, y) \mid x, y \in C, x \neq y\}$, а минимално тегло на C наричаме най-малкото тегло от всички ненулеви тегла на векторите в C .

Тъй като C е линеен код, то минималното разстояние и минималното тегло съвпадат. Това число ще означаваме с d и казваме, че C е q -ичен $[n, k, d]$ код или $[n, k, d]_q$ код.

Всеки базис на кода C , разгледан като подпространство с размерност k , се състои от k на брой максимално линейно независими вектора.

Ако запишем тези k вектора във вид на матрица с размерност $k \times n$, то получаваме така наречената *пораждаща матрица* G на кода C .

В линейното пространство F_q^n с фиксиран автоморфизъм σ на полето F_q задаваме скалярно произведение по следния начин

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i \sigma(v_i), \text{ където } u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Например в полето F_2 има единствен автоморфизъм и това е тъждественият автоморфизъм. Тогава в F_2 скалярното произведение

$$e(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Определение 33. Нека C е линеен $[n, k]$ код. Кодът $C^\perp = \{u \in F_q^n \mid (u, v) = 0, \forall v \in C\}$ наричаме *дуален код* на C .

Тъй като $C^\perp$ е ортогоналното допълнение на подпространството C , то е добре известно, че $\dim C + \dim C^\perp = n$.

Следователно $C^\perp$ е линеен $[n, n - k]$ код.

Определение 34. Ако $C \subset C^\perp$, то C наричаме *слабо дуален код*.

Определение 35. Ако $C = C^\perp$, то C наричаме *самодуален код*.

Ясно е, че ако C е самодуален код, то неговата размерност е $\frac{n}{2}$,

т.е. той е $\left[n, \frac{n}{2} \right]$ -код.

Това означава, че самодуални кодове има само за четни дължини на векторите (кодовите думи).

Определение 36. *Спектър* на кода C наричаме $(n + 1)$ -орката $(A_0, A_1, \dots, A_n)$, където A_i ($i = 0, 1, \dots, n$) е броят на кодовите думи с тегло i . Хомогенният полином $W_C(x, y) = \sum_{i=0}^n A_i x^{n-i} y^i$ наричаме *тегловна функция* на кода C .

Ако положим $x = 1$, получаваме нов вид на тегловната функция

$$W_C(1, y) = W_C(y) = \sum_{i=0}^n A_i y^i.$$

Ясно е, че за всеки линеен код $A_0 = 1$ и ако кодът е $[n, k, d]$, то $A_1 = A_2 = \dots = A_{d-1} = 0$.

Информация за теглата на самодуалните кодове ни дава следната важна теорема.

Теорема 37[Gleason-Pierce²⁹]. Нека C е формален самодуален код над F_q , на който теглата на кодовите думи са кратни на цялото число $t > 1$. Тогава е изпълнено едно от следните условия:

- (1) $q = 2, t = 2$;
- (2) $q = 2, t = 4$;
- (3) $q = 3, t = 3$;
- (4) $q = 4, t = 2$;
- (5) $t = 2$ и C е тривиален ;
- (6) $[n, n/2, d]$ – код с тегловна функция $(y^2 + (q-1)x^2)^{n/2}$.

Определение 38. Самодуалните кодове, които удовлетворяват условието (1) на Теорема 37 ще наричаме *едночетни самодуални кодове* или *кодове от тип I*.

Определение 39. Самодуалните кодове, които удовлетворяват условието (2) на Теорема 37 ще наричаме *двойночетни самодуални кодове* или *кодове от тип II*.

Известно е, че дължината на всеки двойночетен самодуален код се дели на 8. За горната граница на минималното разстояние на самодуалните кодове са известни теоремите.

Теорема 40^[29]. Ако C е двоичен двойночетен самодуален $[n, n/2, d]$ код, то $d \leq 4 \left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 4$.

Теорема 41[Rains (1998)]. Ако C е двоичен самодуален $[n, n/2, d]$ код, то $d \leq \begin{cases} 4 \left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 4, n \not\equiv 22 \pmod{24}, \\ 4 \left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 6, n \equiv 22 \pmod{24}. \end{cases}$

Ако n е кратно на 24 и $d = 4 \left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor$, то кодът C е двойночетен.

²⁹ MacWilliams F.J., Sloane N.J.A., The Theory of Error-Correcting Codes, North-Holland, Amsterdam, 1977

Определение 42. Ако един двоичен самодуален код достига горната граница от Теорема 41, то той се нарича *екстремален* код. Съответно кодът наричаме *оптимален*, ако не съществува самодуален код с по-голямо минимално разстояние за същата дължина.

Ясно е, че всеки екстремален код е оптимален, но обратното не винаги е вярно. Например за $n = 26$ не съществуват екстремални кодове.

Двойночетните самодуални кодове не съществуват за дължина $n > 3928$ [30].

Определение 43. Два линейни $[n, k, d]$ кода над полето F_q наричаме *еквивалентни*, ако всички кодове думи на единия код, могат да се получат от кодовите думи на другия код, чрез последователност от следните трансформации:

- (1) пермутация на координатите;
- (2) умножение на елементите в дадена координата с ненулев елемент на F_q ;

(3) прилагане на автоморфизъм на полето към елементите във всички координатни позиции.

Всяка от горните трансформации запазва теглото на Хеминг и изобразява един $[n, k, d]_q$ код в $[n, k, d]_q$ код. Редица от трансформации (1) и (2) е еквивалентна на умножение отясно на кодовите думи от първия код с подходяща $n \times n$ мономиална матрица, т.е. матрица, съдържаща точно един ненулев елемент от F_q във всеки ред и стълб.

Можем още да казваме, че два кода C_1 и C_2 са еквивалентни, ако съществува мономиална матрица $M \in \text{Mon}(n, q)$ и автоморфизъм γ на полето F_q , за което е изпълнено $C_1 M \gamma = C_2$. (Тук $C_1 M = \{uM \mid u \in C_1\}$).

³⁰ Zhang S., On the nonexistence of extremal self-dual codes, Discrete Math., 91, 1999, 277-286

Така определената релация е релация на еквивалентност и тя разбива множеството от всички кодове с дадени параметри на класове на еквивалентност.

Задачата за класификация на кодове се състои в това, да се намери броят на класовете на еквивалентност и да се посочи представител от всеки клас.

Определение 44. *Аutomорфизъм* на линеен код C наричаме всяка последователност от трансформациите в Определение 43, която изобразява всяка кодова дума от C в кодова дума също от C .

Всеки автоморфизъм на кода C може да се представи като наредената двойка (M, γ) , за която е изпълнено $CM\gamma = C$. ($M \in \text{Mon}(n, q)$, γ е автоморфизъм на полето F_q).

Нека G е множеството от всички автоморфизми на кода C . В G въвеждаме операцията умножение по правилото

$$(M_1, \gamma_1)(M_2, \gamma_2) = (M_1 M_2, \gamma_1 \gamma_2).$$

Относно тази операция G е група, която наричаме *група от автоморфизми* на кода C и бележим с $\text{Aut}(C)$.

За двоични кодове само трансформацията от тип (1), т.е. пермутация на координатите, е нетривиална. Така че групата от автоморфизми на двоичен линеен код с дължина n може да бъде разглеждана като подгрупа на симетричната група S_n .

Основната идея за използването на автоморфизми при построяването на комбинаторни обекти идва от R. Anstee, M. Hall Jr. и J. G. Thompson, които през 1980 г. публикуват работата [31], където използват автоморфизми за търсена на проективна равнина от ред 10.

Нека C е двоичен $[n, n/2, d]$ самодуален код, притежаващ автоморфизъм σ от тип $p - (c, f)$, т.е. σ се представя като произведение на c цикъла с дължина p и има f неподвижни точки. Това

³¹ Anstee R., Hall M. Jr., Thompson J. G., Planes of order 10 do not have a collineation of order 5, Journ. Combin. Theory, ser. A, 29, 1980, 39-58

означава, че σ има ред p (p - нечетно просто число).

Без ограничение на общността можем да считаме, че

$$\sigma = (1, 2, \dots, p)(p+1, p+2, \dots, 2p) \dots ((c-1)p+1, (c-1)p+2, \dots, cp)$$

е разлагането на σ на независими цикли. Нека $\Omega_1 = \{1, 2, \dots, p\}, \Omega_2 = \{p+1, p+2, \dots, 2p\}, \dots, \Omega_c = \{(c-1)p+1, (c-1)p+2, \dots, cp\}$ са циклите, а $\Omega_{c+1} = \{cp+1\}, \Omega_{c+2} = \{cp+2\}, \dots, \Omega_{c+f} = \{cp+f\}$ са неподвижните точки на σ .

Разглеждаме следните две подмножества на C :

$$F_\sigma(C) = \{v \in C \mid v\sigma = v\}$$

и

$$E_\sigma(C) = \{v \in C \mid \text{wt}(v|_{\Omega_i}) \equiv 0 \pmod{2}, i=1, 2, \dots, c+f\},$$

където $v|_{\Omega_i}$ е рестрикцията на v върху Ω_i .

Теорема 45^[32]. $F_\sigma(C)$ и $E_\sigma(C)$ са подкодове на C , $C = F_\sigma(C) \oplus E_\sigma(C)$ и $\dim E_\sigma(C) = \frac{(p-1)c}{2}$.

От тази теорема следва, че за кода C съществува пораждаща матрица от вида $\text{gen}C = \begin{pmatrix} \text{gen}F_\sigma & \\ \text{gen}E_\sigma & O \end{pmatrix}$, където O е матрица от тип $\frac{c(p-1)}{f} \times f$.

В. Йоргов подобрява този метод като дава необходими и достатъчни условия за еквивалентност на получените кодове в зависимост от типа на автоморфизма ^[33].

През последните 20 години са получени голям брой резултати за конструиране и класификация на екстремални или оптимални самодуални двоични кодове като се използва този метод.

Един от първите резултати за пълна класификация на самоду-

³² Huffman W.C., Automorphisms of codes with application to extremal doubly-even codes of length 48, IEEE Trans. Inform. Theory, 28 (1982) 511-521

³³ Yorgov V.Y., A method for constructing inequivalent self-dual codes with applications to length 56, IEEE Trans. Inform. Theory, 33 (1987) 77-82

ални кодове с определен автоморфизъм е получен през 1996 г. от В. Йоргов и Н. Зяпков. В сила е теоремата.

Теорема 46^[34]. Съществуват 45 нееквивалентни двойночетни самодуални $[40, 20, 8]$ кодове, притежаващи автоморфизъм от ред 5.

Броят на всички самодуални двоични кодове при по-големи дължини расте експоненциално и дори класификацията само на оптимални кодове на този етап е невъзможна. Затова често се въвежда ограничение на кода, свързано с неговата група от автоморфизми.

Теорема 47^[35]. Редът на групата от автоморфизми на самодуален $[72, 36, 14]$ код може да бъде само произведение от степените на простите числа 2, 3, 5, 7 и 11.

Интересна е групата от автоморфизми на двоичния самодуален $[96, 48, 20]$ код. А. Щерев, В. Йоргов и Н. Зяпков през 1990 г. ^[36] доказаха, че единствените нечетни прости числа, които могат да бъдат ред на автоморфизъм на този код са 47, 31, 23, 11, 7, 5 и 3. В същата публикация ^[36] бяха изключени простите числа 47 и 31. През 2002 г. Р. Дончева ^[37] изключи простите числа 23, 11 и 7. Изследванията върху този код продължават до момента. Н. Янков през 2013 доказва следния резултат:

Теорема 48^[38]. Не съществува двоичен самодуален двойночетен $[96, 48, 20]$ код с автоморфизъм от тип $9-(10,0,6)$.

При доказателството на тази теорема се използват резултати,

³⁴ Йоргов В., Зяпков Н., Дважды четные самодуальные $[40, 20, 8]$ - коды с автоморфизмом нечетного порядка, Проблемы передачи информации, Москва, т. 32, 1996, вып.3, 41-46

³⁵ Yorgov V., Ziapkov N., On the Group of a $[72, 36, 14]$ Self-Dual Code, Intern. Workshop on Optimal Codes and Related Topics, Bulgaria, 1995, 143-145

³⁶ Shterev A., Yorgov V., Ziapkov N., A $[96, 48, 20]$ doubly-even self-dual code not have automorphisms of order 47 and 31, Intern. workshop ACCT, Leningrad, 1990, 191-194

³⁷ Dontcheva R., On the doubly-even self-dual codes of length 96, IEEE Trans. Inform. Theory, 48, No 2, 2002, 557-561

³⁸ Yankov N., On the binary self-dual $[96, 48, 20]$ codes with an automorphism of order 9, Proceedings of the Seventh International Workshop on Optimal Codes and Related Topics, Albena, Bulgaria, 2013, pp. 193-198

свързани със структурата на двоичните самодуални кодове с автоморфизъм от ред квадрат на нечетно просто число [³⁹].

Също така Н. Янков разработи метод за конструиране на самодуални двоични кодове с автоморфизъм от ред произведение на два нечетни прости числа. Като се използва този метод Н. Янков, Ст. Буюклива и В. Вилемс доказаха следната теорема:

Теорема 49[⁴⁰]. Не съществува двоичен двойночетен самодуален [96, 48, 20] код притежаващ автоморфизъм от ред 15.

От много автори са изследвани екстремалните самодуални двойночетни кодове $[24k, 12k, 4k + 4]$ за $k = 3, 4$. Най-малката дължина, за която не е известно дали съществува екстремален самодуален двойночетен код от горния тип е при $k = 3$, т.е. това е самодуалния [72, 36, 16] код. Изследванията на групата му от автоморфизми са започнали през 1982 г. с работата на Дв. Конуей и В. Плесс [⁴¹]. Тези изследвания са продължени от редица учени: Дж. Томсън, К. Хъфман, В. Йоргов, Ст. Буюклиева, В. Вилемс и др.

До момента е доказано, че групата от автоморфизми на този код има ред 5, 7, 10, 14; или ред d , който е делител на 18 или 24; или е групата $A_4 \times C_3$.

Като използва метода за конструиране на самодуални кодове с автоморфизъм от ред p^2 за нечетно просто число p [³⁹] и резултатите от [⁴²] Н. Янков доказва следната теорема:

³⁹ Bouyuklieva B, Russeva R., Yankov N., On the Structure of Binary Self-Dual Codes Having an Automorphism of Order a Square of an Odd Prime, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 51, no. 10, pp. 3678–3686, 2005

⁴⁰ Bouyuklieva S., Willems W., Yankov N., On the Automorphisms of Order 15 for a Binary Self-Dual [96, 48, 20] Code, to appear in Designs, Codes and Cryptography, pp. 1–13, 2015

⁴¹ Conway J., Pless V. , On primes dividing the group order of a doubly-even (72, 36, 16) code and the group order of a quaternary (24, 12, 10) code, Discrete Mathematics, vol. 38, no. 2-3, pp. 157–162, 1982

⁴² Bouyuklieva S., Some MDS codes over GF(64) connected with the binary doubly-even [72, 36, 16] code, Serdica Journal of Computing, vol. 1, pp. 185–192, 2007

Теорема 50^[43,44]. Не съществува двоичен двойночетен самодуален [72, 36, 16] код притежаващ автоморфизъм от ред 9.

3. Приложение на метода в геометрията

В 1870 г. Феликс Клайн (1849-1925), който е бил в Париж се запознава с работите на К. Жордан и Е. Галоа. Той достига до извода, че централно място при изучаването на геометрията трябва да се даде на понятието група.

Тези свои идеи Клайн излага през 1872 г. в знаменитата си „Ерлангенска програма“^[45]. Това е неговата встъпителна лекция при избирането му за професор (тогава на 23 г.) в университета в Ерланген (Германия). При излагането на неговите идеи ще се придържахме при изложението по този въпрос към източниците^[46] и^[47].

Клайн формулира предмета на геометрията по следния начин:

„Геометрията е наука, изучаваща свойствата на фигурите, които са инвариантни относно някаква група от преобразувания“.

Предметът на геометрията може да се формулира по следният начин: Дадено е множество M и нека G е група от преобразувания на M . Съвкупността от величините, фигурите, свойствата за тях, които са инвариантни при произволно преобразуване на групата, се нарича G -геометрия на множеството M .

Нека t . N има координати (x,y,z) спрямо ортонормирана координатна система в пространството $Oxyz$. Да съпоставим на t . N t . N' с координати (x',y',z') , които се получават от равенството

$$(6) \quad X' = A + BX, \text{ където}$$

⁴³ Yankov N., A putative doubly even [72, 36, 16] code does not have an automorphism of order 9, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 58, no. 1, pp. 159–163, 2012

⁴⁴ Yankov N., Near MDS codes over GF(64) related to doubly-even self-dual [72, 36, 16] code over GF(2), Proceedings of MATHTECH, vol. 1, 2010, pp. 71–76

⁴⁵ Klein F., Verschiedene Betrachtung über neuere geometrische Forschunden, Erlangen, 1872

⁴⁶ Klein F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus zweiter band (Geometrie), Berlin, 1925

⁴⁷ Станилов Гр., Аналитична геометрия, София, 1979

$X' = (x' \ y' \ z')^T, A = (a \ b \ c)^T, B$ е ортогонална матрица от трети ред, т.е. $BB^T = E$.

Това преобразование наричаме еднаквост в пространството. Непосредствено се проверява, че множеството от еднаквостите в пространството е група и всяка еднаквост запазва разстоянието между две точки в пространството. Породената от тази група геометрия наричаме *метрична геометрия в пространството*.

Аналогично на матричното равенство (6) можем да зададем следното преобразувание:

$$(7) \quad X' = A + BX,$$

където B е неособена матрица от трети ред и координатите на точките са относно афинна координатна система в пространството. Това преобразувание наричаме *афинно преобразувание в пространството*.

Тези преобразувания също образуват група, която наричаме *афинна група*. Породената от нея геометрия наричаме *афинна геометрия*. В сила са теоремите:

Теорема 51^[47]. Всяко афинно преобразувание преобразува равнина в равнина, права в права, безкрайна точка в безкрайна точка и запазва простото отношение на три точки върху една права.

Нека т. N има координати (x^1, x^2, x^3, x^4) относно проективната координатна система $K = [A_1 A_2 A_3 A_4; E]$ в разширеното евклидово пространство R_3 . Да съпоставим на т. N , т. N' с координати $[\overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}, \overline{x^4}]$, които се получават от равенството

$$(8) \quad \overline{X} = CX,$$

където $\overline{X} = (\overline{x^1} \ \overline{x^2} \ \overline{x^3} \ \overline{x^4})^T, X = (x^1 \ x^2 \ x^3 \ x^4), C$ е неособена матрица от четвърти ред.

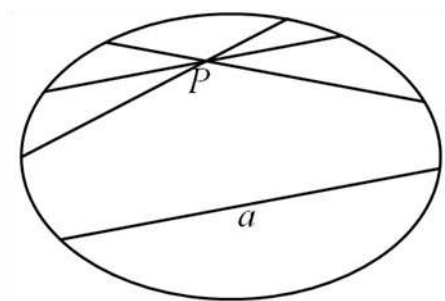
Това преобразувание наричаме проективно преобразувание в разширеното евклидово пространство. Тези преобразувания образуват група, която се нарича *проективна група*, а породената от нея гео-

метрия - *проективна геометрия* на разширеното евклидово пространство. В сила е следната теорема.

Теорема 52^[47]. Всяко проективно преобразуване преобразува равнина в равнина, права в права и запазва двойното отношение на четири точки.

По-късно Феликс Клайн ^[48] разработва модели, чрез които успява да включи неевклидовите геометрии на Лобачевски и Риман в груповата схема, начертана в неговата ерлангенска програма.

Нека в проективната равнина е дадено реално конично сечение k (овална крива). Точките на тази крива можем да считаме за безкрайно отдалечените елементи в този модел на геометрията на Лобачевски, точките на модела са всички точки в проективната равнина, лежащи върху областта оградена от k , правите на модела са хордите на линията k (фиг. 1).



Фигура 1

В този модел са в сила всички аксиоми за евклидовата геометрия с изключение на аксиомата за успоредните прави. От фиг. 1 се вижда, че през т. P от модела, нележаща на правата a могат да се построят безбройно много прави, които не пресичат правата a , т.е. са успоредни на правата a . Този модел се нарича проективен модел на двумерната геометрия на Лобачевски.

⁴⁸ Клайн Ф., Высшая геометрия, 1939

Всяко проективно преобразуване на проективната равнина, което оставя на място линията k наричаме автоморфизъм относно k . Множеството на всички такива автоморфизми е група.

Геометрията на Лобачевски може да се разгледа като теория, изучаваща свойствата на фигурите и свързаните с тях величини, които остават инвариантни, относно тази група от автоморфизми.

Геометрията на Риман (двумерната) допуска сходно тълкуване. Разглеждаме проективната равнина, в която са въведени хомогенни проективни координати (x_1, x_2, x_3) . Точките и правите на модела са всички точни и прави на проективната равнина. Разглеждаме уравнението

$$(9) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Аutomорфизмите са линейни преобразувания, които привеждат уравнението (9) в уравнение от същият вид. Те също образуват група. Породената от тази група геометрия е двумерната геометрия на Риман.

Аналогично се строят проективни модели на двете неевклидови геометрии от по-голяма размерност.

Изложеният до тук метод е част от една по-голяма теория, наречена „Теория на инвариантите“, която се прилага почти във всички дялове на математиката.

Секция I
ФУНДАМЕНТАЛНА МАТЕМАТИКА

SOME FACTS AND CONJECTURES
ABOUT THE PARTIAL THETA FUNCTION

Vladimir Petrov Kostov

Universit'e de Nice, Laboratoire de Math'ematiques, Parc Valrose

The *partial theta function* is the sum of the bivariate series $\theta(q, x) := \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j+1)/2} x^j$. For any fixed value of the parameter q from the open unit disk it is an entire function in the complex variable x . The terminology is explained by the fact that the Jacobi theta function is the sum of the series $\Theta(q, x) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j^2} x^j$ and $\theta(q^2, x/q) := \sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2} x^j$.

The partial theta function finds applications in the theory of (mock) modular forms (see [3]), in Ramanujan type q -series (see [20]), in asymptotic analysis (see [2]), in statistical physics and combinatorics (see [19]), and also in questions concerning hyperbolic polynomials (i.e. real polynomials with all zeros real, see [4], [17], [5], [16], [6], [15] and [8]). These questions have been considered by Hardy, Petrovitch and Hutchinson (see [4], [5] and [17]). For more facts about θ , see also [1].

The spectrum of θ was defined by B. Z. Shapiro in [15]. This is the set of values of q for which $\theta(q, \cdot)$ has a multiple zero in x . Properties of θ and its spectrum have been studied in [7], [8], [9], [10] and [11]. The spectral number $\tilde{q} := 0.3092493386 \dots$ is connected with *section-hyperbolic polynomials*, see [15]. In a forthcoming paper it is shown that $\tilde{q}$ is the only spectral number belonging to the disk $D_{0.31}$. The function

$\theta(\tilde{q}, \cdot)$ has a single double zero at -7.5032559833 . . . all its other zeros being real negative and simple.

If $q \in (0,1), x \in \mathbb{R}$, for the corresponding spectral numbers $0 < \tilde{q}_1 < \tilde{q}_2 < \dots < 1$ one has $\tilde{q}_j = 1 - \pi/2j + (\log j)/8j^2 + O(1/j^2)$ and the respective double zeros of θ are of the form $y_j = -e^\pi e^{-(\log j)/4j + O(1/j)}$ (see [14]).

If $q \in (-1,0), x \in \mathbb{R}$, there are the spectral numbers $-1 < \dots < \bar{q}_{k+1} < \bar{q}_k < 0$, $\bar{q}_k = 1 - \pi/8k + o(1/k)$ and the double zeros $\bar{y}_k, |\bar{y}_k| \rightarrow e^{\pi/2}$, see [13].

Numerical experiments show that the spectrum of θ should contain infinitely many complex numbers and that each root of unity (hence each point of the unit circle) should be the limit of a sequence of spectral numbers. It would be interesting to (dis)prove that θ has only simple and double zeros, and that for each q fixed it has at most one multiple zero.

Recall that the j th zero of θ is expanded in a Laurent series of the form $-\xi_j = -q^{-j} + (-1)^j q^{j(j-1)/2} (1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_{j,k} q^k)$, see [12] (we set $g_{j,0}=1$).

There exists a series $(H): \sum_{k=0}^{\infty} r_k q^k$ where

$r_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} (2\nu+1) r_{k-\nu(\nu+1)/2}$, $r_0=1$, $r_k=0$ for $k<0$, with the *stabilization property* that for $k=1, \dots, j$ and $j \geq 2$ one has $g_{j,k}=r_k$. (The sequence $\{r_k\}$ is well-known, see [18]. It gives the number of partitions into parts of three different kinds.)

This property can be improved. Define the power series $(H_{m,j})$, $m, j \in \mathbb{N}$, by the formula:

$$(H_{m,j}): \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k q^k \right) (1 - q^{j+1} + q^{2j+3} - \dots + (-1)^{m-1} q^{(m-1)j+m(m-1)/2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{r}_{k;m,j} q^k.$$

Hence $(H_{1,j})=(H)$. It turns out that for $k \leq (m+2j)(m+1)/2-1-j$ and $j \geq (2m-1+\sqrt{8m^2+1})/2$ one has $g_{j,k} = \tilde{r}_{k;m,j}$. This is proved in another forthcoming paper.

References

- [1] G. E. Andrews, B. C. Berndt, Ramanujan's lost notebook. Part II. Springer, NY, 2009.
- [2] B. C. Berndt, B. Kim, Asymptotic expansions of certain partial theta functions. Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), no. 11, 3779–3788.
- [3] K. Bringmann, A. Folsom, R. C. Rhoades, Partial theta functions and mock modular forms as q-hypergeometric series, Ramanujan J. 29 (2012), no. 1-3, 295–310, <http://arxiv.org/abs/1109.6560>
- [4] G. H. Hardy, On the zeros of a class of integral functions, Messenger of Mathematics, 34 (1904), 97–101.
- [5] J. I. Hutchinson, On a remarkable class of entire functions, Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), pp. 325–332.
- [6] O.M. Katkova, T. Lobova and A.M. Vishnyakova, On power series having sections with only real zeros. Comput. Methods Funct. Theory 3 (2003), no. 2, 425–441.
- [7] V.P. Kostov, About a partial theta function, C. R. Acad. Sci. Bulgare 66, No 5 (2013) 629–634.
- [8] V.P. Kostov, On the zeros of a partial theta function, Bull. Sci. Math. 137, No. 8 (2013) 1018–1030.
- [9] V.P. Kostov, Asymptotics of the spectrum of partial theta function, Revista Mat. Complut. 27, No. 2 (2014) 677–684.
- [10] V.P. Kostov, On the spectrum of a partial theta function, Proc. Royal Soc. Edinb. A 144 (2014) No. 5, 925–933.
- [11] V.P. Kostov, A property of a partial theta function, C. R. Acad. Sci. Bulgare 67, No. 10 (2014) 1319–1326.
- [12] V.P. Kostov, Asymptotic expansions of zeros of a partial theta function, C. R. Acad. Sci. Bulgare 68, No. 4 (2015).

- [13] V.P. Kostov, On a partial theta function and its spectrum, Proc. Royal Soc. Edinb. A (accepted).
- [14] V.P. Kostov, On the double zeros of a partial theta function, Bull. Sci. Math. (accepted).
- [15] V.P. Kostov and B. Shapiro, Hardy-Petrovitch-Hutchinson's problem and partial theta function, Duke Math. J. 162, No. 5 (2013) 825-861, arXiv:1106.6262v1[math.CA].
- [16] I. V. Ostrovskii, On zero distribution of sections and tails of power series, Israel Math. Conf. Proc. 15 (2001), 297–310.
- [17] M. Petrovitch, Une classe remarquable de s'eries enti`eres, Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Rome (Ser. 1), 2 (1908), 36–43.
- [18] N. J. A. Sloane, On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, <http://oeis.org/>
- [19] A. Sokal, The leading root of the partial theta function, Adv. Math. 229 (2012), no. 5, 2603-2621, arXiv:1106.1003.
- [20] S. O. Warnaar, Partial theta functions. I. Beyond the lost notebook, Proc. London Math. Soc. (3) 87 (2003), no. 2, 363–395.
- [21] Wikipedia. Jacobi theta function.

SUPERFRACTAL APPROXIMATION OF FUNCTIONS

Dmytro Mitin

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Abstract. Methods for fractal interpolation of functions and fractal approximation of sets, measures and functions were developed at the end of 1980s – beginning of 1990s in papers by John E. Hutchinson, Michael F. Barnsley, Arnaud E. Jacquin, Peter R. Massopust, Blagovest Sendov et al. [1-3]. Later in 2005-2011 Barnsley, Hutchinson, Örjan Stenflo et al. introduced superfractal approximation of measures and sets [4]. In this paper the superfractal methods are adopted for approximation in the space of bounded functions.

Keywords: approximation of functions, fractal approximation, superfractals.

Let us introduce some notation. By $B(I)$ we denote the space of bounded functions, $\Omega = \{1, \dots, m\}^\infty$. Let us fix a segment $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ and following collections:

1. points creating a partition of the segment I : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ (by $I_i = [x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \dots, n-1$, $I_n = [x_{n-1}, x_n]$ we denote so called regions);

2. points α_i, β_i , $i = 1, \dots, n$, such that $a \leq \alpha_i < \beta_i \leq b$ (by $I'_i = [\alpha_i, \beta_i)$ or $(\alpha_i, \beta_i]$, $i = 1, \dots, n-1$, $I'_n = [\alpha_n, \beta_n]$ we denote so called domains);

3. homeomorphisms $\varphi_i: I'_i \rightarrow I_i$, $i = 1, \dots, n$;

4. mappings $\psi_{ij}: I'_i \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, such that

$$|\psi_{ij}(x, y) - \psi_{ij}(x, y')| \leq d_{ij} |y - y'|, \quad x \in I'_i, y, y' \in \mathbb{R}, d_{ij} \geq 0,$$

$$\sup_{x \in I'_i} |\psi_{ij}(x, y)| < +\infty, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Denote $\delta_i = \max_{1 \leq j \leq m} d_{ij}$, $i = 1, \dots, n$.

The Read-Bajraktarević fractal operators $T_j: B(I) \rightarrow B(I)$, $j = 1, \dots, m$, are defined as follows:

$$(T_j(f))(x) = \psi_{ij}(\varphi_i^{-1}(x), f \circ \varphi_i^{-1}(x)), \quad x \in I_i, i = 1, \dots, n,$$

where $f \in B(I)$, $x \in I$.

A sequence of superfractal operators $\mathcal{T}^{(k)} = \Omega \times B(I) \rightarrow B(I)$, $k \geq 1$, is defined as follows:

$$(\mathcal{T}^{(k)}(\mathbf{j}, f))(x) = (T_{j_1} \circ \dots \circ T_{j_k}(f))(x),$$

where $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots) \in \Omega$, $f \in B(I)$, and $x \in I$.

The following representation is true:

$$(\mathcal{T}^{(k)}(\mathbf{j}, f))(x) = \psi_{i^1 j_1}(\varphi_{i^1}^{-1}(x), \psi_{i^2 j_2}(\varphi_{i^2}^{-1} \circ \varphi_{i^1}^{-1}(x), \dots \psi_{i^k j_k}(\varphi_{i^k}^{-1} \circ \dots \circ \varphi_{i^1}^{-1}(x), f \circ \varphi_{i^k}^{-1} \circ \dots \circ \varphi_{i^1}^{-1}(x))),$$

where $\mathbf{j} \in \Omega$, $f \in B(I)$, $x \in I$, and the sequence of indexes $i^1 = i^1(x)$, $i^2 = i^2(x)$, $i^3 = i^3(x)$, ... is determined from the conditions:

$$x \in I_{i^1}, \varphi_{i^1}^{-1}(x) \in I_{i^2}, \varphi_{i^2}^{-1} \circ \varphi_{i^1}^{-1}(x) \in I_{i^3}, \dots$$

A superfractal function $g_j^*: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{j} \in \Omega$, is defined as follows:

$$g_j^*(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{T}^{(k)}(\mathbf{j}, f))(x), \quad f \in B(I), x \in I.$$

Suppose that the series of functions

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{i^1(x)} \dots \delta_{i^k(x)}$$

uniformly converges in $x \in I$. Then $g_j^* \in B(I)$ and, for any $\mathbf{j} \in \Omega$ and $f \in B(I)$, the functions $\mathcal{T}^{(k)}(\mathbf{j}, f)$ converge to g_j^* in the space $B(I)$ as $k \rightarrow \infty$. Moreover, the function g_j^* satisfies the identity

$$\mathcal{T}^{(k)}(\mathbf{j}, g_{S^k \mathbf{j}}^*) = g_j^*, \quad \mathbf{j} \in \Omega, k \geq 1,$$

where $S: \Omega \rightarrow \Omega$ is a shift, $S(j_1, j_2, \dots) = (j_2, j_3, \dots)$.

References

- [1] Michael F. Barnsley. Fractals everywhere. 2nd ed. 1993.
- [2] Yuval Fisher. Fractal image compression: Theory and application. 1995.
- [3] Blagovest Sendov. Mathematical modeling of real-world images. Constructive Approximation. 1996, vol. 12, no. 1, p. 31-65.

- [4] Michael F. Barnsley. Superfractals. 2006.
- [5] Dmytro Mitin. Superfractal approximation of functions. Ukrainian Mathematical Journal, 2015, vol. 66, no. 9, p. 1435-1441.

SOME NONLOCAL PROBLEM FOR MIXED EQUATION WITH SECOND ORDER

Pirmyrat Gurbanov, Gurtmyrat Motukov

Magtymguly Turkmen State University, Ashgabat, Turkmenistan

Preface

The Nonlocal problems for mixed equation with second order were analyzed in theory of differential equations by many famous mathematics in world. First problems were analyzed in the papers F. Tricomi, S. Gellersted. After resolution mixed problems was analyzed in Soviet Union Mathematics M.A. Lavrentov, F.I. Frankl, A.B. Bisadze, I.N. Vekya where was showed problem Tricomi in many similarly problems in gas dynamics, mechanics and chemical engineering. While studying the problem of shock wave F.I. Frankl proposed mathematical model which describing that process. And that problem was called “shock problem” Frankl.

After was analyzed many problems by V.N. Vragov, T.D. Jurayev, M.M. Meredov, E.I. Moyseyev, A.N. Nahushev, M.S. Salahitdinov and other scientists in theory boundary value problems in mixed equations in a various directions.

Abstract

Let D be the bounded domain that is, a connected region in plane whose boundary consists of smooth curve σ in the region $y > 0$ which meets the x -axis in points $O(0,0)$ and $A(1,0)$ and two characteristics $\{OC: x = 0\}$ and $\{AC: x - y = 1\}$ that issue from O to A .

Problem: Find a regular solution $u(x, t)$ to equation

$$u_{xx} - \operatorname{sgn} u_{yy} + c(x, y)u = o. \quad (x, y) \in D \quad (1)$$

which satisfies the boundary conditions

$$u|_{\sigma} = \varphi(s), s \in \sigma \quad (2)$$

$$u_x|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad (-1 \leq y \leq 0) \quad (3)$$

$$u\left(-\frac{y}{2}, \frac{y}{2}\right) = \alpha u\left(0, \frac{y}{2}\right) + \varphi_2(y) \quad (4)$$

where $0 < \alpha < 0.5$ and $\varphi(s), \varphi_1(y), \varphi_2(y)$ are given continuously functions.

Theorem: Problem has unique solution regular solution.

Uniqueness: Let u and v be two difference solutions of given problem and let $w = u - v$, then w is solution of that problem which $\varphi(s) = 0, \varphi_1(y) = 0, \varphi_2(y) = 0$ conditions. So by Maximum Property easy to show $w \equiv 0$. so uniqueness showed.

Existence: Let $u|_{x=0} = g(y)$ then equation (1) with condition (3) has unique solution :(as well-known Cauchy problem)

$$u(x, y) = \frac{g(x+y) + g(y-x)}{2} + \frac{1}{2} \int_{y-x}^{y+x} \varphi_1(y) I_0 \left[\lambda \sqrt{(y-t)^2 - x^2} \right] dt \\ - \frac{1}{2} \int_{y-x}^{y+x} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x} I_0 \left[\lambda \sqrt{(y-t)^2 - x^2} \right] dt$$

Therefore, we have:

$$\alpha g\left(\frac{y}{2}\right) + \varphi_2(y) \\ = \frac{g(y) + g(0)}{2} + \frac{1}{2} \int_y^0 \varphi_1(t) I_0 \left[\lambda \sqrt{\left(\frac{y}{2} - t\right)^2 - \frac{y^2}{4}} \right] dt \\ - \frac{1}{2} \int_{y-x}^{y+x} g(t) \frac{\partial}{\partial x} I_0 \left[\lambda \sqrt{(y-t)^2 - x^2} \right] dt \Bigg|_{x=-0.5y, y=0.5y}$$

In addition, we have functional equation:

$$g(y) - \beta g(0.5y) - \int_y^0 g(t) K(y, t) dt = f(y)$$

where: $\beta = 2\alpha$

$$f(y) = 2\varphi_2(y) - g(0) - \int_y^0 \varphi_1(t) I_0 \left[\lambda \sqrt{\left(\frac{y}{2} - t\right)^2 - \frac{y^2}{4}} \right] dt$$

$$K(y, t) = - \int_{y-x}^{y+x} \frac{\partial}{\partial x} I_0 \left[\lambda \sqrt{(y-t)^2 - x^2} \right] dt \Big|_{x=-0.5y, y=0.5y}$$

By iteration method easy to check

$$g(y) + Ag = Bf$$

where:

$$Ag = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^n \int_{\frac{y}{2^n}}^0 g(t) K\left(\frac{y}{2^n}, t\right) dt \text{ and } Bf = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^n f\left(\frac{y}{2^n}\right)$$

By Fixed Point Theorem easy to show operator A is converges also, using Weierstrasses Property we can get operator B is converges. Therefore, we find g. Then our problem translated the Tricomi equation, which well-known analyzed before.

References

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1972. 50с.
2. Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. Дифференциал уравнения. 1969. Т.5. №1. 44-59с.
3. Бицадзе А.Н. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., Наука, 1981. 448с.

SOME PROBLEMS FOR MIXED EQUATION WITH FOURTH ORDER

Shamyrat Atayev

The Ministry Education of Turkmenistan

Abstract

We consider some mixed problem for fourth order hyperbolic equation. Let D be bounded smooth in $(t \leq 0)$ with characteristic Cone (S) on $t < 0$ and S_0 plane in $t = 0$. Let

$$LU \equiv K^2U + L_1U = F(x, y, t) \quad (1)$$

where: K is the following operator

$$K \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + t^3 \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

L_1U is linear operator of second order which coefficient's on $C^2(\bar{D})$;

$$\Gamma = S_0 \cup S.$$

Problem: Find a regular solution $u(x, t)$ to equation (1) which satisfies the boundary conditions:

$$1) U(x_0, y, t) \in C^4(D) \cap C^3(\bar{D}), LU \in L_2(D) \quad (2)$$

$$2) U(x, y, t)|_S = 0 \quad (3)$$

$$3) U(x, y, 0) = 0, U_t(x, y, 0) = 0 \quad (4)$$

Note: Let G be the set of functions, which satisfies (1), (2), (3) and (4).

Lemma: If $U, V \in G$ and

$$\begin{aligned} L_1U &\equiv A^{(1)}U_{xx} + 2A^{(2)}U_{xy} + A^{(3)}U_{yy} + \\ &+ A^{(4)}U_{tt} + a^{(1)}U_x + a^{(2)}U_y + a^{(3)}U_t + cU, \end{aligned} \quad (5)$$

then equality (6) is true

$$\begin{aligned}
& \int_D \left\{ KU * KV - A^{(1)}U_x V_x - A^{(2)}(U_x V_y + U_y V_x) - A^{(3)}U_y V_y - A^{(4)}U_t V_t \right\} d\tau + \\
& + \frac{1}{2} \int_D \left\{ A_x^{(1)}(UV_x - U_x V) + A_y^{(2)}(UV_x - U_x V) + A_x^{(2)}(UV_y - U_y V) \right\} d\tau + \quad (6) \\
& + \frac{1}{2} \int_D \left\{ A_y^{(3)}(UV_y - U_y V) + A_t^{(4)}(UV_t - U_t V) \right\} d\tau + \\
& + \frac{1}{2} \int_D \left\{ A_{xx}^{(1)} + 2A_{xy}^{(2)} + A_{yy}^{(3)} + A_{tt}^{(4)} - a_x^{(1)} - a_y^{(2)} - a_t^{(3)} + 2c \right\} UV d\tau = \\
& = \int_D V(x, y, t) F(x, y, t) d\tau
\end{aligned}$$

where $d\tau = dx dy dt$.

Proof of lemma: Multiply V to (1) and taking integral by D:

$$\int_D (LU * V) d\tau = \int_D V * F d\tau. \text{ Integrating by part on left side equality and}$$

using Grin formula and

$$\begin{aligned}
& \int_D \left\{ KU * KV - A^{(1)}U_x V_x - A^{(2)}(U_x V_y + U_y V_x) - A^{(3)}U_y V_y - A^{(4)}U_t V_t \right\} d\tau + \\
& + \frac{1}{2} \int_D \left\{ A_x^{(1)}(UV_x - U_x V) + A_y^{(2)}(UV_x - U_x V) + A_x^{(2)}(UV_y - U_y V) + A_y^{(3)}(UV_y - U_y V) \right\} d\tau + \\
& + \frac{1}{2} \int_D \left\{ A^{(4)}(UV_t - U_t V) d\tau + \frac{1}{2} \int_D (A_{xy}^{(2)} + A_{yy}^{(3)} - a_x^{(1)} - a_y^{(2)} - a_t^{(3)} + 2c) \right\} UV d\tau + \\
& + \int_{\Gamma} \left\{ (U_{ttt} V - U_{tt} V_t) V_3 + t(U_{ttx} V - U_{tt} V_x) V_1 + t^3(U_{tty} V - U_{tt} V_y) V_2 \right\} ds + \\
& + \int_{\Gamma} \left\{ (U_{xxt} V - U_{xx} V_t) V_3 + t(U_{xxx} V - U_{xx} V_x) V_1 + t^3(U_{xxy} V - U_{xx} V_y) V_2 \right\} ds + \\
& + \int_{\Gamma} \left\{ (U_{yyt} V - U_{yy} V_t) V_3 + t(U_{yyx} V - U_{yy} V_x) V_1 + t^3(U_{yyy} V - U_{yy} V_y) V_2 \right\} ds + \\
& + \int_{\Gamma} \left\{ \left(A^{(1)}U_x - \frac{1}{2}A_x^{(1)} \right) V_1 + \left(A^{(2)}U_x - \frac{1}{2}A_x^{(2)}U \right) V_2 + \left(A^{(2)}U_y - \frac{1}{2}A_x^{(2)}U \right) V_1 + \right. \\
& \left. \left(A^{(3)}U_y - A_y^{(3)}U \right) V_2 \right\} V ds + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ a^{(1)}V_1 + a^{(2)}V_2 + a^{(3)}V_3 \right\} UV ds = \int_D V(x, y, t) F(x, y, t) d\tau \quad (8)
\end{aligned}$$

where: v_1, v_2, v_3 is $v_1 = \cos(\nu, x)$, $v_2 = \cos(\nu, y)$, $v_3 = \cos(\nu, t)$, is normal to Γ .

It is clearly to check

$$J_1(S) = \int_{\Gamma} \left\{ (U_{ttt} V - U_{tt} V_t) v_3 + t (U_{ttx} V - U_{tt} V_x) v_1 + t^3 (U_{tty} V - U_{tt} V_y) v_2 \right\} ds =$$

$$= - \int_{\Gamma} U_{tt} \{ v_3^2 + t v_1^2 + t^3 v_2^2 \} V_v ds = 0; \quad (9)$$

$$J_2(S) = - \int_{\Gamma} U_{xx} \{ v_3^2 + t v_1^2 + t^3 v_2^2 \} V_v ds = 0; \quad (10)$$

$$J_3(S) = - \int_{\Gamma} U_{yy} \{ v_3^2 + t v_1^2 + t^3 v_2^2 \} V_v ds = 0. \quad (11)$$

Using (4), (5) easy to see (6) equality hold.

On (7) equality choosing $U=V$ we will get equality:

$$\int_D \left\{ (KU)^2 - A^{(1)} U_x^2 - 2A^{(2)} U_x U_y - A^{(3)} U_y^2 + U_t^2 \right\} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_D \left(A_{xx}^{(1)} + 2A_{xy}^{(2)} + A_{yy}^{(3)} - a_x^{(1)} - a_y^{(2)} - a_t^{(3)} + 2c \right) U^2 d\tau =$$

$$= \int_D U(x, y, t) F(x, y, t) d\tau. \quad (12)$$

Theorem: Problem has unique solution if $A^{(1)}(x, y, t) < 0$,
 $A^{(3)}(x, y, t) < 0$, $A^{(1)}$ $A^{(3)} > (A^{(2)})^2$ and
 $A_{xx}^{(1)} + 2A_{xy}^{(2)} + A_{yy}^{(3)} - a_x^{(1)} - a_y^{(2)} - a_t^{(3)} + 2c \geq G > 0$.

Proof of this was proved using Chauchy-Swarz Inequality and given condition. Generally, problem translated to Lax – Milgram theorem.

References

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
2. Нагумо М. Лекции общей теории дифференциальных уравнений частных производных. Издательство «Мир» 1967.

POINTWISE APPROXIMATION BY BERNSTEIN POLINOMIALS

Gancho T. Tachev

*Dept. of Mathematics, University of Architecture,
Civil Engineering and Geodesy*

Abstract. We improve the degree of pointwise approximation of continuous function $f(x)$ by Bernstein operator, when x is close to the endpoints of $[0, 1]$. We apply the new estimate to establish upper and lower pointwise estimates for logarithmic function. At the end we prove general statement for pointwise approximation by Bernstein operator.

Key words and phrases: Bernstein polynomials; Direct theorems; Ditzian-Totik moduli of smoothness.

Introduction

In 1994 Ditzian showed in [3], that for the Bernstein polynomials

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1] \quad (1.1)$$

the pointwise approximation

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq C \omega_{\varphi^\lambda}^2(f, n^{-\frac{1}{2}} \varphi(x)^{1-\lambda}), \quad x \in [0, 1] \quad (1.2)$$

holds true for $\lambda \in [0, 1]$, $\varphi(x) := \sqrt{x(1-x)}$ and $f \in C[0, 1]$, where the Ditzian-Totik modulus of second order is given by

$$\omega_{\varphi^\lambda}^2(f, t) := \sup_{0 < h \leq t} \sup_{x \pm h\varphi^\lambda(x) \in [0, 1]} \left| f\left(x - h\varphi^\lambda(x)\right) - 2f(x) + f\left(x + h\varphi^\lambda(x)\right) \right|. \quad (1.3)$$

We recall that this modulus is equivalent to the K -functional

$$K_{\varphi^\lambda}(f, t^2) = \inf \left(\|f - h\|_{C[0, 1]} + t^2 \|\varphi^{2\lambda} h''\|_{C[0, 1]} \right), \quad (1.4)$$

where the infimum is taken on functions, satisfying $h \in AC, h' \in AC_{loc}$ (see [4]). In 1998 Felten proved in [5] more general inequality

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq C \omega_\Phi^2(f, n^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}), x \in [0,1], \quad (1.5)$$

where $\Phi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ is an admissible step-weight function of the Ditzian-Totik modulus and Φ^2 is a concave function. The aim of this note is to improve the estimate (1.2) for $\lambda=1$, when x is close to the endpoints of $[0,1]$.

Let us define

$$\delta(n, x) := \min \left\{ n^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{x(1-x)}{n} \right)^{\frac{1}{4}} \right\}. \quad (1.6)$$

Our main results is:

Theorem 1 *The pointwise approximation*

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq C \omega_\Phi^2(f, \delta(n, x)), x \in [0,1] \quad (1.7)$$

holds true for all $f \in C[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$.

In Section 2 we give the proof of Theorem 1. In Section 3 we establish upper and lower bounds for approximation of logarithmic function by Bernstein operator.

Proof of Theorem 1. Let us define $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ as

$$g(x) = x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x), x \in (0,1) \quad (2.1)$$

and $g(0) = g(1) := 0$. The problem to evaluate the remainder term

$$R_n(g, x) = B_n(g, x) - g(x), x \in [0,1] \quad (2.2)$$

was formulated by the author in [13] as open problem during the fifth Romanian-German Seminar on Approximation Theory, held in Sibiu, Romania in 2002. More precisely, we proposed to find (best) bounds of the type

$$k_1 \cdot \frac{x^{\alpha_1}(1-x)^{\alpha_2}}{n^\beta} \leq R_n(g, x) \leq K_2 \frac{x^{a_1}(1-x)^{a_2}}{n^b}, x \in [0,1]$$

where k_1 and K_2 are positive numbers, independent of x and n .

Some days after the conference Lupaş has shown that the above holds with $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = 1$, $k_1 = \frac{1}{2}$ and $a_1 = a_2 = b = \frac{1}{2}$, $K_2 = \sqrt{2}$ see[7,8], namely

$$\frac{x(1-x)}{2n} \leq R_n(g, x) \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}. \quad (2.3)$$

The function g was applied in the following direct estimate, proved by Parvanov and Popov in [11]: If $L: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ is a linear positive operator, preserving linear functions then

$$|L(f, x) - f(x)| \leq 2\|f - h\|_{C[0,1]} + |L(g, x) - g(x)| \cdot \|\varphi^2 h''\|_{C[0,1]} \quad (2.4)$$

holds for arbitrary $h \in AC$, $h' \in AC_{loc}$, $\|\varphi^2 h''\|_{C[0,1]} < \infty$.

Instead of L we write B_n and apply the r.h.s. of (2.3). Hence

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq 2\|f - h\|_{C[0,1]} + \sqrt{2} \left(\frac{x(1-x)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\varphi^2 h''\|_{C[0,1]}. \quad (2.5)$$

Therefore

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq 2K_\varphi \left(f, \left(\frac{x(1-x)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (2.6)$$

From the equivalence between $K_\varphi(f, t^2)$ and $\omega_\varphi^2(f, t)$ it follows

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq C\omega_\varphi^2 \left(f, \left(\frac{x(1-x)}{n} \right)^{\frac{1}{4}} \right). \quad (2.7)$$

The estimates (2.7) and (1.2) with $\lambda=1$ complete the proof.

Upper and lower pointwise bounds

As a straightforward corollary from Theorem 1 we get

Corollary 1 *The pointwise approximation*

$$|B_n(g, x) - g(x)| \leq C\omega_\varphi^2 \left(g, \sqrt[4]{\frac{x(1-x)}{n}} \right), \quad x \in [0,1] \quad (3.1)$$

holds true for all $n \in \mathbb{N}$.

Remark 1 If x is close to the ends of $[0,1]$ the estimate (3.1) is better than that in (2.1) for $\lambda=1$, established by Ditzian in [3].

Remark 2 Other direct pointwise estimates in terms of K_2^φ are proved in [5]. We point out that neither from [5], nor from [3] it is possible to deliver (3.1) as a straightforward corollary.

We continue with lower pointwise bounds. In Theorem 11 in [1] using the function $g(x)$ as “universal” tool, the authors proved that

$$c(g)\omega_2 \left(g, \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \right) \leq |B_n(g, x) - g(x)| \quad (3.2)$$

does not hold. So the question arises: “Which kind of moduli is appropriate to serve as lower pointwise bound for $|B_n(g, x) - g(x)|$?” The answer is given in the next

Theorem 2 *The following holds true*

$$c \cdot \omega_2^\varphi \left(g, \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \right) \leq |B_n(g, x) - g(x)|. \quad (3.3)$$

Proof. Using the equivalence between $K_2^\varphi(g, t^2)$ and $\omega_2^\varphi(g, t)$ we compute

$$\begin{aligned} c \omega_2^\varphi \left(g, \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \right) &\leq K_2^\varphi \left(g, \frac{x(1-x)}{n} \right) \\ &:= \inf_h \left\{ \|g - h\|_{C[0,1]} + \frac{x(1-x)}{n} \cdot \|\varphi^2 h''\|_{C[0,1]} \right\} \\ &\leq \|g - g\|_{C[0,1]} + \frac{x(1-x)}{n} \cdot \|\varphi^2 g''\|_{C[0,1]} = \frac{x(1-x)}{n} \leq 2|B_n(g, x) - g(x)|, \end{aligned} \quad (3.4)$$

where the last inequality follows from (2.3). The proof is completed.

Remark 3. It was pointed out in [1] that for $f(x) = x^3$, $x \in [0,1]$ similar to (3.3) estimate is not possible.

Remark 4. Theorems 2 and 3 imply for the logarithmic function $g(x)$ from (2.1) the two-sided pointwise inequality

$$c \omega_2^\varphi \left(g, \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \right) \leq |B_n(g, x) - g(x)| \leq C \omega_2^\varphi \left(g, \sqrt[4]{\frac{x(1-x)}{n}} \right). \quad (3.5)$$

Very recently, motivated by the result of Lupaş and considerations, made in [1,2,11] we proved in [14] that the values of $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ and $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ in (1.7) are optimal, namely

Theorem A. *It is not possible to find $\alpha_1 > \frac{1}{2}$, or $\alpha_2 > \frac{1}{2}$, or $\alpha_1 < 1$, or $\alpha_2 < 1$, such that*

$$k_1 \cdot \frac{x^{\alpha_1(1-x)^{\alpha_2}}}{n} \leq R_n(g, x) \leq K_2 \frac{x^{\alpha_1(1-x)^{\alpha_2}}}{\sqrt{n}},$$

holds true for all $x \in [0,1]$ with some positive numbers k_1, K_2 , independent of x and n .

Our next statement is

Theorem 3. *In both sides of (3.5) it is not possible to put one and the same modulus – neither $\omega_2^\varphi\left(g, \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)$, nor $\omega_2^\varphi\left(g, \sqrt[4]{\frac{x(1-x)}{n}}\right)$.*

Proof. First we suppose that $\omega_2^\varphi\left(g, \sqrt[4]{\frac{x(1-x)}{n}}\right)$ could be placed in the left hand side of (3.5). Setting $x = \frac{1}{2}$ in (1.3) we obtain

$$\Delta_{h\varphi}^2 g\left(\frac{1}{2}\right) = h^2 \cdot \varphi^2\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g''(\xi) \geq h^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)} = h^2.$$

Hence by $:= \sqrt[4]{\frac{x(1-x)}{n}}$, $x \in [0,1]$ – fixed it follows $\omega_\varphi^2(g, t) \geq t^2 = \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$. From our supposition and the last inequality we get $c \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \leq |B_n(g, x) - g(x)|$, which contradicts the statement of Theorem A (left hand side of the inequality, by $x \rightarrow 0$).

Also if we suppose that $\omega_2^\varphi\left(g, \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)$ could be placed in the right hand side of (3.5) due to the fact that (see [4]) $\omega_2^\varphi(g, t) \leq Ct^2 \|\varphi^2 g''\| = Ct^2 \cdot 1$, the last inequality would imply

$|B_n(g, x) - g(x)| \leq C \frac{x(1-x)}{n}$, which again contradicts Theorem A (right hand side of the inequality, by $x \rightarrow 0$). The proof of Theorem 3 is completed.

Remark 5. The upper pointwise bound in (3.1) in terms of the classical modulus of continuity $\omega_2\left(g, \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)$ was first established in [12]. As already mentioned, this modulus is not appropriate as lower bound.

It is known that for the “test” function $f_1(x) = x^2$, $x \in [0,1]$ we have

$$B_n(f_1, x) - f_1(x) = \frac{x(1-x)}{n} \approx \omega_2\left(f_1, \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right). \quad (3.6)$$

What is the situation for all other continuous functions $f(x)$? According to this question we formulate the following

Theorem 4. *There are no constants $c(f)$ and $C(f)$ such that*

$$c(f)\Omega_2(f, \Delta(n, x)) \leq |B_n(f, x) - f(x)| \leq C(f)\Omega_2(f, \Delta(n, x)), \quad (3.7)$$

holds true for all $f \in C[0,1]$, all $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ with appropriate constructive characteristic $\Omega_2(f, \cdot)$, which obey the properties of second order modulus of smoothness (or related K -functional) and argument $\Delta(n, x)$.

Proof. The proof follows immediately from Theorem A and (2.3) for $g(x)$. We fix n , $n \in \mathbb{N}$ and take $x \rightarrow 0$. If we suppose that (3.7) holds true, this would imply simultaneously

$$\Omega_2(g, \Delta(n, x)) \leq k_1 \frac{x(1-x)}{n}, \quad x \rightarrow 0,$$

$$\Omega_2(g, \Delta(n, x)) \geq K_2 \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}, \quad x \rightarrow 0,$$

with some positive constants k_1, K_2 - independent of n, x , which is not possible. Hence (3.7) fails for $g(x)$.

Remark 6. The case of “norm” estimates is quite different. We mention here the well – known equivalence result of Knoop and Zhou for Bernstein operator, namely

$$c\omega_2^\varphi\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \|B_n f - f\|_{C[0,1]} \leq C\omega_2^\varphi\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (3.8)$$

established in 1994 in [6]. Similar strong converse inequalities are valid for many other linear positive operators.

Acknowledgment. This note is dedicated to the memory of late Professor Alexandru Lupaş – one of the organizers of Romanian – German Seminars on Approximation Theory and distinguished Romanian mathematician, teacher and friend.

In [2] the authors formulated the following

Conjecture. *Let $T_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ be a sequence of linear operators and $\varepsilon_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, $\varphi(x) = \varphi(x)_{[a,b]} = \sqrt{(x-a)(b-x)}$, and $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$ fixed. If for every $f \in C[a, b]$ one has*

$$|T_n(f, x) - f(x)| \leq C(f) \omega_2^{\varphi^\lambda} \left(f; \varepsilon_n \varphi^{1-\lambda}(x) \right), \quad (4.1)$$

then lower pointwise estimates

$$c(f) \omega_2^{\varphi^\beta} \left(f; \varepsilon_n \varphi^{1-\lambda}(x) \right) \leq |T_n(f, x) - f(x)|, f \in C[a, b], \quad (4.2)$$

do not hold in general.

The case $\beta = 0$ was already solved by the same authors in Theorem 3.1 in [1]. Instead of T_n we consider further only the classical Bernstein operator B_n applied to a continuous on $[0,1]$ function $f(x)$. By usual translation all considerations over the interval $[0,1]$ could be transformed into the interval $[a,b]$. Our main result states the following

Theorem 5. Let $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$, $x \in [0,1]$ and $0 \leq \beta < \lambda \leq 1$ be fixed. For the function $g(x)$, defined in above one has

$$|B_n(g, x) - g(x)| \leq C(g) \omega_2^{\varphi^\lambda} \left(g; \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi^{1-\lambda}(x) \right), \quad (4.3)$$

but the lower pointwise estimate

$$c(g) \omega_2^{\varphi^\beta} \left(g; \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi^{1-\lambda}(x) \right) \leq |B_n(g, x) - g(x)|, \quad (4.4)$$

is not valid.

Proof. We recall the definition of the moduli $\omega_2^{\varphi^\lambda}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, which is in complete analogy to those of $\omega_2(f, \cdot)$, ($\lambda=0$) and $\omega_2^\varphi(f, \cdot)$, ($\lambda=1$), (see[4], Chap.2):

$$\omega_2^{\varphi^\lambda}(f, t) = \sup_{0 \leq h \leq t} \left\| \Delta_{h\varphi^\lambda}^2 f \right\|_\infty, \quad (4.5)$$

where

$$\Delta_{h\varphi^\lambda}^2 f(x) := \begin{cases} f(x - h\varphi^\lambda(x)) - 2f(x) + f(x + h\varphi^\lambda(x)), \\ \text{if } [x - h\varphi^\lambda(x), x + h\varphi^\lambda(x)] \subseteq [0,1]; \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.6)$$

The direct pointwise estimate was proved by Ditzian in [3] for all continuous functions, defined in $[0,1]$ and in particular it holds for $g(x)$ too. We suppose that (4.4) holds true. Setting $x = \frac{1}{2}$ in (4.6) we obtain

$$A_{h\varphi^\beta}^2 g\left(\frac{1}{2}\right) = h^2 \cdot \varphi^{2\beta}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g''(\xi) \geq h^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2\beta} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)} = h^2 \cdot 2^{2(1-\beta)}.$$

Hence by $t := \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi^{1-\lambda}(x)$, $x \in [0,1]$ – fixed it follows

$$\omega_2^{\varphi^\beta}(g, t) \geq t^2 \cdot 2^{2(1-\beta)} = \frac{1}{n}(x(1-x))^{1-\lambda} \cdot 2^{2(1-\beta)}. \quad (4.7)$$

From our supposition and (4.7) we get

$$c(g) \cdot 2^{2(1-\beta)} \cdot \frac{x^{1-\lambda}(1-x)^{1-\lambda}}{n} \leq |B_n(g, x) - g(x)| \quad (4.8)$$

for $0 \leq \beta < \lambda \leq 1$. It is clear that for $\lambda=1$ (4.8) is not possible, because due to (1.7) it would lead to

$$c(g) \cdot 2^{2(1-\beta)} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}, \text{ for all } x \in [0,1], \quad (4.9)$$

which is a contradiction.

Consequently for $0 \leq \beta < \lambda < 1$ (4.8) would imply, that (1.8) is valid with $\alpha_1 = 1 - \lambda < 1$, which contradicts the statement of Theorem B. Thus the proof of Theorem 5 is completed.

Proof of Theorem A

Theorem A. *It is not possible to find $a_1 > \frac{1}{2}$, or $a_2 > \frac{1}{2}$, or $\alpha_1 < 1$, or $\alpha_2 < 1$, such that*

$$k_1 \cdot \frac{x^{\alpha_1(1-x)^{\alpha_2}}}{n} \leq R_n(g, x) \leq K_2 \frac{x^{\alpha_1(1-x)^{\alpha_2}}}{\sqrt{n}}, \quad (6)$$

holds true for all $x \in [0,1]$ with some positive numbers k_1, K_2 , independent of x and n .

The result of Lupaş is based on previous results established in [3,5,6]. For example we cite here Corollary 3.2 in [3] (see also Chapter 10 in [1]) as

Theorem B *If $\lambda(x) = x \ln x$, $x \in (0, 1)$, $\lambda(0)=0$ we have*

$$0 \leq A(\lambda, x) - \lambda(\bar{x}) \leq \frac{A(f_2, x)}{\sqrt{\bar{x}^2 + A(f_2, x)}}, \quad (7)$$

with $\bar{x} = A(e_1)$, $f_2(t) = (t - \bar{x})^2$, $e_1: t \rightarrow t \in [0, 1]$ and A is linear positive functional with $A(e_0) = 1$, different from identity.

Proof of Theorem A. Due to symmetry it is enough to consider in

(6) only $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ and to study the possible values of the parameters α_1 and a_1 . It is easy to compute that

$$g''(x) = \frac{1}{x(1-x)}, \quad x \in (0,1), \quad (9)$$

i.e. g is a convex function on $[0, 1]$. Therefore

$$B_n(g, x) \geq g(x), \text{ for all } x \in [0, 1]. \quad (10)$$

If $S_n(g, x)$ is the piecewise linear interpolant for g at the points $0, \frac{1}{n}, \dots, 1$, then

$$B_n(S_n g, x) = B_n(g, x), \quad B_n(S_n g, x) \geq S_n(g, x), \quad (11)$$

due to the fact that $S_n g$ is also convex function. Consequently from (10) – (11) we get

$$B_n(g, x) - g(x) \geq S_n(g, x) - g(x). \quad (12)$$

First let us consider the r.h.s. of (6). We suppose that (6) holds with $a_1 > \frac{1}{2}$. Then from (12) it follows that

$$S_n(g, x) - g(x) \leq K_2 \frac{x^{a_1(1-x)^{a_2}}}{\sqrt{n}}, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \quad (13)$$

We compute for $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ that

$$S_n(g, x) = nx \cdot g\left(\frac{1}{n}\right) = nx \left[\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] = x \left[\ln\left(\frac{1}{n}\right) + (n-1) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right]. \quad (14)$$

Also we verify that for $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$g(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x) \leq x \ln x. \quad (15)$$

Consequently (13) and (15) yield

$$x \left[-\ln n + (n-1) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] - x \ln x \leq K_2 \frac{x^{a_1(1-x)^{a_2}}}{\sqrt{n}} \quad (16)$$

for $0 < x \leq \frac{1}{n}$. Therefore

$$-x \ln(nx) + x \left[(n-1) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] \leq K_2 \frac{x^{a_1(1-x)^{a_2}}}{\sqrt{n}} \quad (17)$$

Hence we get

$$x \ln \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{nx} \right] \leq K_2 \frac{x^{a_1(1-x)^{a_2}}}{\sqrt{n}}.$$

Consequently

$$x^{1-a_1} \cdot \sqrt{n} \leq \frac{K_2 \cdot (1-x)^{a_2}}{\ln \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{nx} \right]}. \quad (18)$$

We set $x = \frac{1}{2en}$ in (18) and take $n \rightarrow \infty$. Then we arrive at

$$+\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{a_1-1+\frac{1}{2}} \leq \frac{K_2}{\ln 2}, \quad (19)$$

when $a_1 > \frac{1}{2}$, which is a contradiction.

To study the best possible value of α_1 in (6) we may use the following estimate, proved by Popoviciu, 1935 in [8]

$$|B_n(g, x) - g(x)| \leq C\omega_2 \left(g, \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \right). \quad (20)$$

We suppose that (6) holds with $\alpha_1 < 1$. We set $x = \frac{1}{n}$ and get

$$k_1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha_1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha_2}}{n} \leq C\omega_2 \left(g, \frac{1}{n} \right) = C' \cdot \frac{1}{n} \quad (21)$$

with some positive constant C' . But the last estimate is obvious and we need to proceed in a different way. We observe that

$$R_n(x) = B_n(g, x) - g(x) \leq |g(x)|.$$

Then we would have

$$k_1(1-x)^{\alpha_2}n^{-1} \leq x^{-\alpha_1} \cdot |g(x)|,$$

which for $x \rightarrow 0$ gives a contradiction. The proof of Theorem 1 is completed.

References

- [1] Jia-ding Cao, Heiner Gonska and Daniela Kacso, On the impossibility of certain lower estimates for sequences of linear operators, *Mathematica Balkanica*, 19 (2005), 39-58.
- [2] Jia-ding Cao, Heiner Gonska and Daniela Kacso, On the second order classical and (weighted) Ditzian – Totik moduli of smoothness, “Mathematical Analysis and Approximation Theory” (Proc. 6th Romanian – German Seminar, ed. by I. Gavrea et. al.), Mediamira, Cluj-Napoca, (2005), 35-42.
- [3] Z. Ditzian, Direct estimate for Bernstein polynomials, *J. Approx. Theory*, 79 (1994), 165 – 166.

- [4] Z. Ditzian and V. Totik, *Moduli of Smoothness*, New York, Springer, 1987.
- [5] M. Felten, Direct and Inverse Estimates for Bernstein Polynomials. *Constr. Approx.*, 14 (1998), 459 – 468.
- [6] H. B. Knoop and X. –I. Zhou, The lower estimate for linear positive operators (II), *Results in Math.*, 25 (1994), 315 – 330.
- [7] A. Lupaş, L. Lupaş, V. Maier, The approximation of a class of functions. *Mathematical Analysis and Approximation Theory*, (Proc. 5th Romanian – German Seminar, ed. by A. Lupaş et. al.), Burg – Verlag, ISBN 973-85647-4-3, 2002, 155 – 168.
- [8] A. Lupaş, On a problem proposed by G. Tachev. , (Proc. 5th Romanian – German Seminar, ed. by A. Lupaş et. al.) *Mathematical Analysis and Approximation Theory*, Burg - Verlag, ISBN 973-85647-4-3, 2002, pp. 326.
- [9] V. Maier, The L_1 - saturation class of the Kantorovich Operator, *J. Approx. theory*, 22 (1978), 227- 232.
- [10] V. Maier, A new proof for the Approximation of the *Log* – function by Kantorovich Polynomials in the L_p - norm, *Revue D' Analyse Numrique et de Theorie de L' Approximation*, 28, no.2 (1999), 173- 177.
- [11] P. E. Parvanov, B. D. Popov, The Limit Case of Bernstein' s Operators with Jacobi – weights. *Math. Balkanica*, 8 (1994), no. 2-3, 165 – 177.
- [12] T. Popoviciu, Sur l' approximation des fonctions convexes d' ordre superieur, *Math. Cluj*, 10 (1935), 49 – 54.
- [13] G. Tachev, Three open problems. (Proc. 5th Romanian – German Seminar, ed. by A. Lupaş et. al.), *Mathematical Analysis and Approximation Theory*, Burg - Verlag, ISBN 973-85647-4-3, 2002, pp. 329.
- [14] G.Tachev, On the conjecture of Cao, Gonska and Kacso, in *Stud. Univ. Babes-Bolyai Math.*, 57(2012), no.1 , 83-88.

ЕДИН МЕТОД ЗА ПОЛУЧАВАНЕ НА ДИОФАНТОВИ УРАВНЕНИЯ С БЕЗБРОЙ РЕШЕНИЯ В ЦЕЛИ ЧИСЛА

*Доц. д-р инж. Анна Томова
ВВМУ “Н. Й. Вапцаров”*

Резюме. В тази работа предлагаме един метод за получаване на диофантови уравнения от втори ред, т. е. описващи конични сечения, които притежават безброй решения в цели числа. По – нататък илюстрираме особеностите на решенията с помощта на математическия сайт <http://www.wolframalpha.com/>.

Ключови думи: Диофантово уравнение, конични сечения, математически сайт <http://www.wolframalpha.com/>.

1. Въведение

Както знаем, един от първите разрешими да/не проблеми, поставен от Д. Хилберт в знаменития му списък от проблеми на XX век, е именно проблемът за диофантовите уравнения. Припомняме, че той се състои в това, дали съществува алгоритъм, чрез който може да се даде отговор на въпроса има ли произволно диофантово уравнение поне едно решение или няма. Окончателно доказателство, че проблемът за диофантовите уравнения е неразрешим, е достигнато от М. Дейвис и Ю. Матиясиевич през 1970 г. Следователно, всяко решаване на едно диофантово уравнение продължава да носи евентуална специфична информация за уравнението, притежава известна оригиналност и привлича нашето внимание. Ето защо в тази публикация авторът предлага един метод за създаване (генериране) на един клас диофантови уравнения от втора степен с две неизвестни, които описват конични сечения и притежават безброй решения в цели числа. С други думи, съответстващите им конични сечения минават през безкраен брой точки в равнината с целочислени координати. Както ще стане ясно по-нататък, съответстващите конични сечения с безброй точки с целочислени координати са хиперболи.

2. Основни резултати

В [3] е решена следната

Задача 171. *Решете уравнението $x^2 + x(y-1) - y^2 = 0$ в естествени числа $(x, y \in \mathbb{N})$, напечатана в том XII, брой 5, септември – октомври 2010 на списанието “Математически форум”, София, ISSN 1311-279X с автор Шефкет Арслангович, Сараево, Босна и Херцеговина.*

Както е доказано в [3], това диофантово уравнение има безброй решения в цели числа. Решенията се оказват тясно свързани с числата на Фибоначи a_n : членове на рекурентната редица: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, т. е. 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... В хода на предложеното решение се доказва, че между тях съществува връзката: $a_{2n+1}^2 + a_{2n+1}a_{2n+2} - a_{2n+2}^2 = 1$. Идеята на автора е да се намерят други рекурентни редици, между членовете на които да съществува подобна зависимост. От този факт ще следва, че могат да се посочат множество диофантови уравнения, свързани с тези рекурентни редици, които ще притежават безброй решения в цели числа. И така, разглеждаме следните рекурентни редици, дефинирани с формулите: $a_{n+2} = ka_{n+1} + a_n$ при зададени начални стойности a_0, a_1 и фиксирана (произволно) реална цяла стойност на числото k , но такава, че: $a_1^2 - ka_1a_0 - a_0^2 = 1$. Например, при $k = 2, a_0 = 0, a_1 = 1$, това ще бъде рекурентната редица: 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, ... При $k = 3, a_0 = 0, a_1 = 1$, това ще бъде рекурентната редица 0, 1, 3, 10, 33, 109, 360, ... Ще докажем следното

Твърдение. Между членовете на рекурентната редица с общ член: $a_{n+2} = ka_{n+1} + a_n$, където a_0, a_1, k са такива цели числа, че: $a_1^2 - ka_1a_0 - a_0^2 = 1$, съществува зависимостта: $a_{2n+1}^2 - ka_{2n+1}a_{2n} - a_{2n}^2 = 1$.

Доказателство на твърдението. Ще проведем доказателството с метода на пълната математическа индукция. От избора на целите

числа a_0, a_1, k е ясно, че формулата е вярна при началната стойност на $n=0$. Нека формулата е вярна за произволна стойност на n : $a_{2n+1}^2 - ka_{2n+1}a_{2n} - a_{2n}^2 = 1$. При следващата стойност на n : $n+1$ правим следните пресмятания:

$$\begin{aligned} a_{2n+3}^2 - ka_{2n+3}a_{2n+2} - a_{2n+2}^2 &= (ka_{2n+2} + a_{2n+1})^2 - k(ka_{2n+2} + a_{2n+1})a_{2n+2} - a_{2n+2}^2 = (ka_{2n+2})^2 \\ &+ 2ka_{2n+2}a_{2n+1} + a_{2n+1}^2 - (ka_{2n+2})^2 - ka_{2n+2}a_{2n+1} - a_{2n+2}^2 = a_{2n+1}^2 + ka_{2n+2}a_{2n+1} - a_{2n+2}^2 = \\ a_{2n+1}^2 + ka_{2n+1}(ka_{2n+1} + a_{2n}) - (ka_{2n+1} + a_{2n})^2 &= a_{2n+1}^2 + (ka_{2n+1})^2 + ka_{2n+1}a_{2n} - (ka_{2n+1})^2 \\ - 2ka_{2n+1}a_{2n} - a_{2n}^2 &= a_{2n+1}^2 - ka_{2n+1}a_{2n} - a_{2n}^2 = 1 \end{aligned}$$

Според метода на пълната математическа индукция тази формула остава вярна за всички естествени стойности на n , с което доказателството на твърдението е завършено.

Сега полагаме: $x = a_{2n+1}^2$; $y = a_{2n+1}a_{2n}$. Тогава безкрайното множество от тези цели числа е решение на диофантовото уравнение: $x^2 - kxy - x - y^2 = 0$.

Забележки:

- Ако положим обратно: $y = a_{2n+1}^2$; $x = a_{2n+1}a_{2n}$, тези цели числа ще бъдат решения на диофантовото уравнение: $y^2 - kxy - y - x^2 = 0$. Ако положим: $x = a_{2n+1}^2$; $y = -a_{2n+1}a_{2n}$, тези цели числа ще бъдат решения на диофантовото уравнение: $x^2 + kxy - x - y^2 = 0$. И накрая, ако положим обратно: $y = a_{2n+1}^2$; $x = -a_{2n+1}a_{2n}$, тези цели числа ще бъдат решения на диофантовото уравнение: $y^2 + kxy - y - x^2 = 0$.

- Уравнението $a_1^2 - ka_1a_0 - a_0^2 = 1$ е също диофантово. При избор $a_0 = 0, a_1 = 1$ то има безброй решения за всяко k . Членовете на рекурентните редици са:

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = ka_1 + a_0 = k, a_3 = ka_2 + a_1 = k^2 + 1,$$

$$a_4 = ka_3 + a_2 = k(k^2 + 1) + k = k^3 + 2k,$$

$$a_5 = ka_4 + a_3 = k(k^3 + 2k) + k^2 + 1 = k^4 + 3k^2 + 1...$$

Диофантовото уравнение при фиксирано k : $X^2 + kXY - Y^2 + 1 = 0$, както ще стане ясно по – долу, също подлежи на изследване. То също представя конично сечение и въпросът за неговите точки с целочислени координати при частния случай $k = 3$ е разрешен с помощта на математическия сайт <http://www.wolframalpha.com/>, където са показани графиката му: хипербола, както и част от целочислените му решения.

3. Обща формула за целочислените решения на разглежданите диофантови уравнения

Както е известно [2], формулата за общия член на рекурентната редица $a_{n+2} = ka_{n+1} + a_n$ се намира след решаване на т. н. характеристическо уравнение $q^2 - kq - 1 = 0$, чиито решения са:

$$q_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2} : 2 \text{ различни реални числа. Следователно, съотношението: } a_{n+2} = ka_{n+1} + a_n \text{ ще удовлетворяват редиците с общ член:}$$

$$a_n = \left(\frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^n, a_n = \left(\frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^n, \text{ а също и техните линейни}$$

$$\text{комбинации (и само те!): } a_n = c_1 \left(\frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^n.$$

Сред тях трябва да подберем тази, за която:

$$c_1 + c_2 = a_0; c_1 \left(\frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right) = a_1,$$

$(a_0, a_1) \neq (0, 0), a_1^2 - ka_1a_0 - a_0^2 = 1$. Решенията на тази система на

$$\text{Крамер са: } c_1 = \frac{2a_1 - a_0 \left(k - \sqrt{k^2 + 4} \right)}{2\sqrt{k^2 + 4}}; c_2 = \frac{a_0 \left(k + \sqrt{k^2 + 4} \right) - 2a_1}{2\sqrt{k^2 + 4}}.$$

Окончателно, формулата за общия член на рекурентната редица

$$a_{n+2} = ka_{n+1} + a_n \text{ e:}$$

$$a_n = \frac{2a_1 - a_0 \left(k - \sqrt{k^2 + 4} \right)}{2\sqrt{k^2 + 4}} \left(\frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^n + \frac{a_0 \left(k + \sqrt{k^2 + 4} \right) - 2a_1}{2\sqrt{k^2 + 4}} \left(\frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^n.$$

Тогава целочислените решения на диофантовото уравнение

$$x^2 - kxy - x - y^2 = 0 \text{ се дават с формулите:}$$

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{2a_1 - a_0 \left(k - \sqrt{k^2 + 4} \right)}{2\sqrt{k^2 + 4}} \left(\frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^{2n+1} + \frac{a_0 \left(k + \sqrt{k^2 + 4} \right) - 2a_1}{2\sqrt{k^2 + 4}} \left(\frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^{2n+1} \right)^2 \\ y &= \left(\frac{2a_1 - a_0 \left(k - \sqrt{k^2 + 4} \right)}{2\sqrt{k^2 + 4}} \left(\frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^{2n+1} + \frac{a_0 \left(k + \sqrt{k^2 + 4} \right) - 2a_1}{2\sqrt{k^2 + 4}} \left(\frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^{2n+1} \right) \\ &\quad \left(\frac{2a_1 - a_0 \left(k - \sqrt{k^2 + 4} \right)}{2\sqrt{k^2 + 4}} \left(\frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^{2n} + \frac{a_0 \left(k + \sqrt{k^2 + 4} \right) - 2a_1}{2\sqrt{k^2 + 4}} \left(\frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^{2n} \right), n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

По подобен начин можем да запишем формулите за целочислените решения на останалите разглеждани диофантови уравнения: $y^2 - kxy - y - x^2 = 0$, $x^2 + kxy - x - y^2 = 0$, $y^2 + kxy - y - x^2 = 0$ (гл. по-горе).

4. Решение на диофантовото уравнение

$$X^2 + kXY - Y^2 + 1 = 0.$$

Както се очаква, решенията на диофантовото уравнение $X^2 + kXY - Y^2 + 1 = 0$, са тясно свързани с решенията на разглежданите по-горе диофантови уравнения. Отново разглеждаме рекурентните редици: $a_{n+2} = ka_{n+1} + a_n$, където a_0, a_1, k са такива цели

числа, че е изпълнено съотношението: $a_1^2 - ka_1a_0 - a_0^2 = 1$. Тогава, както вече доказахме, формулата: $a_{2n+1}^2 - ka_{2n+1}a_{2n} - a_{2n}^2 = 1$ е вярна за произволна стойност на n . Сега полагаме:

$$\begin{aligned}
 x = a_{2n} &= \frac{2a_1 - a_0(k - \sqrt{k^2 + 4})}{2\sqrt{k^2 + 4}} \left(\frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^{2n} \\
 &+ \frac{a_0(k + \sqrt{k^2 + 4}) - 2a_1}{2\sqrt{k^2 + 4}} \left(\frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^{2n}, \\
 y = a_{2n+1} &= \frac{2a_1 - a_0(k - \sqrt{k^2 + 4})}{2\sqrt{k^2 + 4}} \left(\frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^{2n+1} \\
 &+ \frac{a_0(k + \sqrt{k^2 + 4}) - 2a_1}{2\sqrt{k^2 + 4}} \left(\frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2} \right)^{2n+1}.
 \end{aligned}$$

Следователно, това са целочислени решения за диофантовото уравнение: $X^2 + kXY - Y^2 + 1 = 0$, а така също безброй възможности за избора на началните стойности във формулите на разглежданите по – горе диофантови уравнения.

Забележки:

- Отново правим същата забележка, както по –горе. И тук стигаме до същото диофантово уравнение: $a_1^2 - ka_1a_0 - a_0^2 = 1$. Както вече споменахме, при избор $a_0 = 0, a_1 = 1$ то има безброй решения за всяко k . Членовете на рекурентните редици са: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = k, a_3 = ka_2 + a_1 = k^2 + 1, a_4 = ka_3 + a_2 = k^3 + 2k, a_5 = ka_4 + a_3 = k^4 + 3k^2 + 1, \dots$ За частния случай $k = 3$ забележете връзката между целочислените решения на диофантовото уравнение $X^2 + kXY - Y^2 + 1 = 0$, като използвате за тази цел помощта на математическия сайт <http://www.wolframalpha.com/>.

- В резюме: притежаваме избор за безброй много начални

стойности a_0, a_1 при фиксирана стойност на параметъра k за получените в началото на статията диофантови уравнения, които са целочислени решения на диофантовото уравнение $X^2 + kXY - Y^2 + 1 = 0$. От своя страна, тези безброй решения за началните стойности a_0, a_1 също зависят от нови начални стойности – целочислени решения на същото диофантово уравнение $X^2 + kXY - Y^2 + 1 = 0$. По този начин, подробно разглеждайки предложения метод за получаване на диофантови уравнения от втори ред с безброй целочислени решения, ние можем да направим заключението, че прилагаме основния метод от фракталната геометрия: метода на последователните приближения за получаване на фрактални изображения (метод на Barnsley), с което още веднъж подчертаваме, че фракталната геометрия е ново, по – прецизно обяснение на различни математически проблеми и явления [1].

5. Заключение

Съвременните информационни технологии ни помагат да възприемем много по-голяма информация от подходящото илюстриране на математическите резултати. Едновременно с това получаваме възможност да получим решения, чието търсене в много случаи изисква по – голям обем от математически знания, както в случая при решаване на диофантово уравнение с безброй решения в цели числа. ***Всяко посочване на решение, както и неговото илюстриране с помощта на съвременните информационни технологии показват, че става дума за решен математически проблем.*** Ето защо, интересни за решаване остават само математически задачи и проблеми, които не се решават с помощта на съвременните информационни технологии. Разбира се, всички предложени решения трябва внимателно да бъдат проверявани.

Литература

1. Mandelbrot, Benoît (2004). *Fractals and Chaos*. Berlin: Springer. ISBN 978-0-387-20158-0. "A fractal set is one for which the fractal (Hausdorff-Besicovitch) dimension strictly exceeds the topological dimension"
2. Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М, 1971.
3. Томова А. В., Бележки върху решение на задача 171 и неговото илюстриране с помощта на съвременните информационни технологии (под печат).
4. <http://www.wolframalpha.com/examples/Numbers.html>

КАРДИНАЛНО-ЗНАЧНИ ИНВАРИАНТИ НА ЧАСТИЧНО НАРЕДЕНИ МНОЖЕСТВА

Д-р Красимир Марков
БМИ - ЕООД

Цел на настоящата статия е дефиниране и начално изследване на няколко кардиналнозначни инварианта на произволно частично наредено множество /ЧНМ/, по аналогия с кардиналнозначните инварианти в общата топология. Темата „кардиналнозначни инварианти” в общата топология започва с известната проблема на Александров: „всяко ли Хаусдорфово, компактно множество с първа аксиома за изброимост е с мощност по-малка или равна на мощността на континуума”, формулирана през двадесетте години на миналия век. Проблемата е решена положително през 1969г. от Архангелски. Това е и един своеобразен връх на интереса на математиците към тази тема. Независимо, че има много формулирани и все още нерешени задачи, касаещи кардиналнозначните инварианти на различни топологични пространства, то като че ли след решаването на проблемата на Александров има определен отлив на интереса на математиците и специално на тополозите към тази тематика. В [1], Архангелски формулира няколко нерешени задачи, свързани с кардиналнозначни инварианти на топологични пространства, както и една задача, свързана с ЧНМ: „ако в дадено ЧНМ всяка антиверига е крайна, а самото ЧНМ е с неизброима мощност, то съществува ли неизброима верига в това ЧНМ или не?”. В настоящата статия доказваме по нов начин един частичен резултат, касаещ тази проблема. Също така формулираме една нова обща хипотеза, касаеща кардиналнозначните инварианти на ЧНМ.

1. Основни дефиниции и свойства

Д1. Всяка линейно наредено подмножество на ЧНМ X наричаме верига в X .

Д2. Всяка подмножество на ЧНМ X , за което всеки два негови елемента са несравними в наредбата на X наричаме антиверига в X .

Д3. Най-малкото кардинално число, което мажорира мощността на всяка верига съдържаща елемента x наричаме верижен характер на x и го бележим с $Chain(x, X)$. Най-малкото кардинално число α , за което е изпълнено $Chain(x, X) \leq \alpha$ за всяко $x \in X$ наричаме верижен характер на множеството X и го бележим с $Chain(X)$.

Д4. Най-малкото кардинално число, което мажорира мощността на всяка антиверига, която съдържа елемента x наричаме антиверижен характер на x и го бележим с $AChain(x, X)$. Най-малкото кардинално число α , за което е изпълнено $AChain(x, X) \leq \alpha$ за всяко $x \in X$ наричаме антиверижен характер на множеството X и го бележим с $AChain(X)$.

Д5. Най-малкото кардинално число, което е мощност на фамилия от вериги в X , която се явява покритие на X наричаме верижен индекс на X и го бележим с $LIC(X)$.

Д6. Най-малкото кардинално число, което е мощност на фамилия от антивериги в X , която се явява покритие на X наричаме антиверижен индекс на X и го бележим с $LIAC(X)$.

Ще приведем няколко примера, от които се вижда как се пресмятат тези инварианти за конкретни множества.

2. Примери

2.1. Множеството на естествените числа N с обичайната наредба. За това множество очевидно $Chain(n, N) = \aleph_0$, следователно и $Chain(N) = \aleph_0$. Очевидно $AChain(n, N) = AChain(N) = 1$, понеже множеството е линейно наредено. Очевидно $LIC(N) = 1$ и

$LIAC(N) = \aleph_0$ - отново поради линейната наредба.

2.2. Множеството на естествените числа N с наредбата „делимост“. За това множество очевидно $Chain(n, N) = \aleph_0$, следователно и $Chain(N) = \aleph_0$. Също така $AChain(n, N) = \aleph_0$, следователно и $AChain(N) = \aleph_0$. Изпълнено е

$$LIC(X) = LIAC(X) = \aleph_0.$$

2.3. Нека X е множество с мощност $|X| > \aleph_0$. Да разгледаме подfamiliena $Fin(X)$ на 2^X , състояща се от множествата с крайни допълнения. Това е един стандартен пример в общата топология. За тази фамилия, наредена спрямо включването е изпълнено $Chain(A, Fin(X)) = \aleph_0$, съответно $Chain(Fin(X)) = \aleph_0$. От друга страна $AChain(A, Fin(X)) = AChain(Fin(X)) = |X|$. Това следва от факта, че при всяка фиксирано $n \in N$, подмножествата на X , чието допълнение е с точно n елемента образуват антиверига. От последното следва и $LIAC(Fin(X)) = \aleph_0$. Също така $LIC(Fin(X)) = |X|$, понеже $|Fin(X)| = |X|$.

Тв.1. Изпълнени са очевидните неравенства $|X| \leq Chain(X).LIC(X)$ и $|X| \leq AChain(X).LIAC(X)$.

Нерешена задача от [1]: дадено е неизброимо ЧНМ в което всяка антиверига е крайна. Да се докаже, че в него съществува неизброима верига.

Следният частичен резултат принадлежи на Архангелски.

Тв.2. Ако X е безкрайно ЧНМ, в което всяка антиверига е крайна, то в X съществува безкрайна верига.

Доказателство. Нека с $[X]^2$ означим множеството от ненаредени двойки различни елементи на X . Дефинираме следното изобразение: $\varphi: [X]^2 \rightarrow \{0,1\}$, $\varphi: \{x,y\} = 1$, ако $x < y$ или $y < x$ и $\varphi: \{x,y\} = 0$, ако x и y не са сравними в X . Според т.4.4.1. от [1],

съществува безкрайно подмножество на M на X , за което $\varphi[M]^2 = \text{const}$. На според условието не е възможно $\varphi[M]^2 = 0$, понеже в нашия случай това означава в X да съществува безкрайна антиверига. Остава единствено възможното $\varphi[M]^2 = 1$, което в нашия случай означава, че M е безкрайна верига в X .

Хипотеза: за всяко ЧНМ е изпълнено неравенството $|X| \leq \text{Chain}(X) \cdot \text{AChain}(X)$.

Формулираната хипотеза е по-силно твърдение от нашето Тв.1., поради лесно доказващите се неравенства $\text{Chain}(X) \leq \text{LIAC}(X)$ и $\text{AChain}(X) \leq \text{LIC}(X)$.

Може да се докаже, че от нашата хипотеза се извежда едно доказателство на формулираното в [1] предположение на Архангелски.

Литература

1. Архангелски А.В., Канторовская теория множеств, М., Изд. МГУ, 1988 г.

Секция II

ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА

MATHEMATICAL MODELS IN NEUROSCIENCE

*Professor, DSc Diana Stephanova,
Associate Professor, PhD Mariya Daskalova
Institute of Biophysics and Biomedical Engineering,
Bulgarian Academy of Sciences*

Abstract. Recently, the method of mathematical modeling is applied for studying the mechanisms of processes in excitable motor and sensory nerves in healthy subjects and patients with neurological diseases. Various types of demyelinating neuropathies such as Charcot-Marie-Tooth type 1A (CMT1A), Multifocal Motor Neuropathy (MMN), Chronic Inflammatory Demyelinating Polyneuropathy (CIDP) with its subtypes and Guillain-Barré Syndrome (GBS) are simulated by us. Emerging fine distinctions between these diseases previously known as common types of hereditary and acquired neuronal diseases are explained in the present study, using our multi-layered model based on our double-cable model of human myelinated motor nerve fibre, and the models are described. The comparison between abnormal action and electrotonic potentials of simulated neuropathies show that they are not identical and can be used as specific indicators for these disorders.

Keywords: Multi-layered model, double cable model, demyelinating diseases, neuroscience.

1. Introduction

Thanks to exclusively fine and revealing techniques in biochemistry, biophysics and micro-imaging we are now into possession of a completely new picture and thorough knowledge about many fine details for the structure of myelinated fibers. Generally, they are organized into several different structural parts (domains): an initial segment, deriving

from the axonal hillock of the neuron; the axon tightly covered by a myelin sheath (internode), a discontinuation with lack of cover (node of Ranvier) and two adjoining regions - paranodal and juxtaparanodal. The method of mathematical modeling and computational simulation of this myelinated motor nerve fibre in normal and abnormal cases is realized in the present study to reveal some of the nerve excitability abnormalities observed and recorded in healthy subjects and patients with demyelinating neuropathies like CMT1A, CIDP and its subtypes, MMN and GBS.

2. Models

The computations apply our multi-layered model, in which 150 interconnected parallel lamellae are simulated by alternating 150 lipid and 150 aqueous layers within the myelin sheath. The aqueous layers provide appreciable longitudinal and radial conductance, the latter via a spiral pathway (Fig. 1). This model of the human motor nerve fibre is a further development of our double cable model, in which the myelin sheath and intermodal axolemma are treated as two concentric cables (Fig. 2).

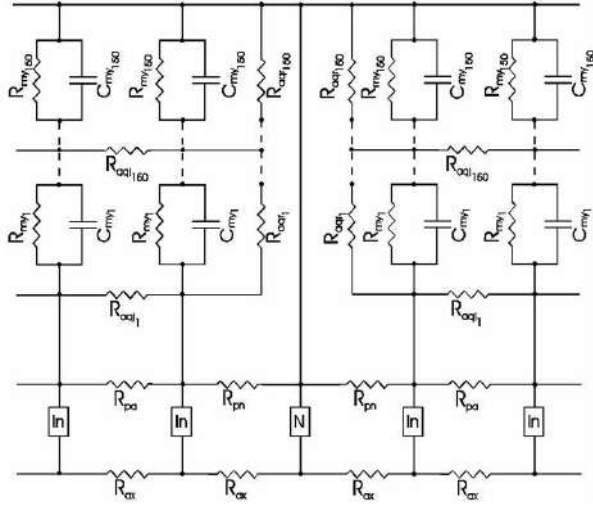


Fig. 1. Equivalent electric circuit of the multi-layered myelinated human motor nerve fibre (Taken from Stephanova¹). One node (N box) and internodal segments, each including internodal axolemma (In boxes) and the multi-layered myelin sheath are presented. The longitudinal axoplasmic (R_{ax}), periaxonal (R_{pa}) and paranodal seal (R_{pn}) resistances are also illustrated. The equivalent electric circuit for the multi-layered myelin sheath contains, respectively: myelin-layered capacitance and resistance (C_{myN} , R_{myN} for $N = 1,150$), as well as aqueous-layered longitudinal and radial resistances (R_{aqIN} , R_{aqrN} for $N = 1,150$). The equivalent circuits for each of the N and In boxes are given in the *bottom row* of Fig. 2, representing our double cable model² of the human motor nerve fibre.

¹ Stephanova, D.I. 2001. Myelin as longitudinal conductor: a multi-layered model of the myelinated human motor nerve fibre. *Biol. Cybern.* 84: 301-308

² Stephanova, D.I. & H. Bostock. 1995. A distributed-parameter model of the myelinated human motor nerve fibre: temporal and spatial distributions of action potentials and ionic currents. *Biol. Cybern.* 73:275-280

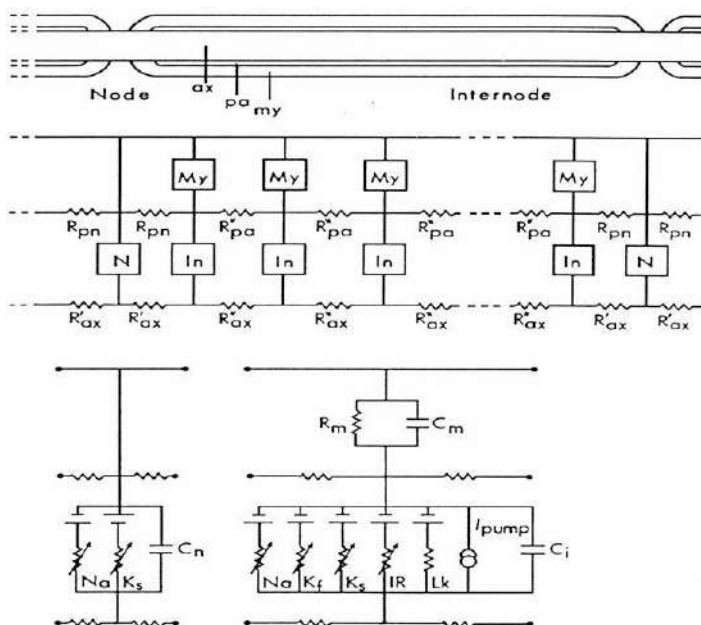


Fig. 2. Schematic diagram of the human motor nerve fibre. In the equivalent electric circuit, two consecutive nodes (N boxes), adjusted distal paranodes and internodal segments between them, each including myelin sheath (My boxes) and internodal axolemma (In boxes), are schematically presented. A paranodal seal resistance (R_{pn}) joins each internode to the adjacent nodes of Ranvier. In accordance with the none-uniform spatial step sizes, the various longitudinal axoplasmic (R_{ax}) and periaxonal (R_{pa}) resistances are illustrated by their printed elements. In the *bottom row*, the equivalent electric circuits for each of the boxes contain, respectively: channels (Na, K_s) and capacitance (C_n) for N boxes; channels (Na, K_f , K_s , IR, Lk), electrogenic pump (I_{pump}) and capacitance (C_i) for the In boxes: and resistance, capacitance (R_m , C_m) for My boxes. Channels: Na (sodium), K_f (fast potassium), K_s (slow potassium), IR (inward rectifier), Lk (leak), (Taken from Stephanova and Bostock²).

From the electric equivalent circuits (Figs. 1 and 2) the following set of partial differential equations is derived from Kirchoff's current law:

$$C_a(x) \frac{\partial V_a(x,t)}{\partial t} = I_s(t) + \frac{1}{R_{ax}} \cdot \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} - q_i(x,t) \quad (1)$$

$$C_{my}(x) \frac{\partial V_m(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{R_{ax}} \cdot \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{R_{pa}} \cdot \frac{\partial^2 V_m(x,t)}{\partial x^2} - \frac{V_m(x,t)}{R_{my}} \quad (2)$$

$$C_{my1} \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{V_1}{R_{my1(x)}} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{R_{ax}} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R_{aq11}} + \frac{1}{R_{pa}} \right) = I_1 \quad (3)$$

$$C_{my2} \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{V_2}{R_{my2(x)}} = I_1 + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{R_{aq12}} = I_2 \quad (4)$$

$$C_{myN} \frac{\partial V_N}{\partial t} + \frac{V_N}{R_{myN(x)}} = I_{N-1} + \frac{\partial^2 V_N}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{R_{aq1N}} = I_N \quad (5)$$

In the paranodal space

$$R_{myN(x)} = 1 / \left(\frac{1}{R_{myN}} + \frac{1}{R_{raqrN}} \right) \text{ for } N=1,150 \quad (6)$$

where R_{aqr150} is infinite and in the other parts of the internodal space

$$R_{myN(x)} = R_{myN} \text{ for } N=1,150. \quad (7)$$

The set of partial deferential equations describes the potential (V_a) and ionic currents [$q_i(x, t)$] either across the nodal or across the internodal axolemma, as well as the potentials and currents, respectively, across the myelin (V_m, I_m) and its N -layers (V_N, I_N), for $N=1, 150$. The ionic currents $q_i(x,t)$ are thoroughly described by the equations (18), (20)–(22).

The stimulus current is:

$$I_s(t) = \begin{cases} I_s & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases} \quad (8)$$

where t_1 is the time duration of the pulse.

The boundary and initial conditions are given by the equations (9)–(14)

$$\lim_{x \rightarrow jL} V_z(x, t) = V_{zj}(x, t), \quad j = 1, 2, \dots, J \quad \text{for } z = a, m \quad (9)$$

where L is the length from nodal center to nodal center.

$$V_{mj}(t) = 0 \quad \text{across the node and } V_j(t) = V_{aj}(t) + V_{mj}(t) \quad (10)$$

also

$$V_{z0} = V_{z2}; \quad V_{z(J+1)} = 0 \quad \text{for } z = a, m \quad (11)$$

$$V(x, 0) = V_a(x, 0) = V_r \quad \text{across the node; as} \quad (12)$$

$$V_a(x, 0) = V_{ra} \quad \text{across the internodal axolemma; and}$$

$$V_m(x, 0) = V_r - V_{ra} \quad \text{across the myelin; so}$$

$$V(x, 0) = V_r \quad \text{across the internode} \quad (13)$$

$$\frac{dz(x, 0)}{dt} = 0 \quad \text{for } z = V, V_a, V_m, m, h, n, s, q \quad (14)$$

In the paranodal space

$$R_{pa}(x) = R_{pn} \quad (15)$$

and in the periaxonal space

$$R_{pa}(x) = R_{pa} \quad (16)$$

In the nodal region:

$$C_a(x) = C_n \quad (17)$$

$$q_i(x, t) = I_{Na} + I_{Kf} + I_{Ks} \quad (18)$$

and in the internodal axolemma

$$C_a(x) = C_i \quad (19)$$

$$q_i(x, t) = I_{Na}^* + I_{Kf}^* + I_{Ks}^* + I_{IR}^* + I_{LK}^* + I_{pump}^* \quad (20)$$

where the *asterisk* denotes an internodal quantity and where

$$\begin{aligned} I_{Na} &= P_{Na} m^3 h u z(Na); \quad I_{Kf} = P_{Kf} n^3 z(K); \quad I_{Ks} = P_{Ks} s z(K); \\ I_{IR} &= P_{IR} q(0, 53z(Na) + 0, 47z(K)); \quad I_{LK} = P_{LK} z(Na) \end{aligned} \quad (21)$$

and

$$z(y) = (V_a F^2 / RT) ([y]_0 - [y]_i \exp(V_a F / RT)) / (1 - \exp(V_a F / RT)) \quad (22)$$

for $y = Na$, K ($T = 310,16K$; F , Faraday's constant; R , universal gas constant).

The fraction activations are given by the differential equation:

$$\frac{dy}{dt} = a_y(1-y) - b_y y \text{ for } y = m, h, n, s, q \quad (23)$$

where

	$A(ms^{-1})$	$B(mV)$	$C(mV)$
a_m	1.872	-56.59	6.06
b_m	3.973	-61	9.41
a_h	0.550	109.74	9.06
b_h	22.61	26	12.5
a_n	0.129	-53	10
b_n	0.324	-78	10
s	0.00556	60	22
q	0.00125	110	12
u		80	12

$$\begin{aligned}
 a_m, a_n &= A(V_a - B) / (1 - \exp((B - V_a)/C)); \\
 b_m, a_h, b_n &= A(B - V_a) / (1 - \exp((V_a - B)/C)); \\
 b_h &= A / (1 + \exp((B - V_a)/C)); \\
 a_s, a_q &= A \exp((V_a - B)/C); \\
 b_s, b_q &= A / \exp((V_a - B)/C); \\
 u &= 0,7 / (1 + \exp((B - V_a(x,0))/C)).
 \end{aligned} \quad (24)$$

In the internodally demyelinated space

$$R_{my}(x) = (R_{my} N(n(y\%))) / N(100\%)$$

for $y(\%)$ – myelin reduction value (25)

$$C_{my}(x) = (C_{my} N(n(y\%))) / N(n(y\%))$$

for $y(\%)$ – myelin reduction value (26)

and $N(n(y\%)) = N(100\%) - N(y\%)$,

where $N(n(y\%))$ is the number of myelin lamellae in the demyelinated zones.

In the paranodally demyelinated space

$$R_{pa}(x) = R_{pn}(x) \quad (27)$$

$$R_{pn}(x) = R_{pn}(100\%) - R_{pn}(y\%) \text{ for } y(\%) -$$

myelin reduction value. (28)

All calculations are carried out for fibres with: an axon diameter of 12.5 μm ; an external fibre diameter of 17.3 μm ; nodal diameter of 5 μm ; nodal area of 24 μm^2 ; myelin thickness of 2.4 μm ; periodicity of myelin lamellae of 16 nm. The temperature is 37°C. The other membrane parameter values for the normal motor nerve fibre are the same as described by Stephanova and Bostock², i.e. C_n (nodal capacitance) 1 pF, C_i (internodal axolemmal capacitance) 350 pF, C_{my} (myelin capacitance) 2 pF, V_r (nodal resting potential) –86.7 mV, V_{ra} (internodal axolemmal resting potential) –86 mV, R_{ax} (axoplasmic resistance) 8 M Ω , R_{my} (myelin resistance) 250 M Ω ; channel types and their maximum permeabilities ($\text{cm}^3\text{s}^{-1} \times 10^{-9}$): node, Na (sodium) 9, K_f (fast potassium) 0.07, K_s (slow potassium) 0.26; internode, Na^* (sodium) 80, K_f^* (fast potassium) 27, K_s^* (slow potassium) 2, IR^* (inward rectifier) 0.008, L_k^* (leak) 0.0064, I_{pump}^* (net outward current generated by electrogenic Na^+/K^+ pump) 0.1 nA, ion concentrations (mM): $[Na^+]_i$ 9, $[Na^+]_0$ 144.2, $[K^+]_i$ 155, $[K^+]_0$ 3. The presented maximum permeabilities of the channel types P_{Na} 9; P_{Kf} 0.07, 27*; P_{Ks} 0.26; P_{IR}

0.008* are the updated ones taken from the paper³.

3. Results and Discussion

The described multi-layered model is used to simulate different type demyelinations of the human motor nerve fiber. Our results and analyses show that: (1) the mild internodal systematic demyelination (ISD) is a specific indicator for CMT1A; (2) the mild paranodal systematic demyelination (PSD) and paranodal internodal systematic demyelination (PISD) are specific indicators correspondently for CIDP and its subtypes; (3) the severe focal demyelinations, each of them internodal and paranodal, paranodal-internodal (IFD and PFD, PIFD), are specific indicators correspondently for GBS and MMN (Fig. 3).

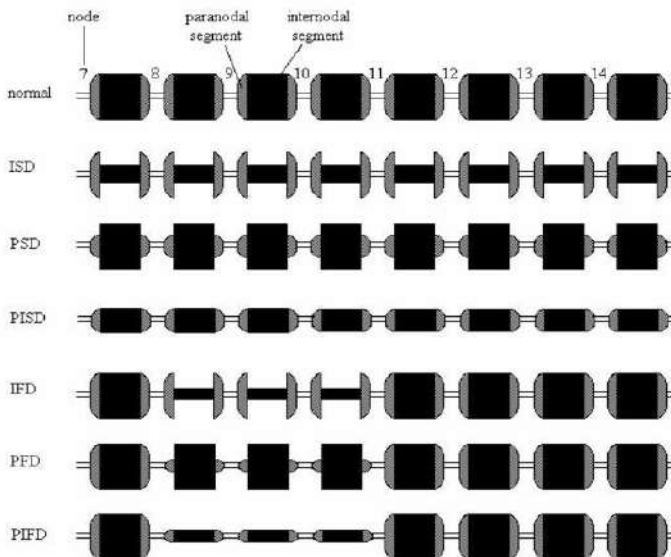


Fig. 3. Schematic diagram of the human motor nerve fibres from the 7th to the 14th nodes in the normal, systematically and focally demyelinated cases. The

³ Stephanova, D.I. & K. Mileva. 2000. Different effects of blocked potassium channels on action potentials, accommodations, adaptation and anode break excitation in human motor and sensory myelinated nerve fibers: computer simulations. *Biol. Cybern.* 83: 161-167

reduction of the myelin lamellae (defining internodal systematic demyelination, ISD), or of the paranodal seal resistance (defining paranodal systematic demyelination, PSD), or simultaneously both of them (defining paranodal internodal systematic demyelination, PISD) is uniform along the fibre length. The reduction of the same myelin parameters is restricted to only three (8th, 9th and 10th) consecutive internodes for the internodal focal demyelination (IFD), paranodal focal demyelination (PFD) and paranodal internodal focal demyelination (PIFD), respectively, (Taken from Stephanova and Daskalova⁴).

The results confirm that the axonal nerve excitability properties such as action and electrotonic potentials for the simulated normal and abnormal (CMT1A, CIDP and its subtypes, GBS and MMN) cases are quite different (Fig.4).

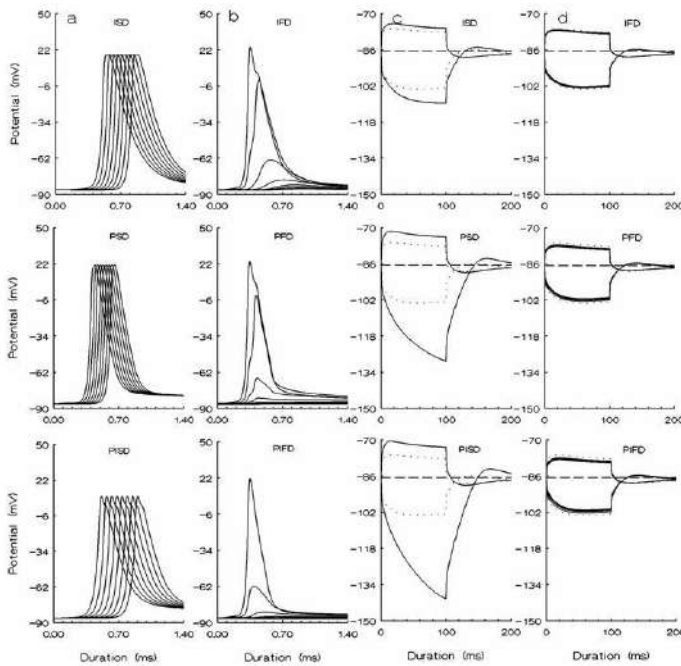


Fig. 4. Comparison between the action potentials in mild ISD/CMT1A, PSD/CIDP, PISD/CIDP subtypes (a), severe IFD/GBS, PFD/MMN,

⁴ Stephanova, D.I. & M. Daskalova. 2008. Membrane property abnormalities in simulated cases of mild systematic and severe focal demyelinating neuropathies. Eur. Biophys. J. 37: 183-195

PIFD/MMN (**b**) cases and between the electrotonic potentials in the normal (*dotted lines*), mild ISD/CMT1A, PSD/CIDP, PISD/ CIDP subtypes (**c**) and severe IFD/GBS, PFD/MMN, PIFD/MMN (**d**) cases of the human motor nerve fibres. The action potentials in response to applied 0.1 ms current stimuli are presented at each node from the 7th to the 14th. The electrotonic potentials in response to 100ms depolarizing and hyperpolarizing current stimuli (40% of the threshold) are presented at each node from the 7th to the 14th, respectively. However, each node behaves identically in the normal and systematically demyelinated cases, and an overlap of the potentials at the nodes is obtained, (Taken from Stephanova and Dimitrov⁵).

The results also confirm that the changes obtained in the simulations replicate those recorded *in vivo* in control groups and in patients with the corresponding diseases.

⁵ Stephanova, D.I. & B Dimitrov. Computational Neuroscience: Simulated Demyelinating Neuropathies and Neuronopathies. Taylor and Francis Group, CRC Press Inc., Boca Raton, London, New York, 2013, pp.1-148. ISBN: 978-1-4665-7832-6.

ИГРИ И СТРАТЕГИИ

Станчо Димиев

Институт по математика и информатика, БАН

Математическата теория на игрите е научна дисциплина свързана с многомерната геометрия и математическия анализ и разбира се, с теорията на вероятностите. Би могла да бъде отнесена и към фундаменталната математика и към приложната. Понастоящем теорията на игрите представлява една огромна система от знания проникващи в различни направления на съвременното човешко познание.

Целта на тази статия е свързана с вникването в една важна част от съвременната теория на игрите. Авторът счита, че не се заблуждава, вярвайки в нейната актуалност и за различни области на човешката практика, дори за политиката и бизнеса, където понятията игра и стратегия не са достатъчно уточнени. Въпросът е дали въпросното уточнение е възможно изобщо? Но независимо от натрапващия се песимизъм, изглежда привлекателно да се задълбочим в „математическите игри и стратегии“. Касае се за едно сравнително популярно изложение на идейно ниво на така наречените кооперативни и некооперативни игри.

Обща характеристика

на кооперативните и некооперативните игри

1. Кооперативните игри (von Newman and Morgenstern). Виж книгата [1] в която се излага теорията на 2-местните игри с нулева сума. Тази теория се основава на анализа на вътрешнорелационните връзки между участниците. В същата книга е развита теорията за n участници в кооперативен смисъл, която именно се нарича теория на кооперативните игри.

2. Некооперативните игри (J.Nach) са обект на противополо-

ложна теория за икономическото поведение, която се основава на пълно отсъствие на коалиции. Това означава, че всеки участник действа независимо без сътрудничество с който и да било от останалите участници. При некооперативните игри понятието „равновесна точка“ играе важна роля.

Крайни игри – геометрична интерпретация

Основната концепция за понятието игра подчиняваща се на идеята за некооперативност се определя неявно чрез ред условия за множеството на играчите и множествата на техните игрови стратегии.

Първото условие за множеството на играчите е това то да бъде крайно, т.е. да бъде възможно неговото преброяване, чийто резултат означаваме с n или въвеждайки цялата редица на играчите, $\{1, 2, \dots, n\}$.

Що се отнася до второто множество, на така наречените „чисти стратегии“, се определят като крайни целочислени редици чиито елементи са измежду числата 0 и 1. Например, за $n=3$ $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

Освен чистите стратегии, съществена роля играят смесените стратегии, които се определят за отделните играчи чрез формулата $S_i = \sum_{\alpha} c_{i\alpha} \pi_{i\alpha}$, където $\pi_{i\alpha}, \alpha=1, 2, \dots, n$. Те означават чистите стратегии за играча i , а коефициентите $(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$ удовлетворяват условията $0 \leq c_{i\alpha} \leq 1, \sum_{\alpha} c_{i\alpha} = 1$.

Разбира се, S_i означава смесената стратегия на играча i . Така чистите и смесените стратегии на всички играчи получават геометрична интерпретация с помощта на симплекси и редици от симплекси в R^{n^2} , която е пряко интуитивна в R^3 . Въпросната интерпретация е кодирана в двете матрици

$$M_V = \|\pi_{i\alpha}\|, 1 \leq i, \alpha \leq n \text{ и } M_V = \|\pi_{i\alpha}\|, 1 \leq i, \alpha \leq n.$$

По-точно при фиксирано i матрицата M_V определя върховете (vertices) на симплекса /съответстващ на номера i / в някакво обемащо векторно пространство. Когато i се мени от 1 до n получаваме редица от n на брой симплекси в същото векторно пространство.

Матрицата M_C (coordinates) съдържа координатите на смесените стратегии. При фиксирано i това са координатите на смесената стратегия на играча i , т.е. $S_i = \sum_{\alpha} c_{i\alpha} \pi_{i\alpha}$, които се изобразяват като точки на симплекса съответстващ на играча i . Ясно е, че S_i е линейна функция на $c_{i\alpha}$ и $\pi_{i\alpha}$, $i=1, 2, \dots, n$. Обединението на всички смесени стратегии е S , т.е. $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$. Ясно е, че S за дадена игра съвпада с редицата от линейни функции, а за всевъзможните игри съвпада с множеството от всевъзможните редици от по n линейни функции.

Ценностна функция (payoff)

С помощта на матриците M_C и M_V /с техните елементи/ изразяваме чистите и смесените стратегии на дадена игра и лесно определяме различни функционални характеристики като „ценностната“ функция, която означаваме с $p_i(S)$ за играча i . По точно $p_i(S) := \sum_{\alpha} p_{i\alpha} \cdot \pi_{i\alpha}$, за играча i , и съответно за всички играчи $p(S) = (p_1(S), p_2(S), \dots, p_n(S))$.

Еднократна субституция в n -торката S наричаме замяната на S_i с T_i , т.е. замяната $(S_1, S_2, \dots, S_n) \rightarrow (S_1, S_2, \dots, S_{i-1}, T_i, S_i, \dots, S_n)$, която означаваме с (S_i, T_i) . Това означение е полезно за изложението.

Равновесна точка

Казваме, че n -торката $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ от смесени стратегии определя равновесна точка в множеството на всевъзможните смесени стратегии, ако $p_i(S) = \max_{r_i} [p_i(S; r_i)]$.

По подробно имаме следните равенства

$$p_1(S) = \max_{r_1} [p_1(S; r_1)],$$

$$p_2(S) = \max_{r_2} [p_2(S; r_2)],$$

.....

$$p_n(S) = \max_{r_n} [p_n(S; r_n)].$$

Това означава, че всеки играч i максимизира своята стратегия S_i , докато останалите играчи запазват своите без изменение. Така стратегията на всеки играч се оказва оптимална срещу стратегиите на останалите играчи.

От линейността на ценностната функция $p_i(S_1, S_2, \dots, S_n)$ спрямо компонентата S_i следва че е изпълнено следното равенство $\max_{r_i} [p_i(S; r_i)] = \max_{\alpha} [p_i(S; \pi_{i\alpha})]$. Това равенство подсказва, че можем да въведем и следната по-специална ценностна функция $p_{i\alpha}(S) := p_i(S; \pi_{i\alpha})$. Тогава получаваме следното ново условие за равновесна точка: стратегията S_i определя равновесна точка тогава и само тогава, когато $p_i(S) = \max_{\alpha} [p_{i\alpha}(S)]$.

Съществуване на равновесни точки

Теорема (J.Nach). Всяка крайна игра притежава поне една равновесна точка.

Доказателство. Ако S означава n -торка от смесени стратегии, $p_i(S)$ ценностната функция на играча i , нека с $p_{i\alpha}(S)$ да означим ценностната функция на същия играч i , ако той е изменил стойността на неговата чиста стратегия $\pi_{i\alpha}$, докато останалите негови чисти

стратегии запазват стойности в S . Впрочем, разглеждаме n -торката $S = (S_1, \dots, S_i, \dots, S_n)$ в която $p_i(S)$ има някаква стойност, а $p_{i\alpha}(S)$ има изменена стойност в $\pi_{i\alpha}$, която означаваме с $\pi'_{i\alpha}$.

Определяме следното множество от непрекъснати функции $\varphi_{i\alpha}(S)$:

$$\varphi_{i\alpha}(S) := \max(0, p_{i\alpha}(S) - p_i(S)), \text{ за } i=1, 2, \dots, n.$$

По-точно, ако $p_i(S)$ има стойност 1 за $\pi_{i\alpha}$, т.е. $\pi'_{i\alpha}=1$, то $p_{i\alpha}(S)$ е нула за $\pi_{i\alpha}$ ($\max(0, 0-1) = \max(0, -1) = 0$).

Сега определяме следната модификация S' на $S: S \rightarrow S'$,

$$S' = \frac{S_i + \sum_{\alpha} \varphi_{i\alpha}(S) \pi'_{i\alpha}}{1 + \sum_{\alpha} \varphi_{i\alpha}(S)}, \quad S' := (S'_1, \dots, S'_i, \dots, S'_n).$$

Да разгледаме следното изображение $(S_1, \dots, S_i, \dots, S_n) = S \rightarrow (S'_1, \dots, S'_i, \dots, S'_n)$, което означаваме с T , т.е. $T: S \rightarrow S'$.

Това изображение се определя от една система от n непрекъснати функции, всяка от тях съответстваща на определен играч i , $i=1, 2, \dots, n$. Съгласно известната теорема за неподвижната точка на Brauer въпросното изображение притежава неподвижна точка. Ще докажем, че тази неподвижна точка е точка на равновесие. За тази цел да вземем произволна n -торка S в която смесените стратегии S_i използват поне част от чистите си стратегии $\pi_{i\alpha}$. Можем да изберем такова α , че $p_{i\alpha}(S) \leq p_i(S)$, което влече $\varphi_{i\alpha}(S) = 0$. Тогава, ако S е неподвижна точка за T ще имаме че членът в S_i не се намалява за S'_i . Така за всички номера $i, \beta, \beta \neq \alpha$ получаваме че $\varphi_{i\alpha}(S) = 0$ за да запазим знаменателя $1 + \sum_{\alpha} \varphi_{i\alpha}(S)$ различен от нула. Това означава, че за някакъв номер β имаме $\varphi_{i\beta}(S) = 0$, което води до противоречие с условието всеки играч да може да подобри своя-

та ценностна функция като използва някоя от чистите стратегии $\pi_{i\beta}$.

Обратното твърдение е валидно, защото ако S определя равновесна точка, то всичките $\varphi_{i\alpha}$ са нула, което влече, че S е неподвижна точка за T .

Приложения в биологията

Едно изненадващо обстоятелство, свързано със структурата на повърхнините на ниво на ценностната функция привлече вниманието на различни изследователи на природата през последните 10-15 години. Оказа се, че теорията на игрите може да допринесе за изясняването на въпроси от биологията. Касае се за парадокса на Hutchinson или парадокса за планктона. Това е въпрос на биоразнообразието на микро-организмите. По-точно, въпросът за съвместното съществуване на видовете микроорганизми, участващи в океанския планктон и неговото оцеляване. В цитираната статия под номер 3, се предлага обяснение на парадокса за планктона.

Разширени некооперативни игри?

Въпросът посочен в горното заглавие е изследователски въпрос, който (доколкото е известно на автора на статията) остава открит и до днес. В тази връзка имаме два аспекта:

1. Цялостно кооперативно разширение на некооперативните игри.
2. Частична кооперативна версия.

Възможно е понятието „разширение” да бъде изложено на езика от специално естество използван от Nash в статията [2], заменяйки условието за крайност на играта с подходящо условие за игра с безбройно много възможности. Тук цитираме мнението на Nash: „Проблемът за анализа на езика на некооперативните игри се превръща в проблем за получаване на подходящ (и убедителен) некоо-

перативен модел (преговори и т.н.)”.

По повдигнатия въпрос да се имат предвид следните статии:

1. Дж. Фон Нойман, О. Моргенщерн, Теория игр и економическое поведение, Изд. Наука, Москва, 1970г.

2. J.Nash, Non-Cooperative Games, The Annals of Mathematics, Second Series, V. 54, Issue 2 (Sep., 1951), 286-295.

3. J.Rowlett, The Level Sets of Typical Games, Notices of the AMS, v.61, №8, Sep. 2014, 840-847.

4. Kuhn, H.W., Extensive Games, Proc. Acad. Sci. of USA, 36 (1950), 570-576.

5. Aumann, R.J., Markets with a continuum traders, Econometrica, 32, №1-2 (1964), 30-51.

6. Aumann, R.J., Existence of competitive equilibria in markets with a continuum traders, Econometrica, 34, №1 (1966), 1-17.

Забележка. Статиите цитирани по-горе под номера 5 и 6 са преведени на руски в книгата „Математическая Экономика” на изд. Мир – Москва, 1977г.

Заклучителни забележки. Поради заболяване на автора, в тази статия се излага само равновесната теория на Nash. Първоначалният проект включваше теорията на игровите симетрии и свързаната с тях разрешимост на игрите. Те ще бъдат изложени допълнително в друга публикация.

EDGEWORTH, PARETO AND MULTI-OBJECTIVE MATHEMATICAL PROGRAMMING

Prof. Zdravko Slavov, PhD

Varna Free University, Varna, Bulgaria

Abstract. In this paper we consider the first general theories of multi-objective mathematical programming. They stem from optimization techniques in economics and are attributed to the economists Francis Edgeworth and Vilfredo Pareto. We will focus our attention on these ideas from a mathematical point of view.

Keywords: optimization, multi-objective mathematical programming, Edgeworth-box, Pareto-optimal, equilibrium.

1. Introduction

The standard form of a MOMP problem is to find a variable $x(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$, $m \geq 1$, so as to

$$\text{maximize (or minimize) } f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \quad (1)$$

$$\text{subject to } g_i(x) \geq 0 \quad \forall i \in J_p,$$

$$h_i(x) = 0 \quad \forall i \in J_q,$$

$$x_i \in [a_i, b_i] \quad \forall i \in J_m,$$

where $\{f_i : i \in J_n\}$ are given objective functions, $n \geq 2$, $\{g_i : i \in J_p\}$ are given inequality constraint functions, $p \geq 0$, $\{h_i : i \in J_q\}$ are given equality constraint functions, $q \geq 0$, a_i and b_i are the lower and upper bounds for x_i , $a_i < b_i$, and $J_m = \{1, 2, \dots, m\}$ is the index set. Let the feasible domain be denoted by

$$X = \{x(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : \begin{cases} g_i(x) \geq 0 & \forall i \in J_p \\ h_i(x) = 0 & \forall i \in J_q \\ a_i \leq x_i \leq b_i & \forall i \in J_m \end{cases} \}.$$

Since the objective functions $\{f_i : i \in J_n\}$ may conflict with each other, it is usually difficult to obtain the global maximum for each objective function at the same time.

2. Notions and Definitions

Edgeworth and Pareto are often called the fathers of multi-objective mathematical programming. The notion of Edgeworth-Pareto optimality was introduced by the Irish economist Francis Edgeworth (1845-1926) in 1881. However, this concept is usually attributed to the French-Italian economist Vilfredo Pareto (1848-1923) who in 1896 developed it further. Edgeworth and Pareto were studying the natural ordering in the image space in mathematical models of a simple exchange market [2]. The first mathematical consideration of this problem was done by Kuhn and Tucker in 1951 [4] [10] [11]. Since that time multi-objective optimization has become an active research field.

In [10], Harold Kuhn and Albert Tucker cite the 1975 Nobel Laureate in Economics Tjalling Koopmans [8] when they talk about "vector maximum of Koopmans' efficient point type for several functions". Kuhn and Tucker also cite the 1972 Nobel Laureate in Economics Kenneth Arrow [1] who contributed to the foundations of multi-objective optimization.

The origins of the mathematical foundations of multi-objective optimization can be traced back to the period from 1895 to 1906. During that period, Georg Cantor and Felix Hausdorff laid the foundations of infinite dimensional ordered spaces [2] [4].

Definition 1. (a) A point $x \in X$ is called an ideal Pareto-optimal solution if and only if $f_i(x) \geq f_i(y)$ for all $y \in X$ and all $i \in J_n$. The set of ideal Pareto-optimal solutions of X is denoted by $IPO(X, f)$.

(b) A point $x \in X$ is called a Pareto-optimal solution if and only if there does not exist a point $y \in X$ such that $f_i(y) \geq f_i(x)$ for all $i \in J_n$

and $f_k(y) > f_k(x)$ for some $k \in J_n$. The set of the Pareto-optimal solutions of X is denoted by $PO(X, f)$.

(c) A point $x \in X$ is called a strictly Pareto-optimal solution if and only if there does not exist a point $y \in X$ such that $f_i(y) \geq f_i(x)$ for all $i \in J_n$ and $x \neq y$. The set of strictly Pareto-optimal solutions of X is denoted by $SPO(X, f)$.

(d) A point $x \in X$ is called a weakly Pareto-optimal solution if and only if there does not exist a point $y \in X$ such that $f_i(y) > f_i(x)$ for all $i \in J_n$. The set of weakly Pareto-optimal solutions is denoted by $WPO(X, f)$.

Remark 1. It can be shown that: $PO(X, f)$ is nonempty, but $IPO(X, f) = \bigcap_{i=1}^n \text{Arg max}(f_i, X)$ and $SPO(X, f)$ may be empty or nonempty; $IPO(X, f) \subset PO(X, f)$, $SPO(X, f) \subset PO(X, f)$, $PO(X, f) \subset WPO(X, f)$ and $WPO(X, f)$ is compact, see also [7], [9] and [13].

Remark 2. It is well-known that $PO(X, f) = IPO(X, f)$ if and only if $IPO(X, f)$ is nonempty [3].

3. Edgeworth-box Diagram, Exchange and Equilibrium

The general idea of the Edgeworth-box diagram there are two consumers: consumer A and consumer B , and two goods: good X and good Y . We will assume for mathematical simplicity that every good is perfect homogeneous and perfectly divisible [6].

The Edgeworth-box diagram gives us a graph of different distributions of goods between consumers. Suppose that consumers A and B have utility functions U^A and U^B respectively, consumer A has indifference curves U_1^A , U_2^A and U_3^A , and consumer B has indifference curves

U_1^B , U_2^B and U_3^B . In order to create an Edgeworth-box diagram for consumer A and consumer B , we must place them within the same barter exchange market. To do this, we simply take one of the consumers, for example consumer B , reflect their indifference curves about the x and y axes, and place them on the same graph as the other consumer, i.e. consumer A , see Figure 1.

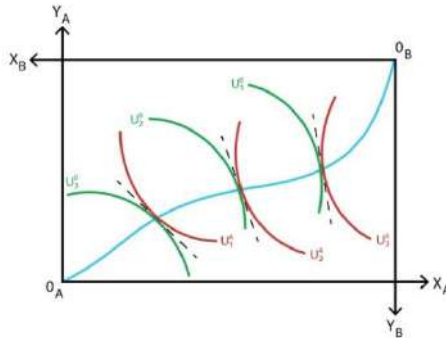


Figure 1. Edgeworth-box diagram and Pareto-optimal set

3.1. Barter Exchange

Now we have to achieve optimal distributions of the two goods between the two consumers. In this case we get an optimization problem: maximize the utility functions U^A and U^B of both consumers A and B subject to a limited total amount of goods X and Y . Analytically, for fixed $x_{total} > 0$ and $y_{total} > 0$ we obtain a multi-objective optimization problem as follows:

$$\text{maximize } U(x_A, x_B, y_A, y_B) = (U^A(x_A, y_A), U^B(x_B, y_B)) \quad (2)$$

subject to

$$\begin{aligned} x_A + x_B &\leq x_{total}, \\ y_A + y_B &\leq y_{total}, \\ 0 \leq x_A \leq x_{total}, 0 \leq x_B \leq x_{total}, \\ 0 \leq y_A \leq y_{total}, 0 \leq y_B \leq y_{total}. \end{aligned}$$

Observe x_A and x_B represent the quantity of good X property of

consumers A and B , respectively, and y_A and y_B represent the quantity of good Y property of consumers A and B , respectively.

From the properties of utility functions U^A and U^B it follows that problem (2) is equivalent to problem (3) written as:

$$\text{maximize } U(x_A, x_B, y_A, y_B) = (U^A(x_A, y_A), U^B(x_B, y_B)) \quad (3)$$

subject to

$$x_A + x_B = x_{total},$$

$$y_A + y_B = y_{total},$$

$$0 \leq x_A \leq x_{total}, 0 \leq x_B \leq x_{total},$$

$$0 \leq y_A \leq y_{total}, 0 \leq y_B \leq y_{total}.$$

The basic idea is as follows: The indifference curves join all the points that give consumers the same level of utility. By connecting all points of tangency between the indifference curves of both consumers, we construct the contract curve and it represents all Pareto-optimal allocations, i.e. curve $O_A O_B$ is a geometrical image of the Pareto-optimal set. Thus, the Pareto-optimal allocation is the allocation where it is not possible to make one consumer better off without making another worse off. From a mathematical point of view, the Pareto-optimal allocations are solutions of multi-objective optimization problem (3). Here, it is true that there are several Pareto-optimal solutions. The Pareto-optimal set does not depend on the initial distribution of goods among consumers, but it depends on the initial total qualities of the various goods, see also [12].

3.2. Competitive Equilibrium

In addition, let goods X and Y have prices p_X and p_Y , respectively, and let consumers A and B have an initial allocation w_A^X, w_B^X, w_A^Y and w_B^Y of goods X and Y , respectively. We get a new optimization problem. Analytically, for fixed $w_A^X \geq 0, w_B^X \geq 0, w_A^Y \geq 0$ and $w_B^Y \geq 0$ such that $x_{total} = w_A^X + w_B^X > 0$ and $y_{total} = w_A^Y + w_B^Y > 0$, and two positive parameters $p_X = p_X(w_A^X, w_B^X, w_A^Y, w_B^Y)$ and

$p_Y = p_Y(w_A^X, w_B^X, w_A^Y, w_B^Y)$ we obtain a multi-objective optimization problem written as:

$$\text{maximize } U(x_A, x_B, y_A, y_B) = (U^A(x_A, y_A), U^B(x_B, y_B)) \quad (4)$$

subject to

$$\begin{aligned} x_A + x_B &\leq w_A^X + w_B^X, \\ y_A + y_B &\leq w_A^Y + w_B^Y, \\ p_X \cdot x_A + p_Y \cdot y_A &\leq p_X \cdot w_A^X + p_Y \cdot w_A^Y, \\ p_X \cdot x_B + p_Y \cdot y_B &\leq p_X \cdot w_B^X + p_Y \cdot w_B^Y, \\ 0 \leq x_A &\leq x_{total}, 0 \leq x_B \leq x_{total}, \\ 0 \leq y_A &\leq y_{total}, 0 \leq y_B \leq y_{total}. \end{aligned}$$

Again, from the properties of utility functions U^A and U^B it follows that problem (4) is equivalent to problem (5) written as:

$$\text{maximize } U(x_A, x_B, y_A, y_B) = (U^A(x_A, y_A), U^B(x_B, y_B)) \quad (5)$$

subject to

$$\begin{aligned} x_A + x_B &= w_A^X + w_B^X, \\ y_A + y_B &= w_A^Y + w_B^Y, \\ p_X \cdot x_A + p_Y \cdot y_A &= p_X \cdot w_A^X + p_Y \cdot w_A^Y, \\ p_X \cdot x_B + p_Y \cdot y_B &= p_X \cdot w_B^X + p_Y \cdot w_B^Y, \\ 0 \leq x_A &\leq x_{total}, 0 \leq x_B \leq x_{total}, \\ 0 \leq y_A &\leq y_{total}, 0 \leq y_B \leq y_{total}. \end{aligned}$$

It is known that problem (3) has a solution, but obtaining a solution is difficult for problem (5). Let us assume that there exist parameters $p_X > 0$ and $p_Y > 0$ such that problem (5) has a unique solution, i.e. problem (5) has an ideal Pareto-optimal solution. In other words, we assume that we have a competitive equilibrium allocation, this is at point E in Figure 2, and the equilibrium prices are p_X and p_Y .

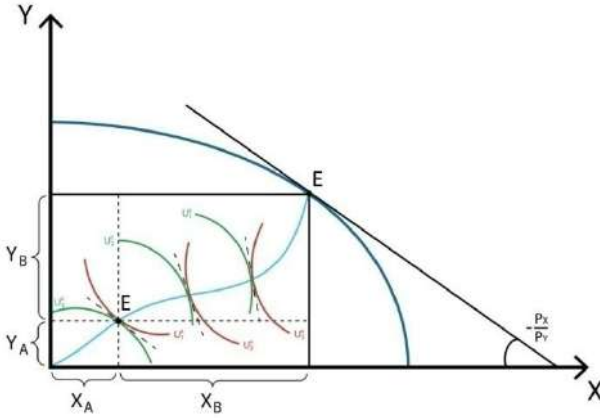


Figure 2. Competitive equilibrium allocation

Remark 3. Note that the slope in absolute value at point E of the contract curves U_1^A and U_3^B is equal to $k = \frac{p_X}{p_Y}$. Let us assume that utility functions U^A and U^B have first partial derivatives, therefore, $\text{grad}(U^A) \parallel \text{grad}(U^B) \parallel \vec{p}(p_X, p_Y)$. For $MRS_A = \frac{\partial U^A}{\partial x_A} : \frac{\partial U^A}{\partial y_A}$ and $MRS_B = \frac{\partial U^B}{\partial x_B} : \frac{\partial U^B}{\partial y_B}$ we obtain the tangency between indifference curves is the point where $MRS_A = MRS_B$ and if this point is a competitive equilibrium allocation, then $MRS_A = k = MRS_B$ [5] [6].

Consider the linear system of constraints in problem (5) written as:

$$\begin{cases} x_A + x_B = w_A^X + w_B^X \\ y_A + y_B = w_A^Y + w_B^Y \\ p_X \cdot x_A + p_Y \cdot y_A = p_X \cdot w_A^X + p_Y \cdot w_A^Y \\ p_X \cdot x_B + p_Y \cdot y_B = p_X \cdot w_B^X + p_Y \cdot w_B^Y \end{cases}$$

Obviously, we obtain problem (5) is equivalent to problem (6), that is:

$$\text{maximize } U(x_A, x_B, y_A, y_B) = (U^A(x_A, y_A), U^B(x_B, y_B)) \quad (6)$$

subject to

$$\begin{aligned} x_A + x_B &= x_{total}, \\ y_A + y_B &= y_{total}, \\ p_X \cdot x_A + p_Y \cdot y_A &= p_X \cdot w_A^X + p_Y \cdot w_A^Y, \\ 0 \leq x_A \leq x_{total}, 0 \leq x_B &\leq x_{total}, \\ 0 \leq y_A \leq y_{total}, 0 \leq y_B &\leq y_{total}. \end{aligned}$$

Remark 4. Note that each solution to problem (6) is also a solution to problem (3): therefore, each competitive equilibrium allocation is Pareto-optimal.

References

1. K. Arrow, Social Choice and Individual Values, Cowles Commission for Research in Economics Monograph N:12, John Wiley and Sons, 1951.
2. M. Ehrgott, X. Gandibleux, Multi-criteria Optimization: State of the Art Annotated Bibliographic Surveys. Kluwer Academic Press, 2002.
3. M. Ehrgott, Multi-criteria Optimization. Springer, 2005.
4. M. Ehrgott, Vilfredo Pareto and multi-objective optimization. Documenta Mathematica, Extra volume: Optimization Stories, 447-453, 2012.
5. B. Ellickson, Competitive Equilibrium: Theory and Applications, Cambridge University Press, 1997.
6. A. Feldman, R. Serrano, Welfare Economics and Social Choice Theory, Springer, 2006.
7. J. Jahn, Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. Springer, 2004.
8. T. Koopmans, Analysis of Production as an efficient Combination of Activities, in T. Koopmans, editor, Cowles Commission for Research in Economics Monograph N:13, John Wiley and Sons, 1951, 33-97.

9. D. Luc, Theory of Vector Optimization. Springer, 1989,
10. H. Kuhn, A. Tucker, Nonlinear programming, in J. Neyman, editor, Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley, CA, 1951, 481-492.
11. M. Luptacik, Mathematical Optimization and Economic Analysis, Springer, 2010.
12. Z. Slavov, Structure of the Pareto optimality set with fixed total resources and consumption sets, Applied Mathematics and Computation 154 (2004), 75-81.
13. R. Steuer, Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application, John Wiley and Sons, 1986.

A POSTPROCESSING PROCEDURE FOR EIGENVALUE PROBLEMS – BOUNDS AND ESTIMATES

*Prof. A. B. Andreev, DSc, Assoc. Prof. M.R. Racheva, DSc
Technical University of Gabrovo*

Abstract. The presented finite element (FE) postprocessing technique is applied and analyzed to second- and fourth-order eigenvalue problems defined on polygonal plane domains. We prove that this approach always ensures asymptotically upper bounds for corresponding eigenvalues. Then, the comparisons of these cases are made and proved. One of the important effects of our investigation could be formulated as follows: if nonconforming FEs are used giving lower bounds of eigenvalues, the presented algorithm is a simple method for obtaining two-sided bounds of eigenvalues. Moreover, the postprocessing procedure gives improved approximation of the eigenpairs. Some computational particularities are discussed and numerical results are also presented.

Keywords: finite element method, postprocessing, nonconforming elements, second/fourth-order problem, eigenvalue problem.

1. Introduction

The paper deals with an a-posteriori procedure for the finite element approximations of some second- and fourth-order eigenvalue problems. We analyze the effect of the proposed postprocessing algorithm on eigenvalue bounds.

Adaptive procedures based on a-posteriori error estimates which accelerate the order of FE convergence have been the subject of intense researches. Several approaches are proposed to construct postprocessing methods for second- and fourth-order elliptic problems (see [1,2,9,12] and the references therein). One of our goals is to give a possible overview of results in these aspects obtained from the authors and by other investigators.

To present our method, consider the following model eigenvalue problems:

$$\begin{aligned}
-\Delta^m u &= \lambda u \text{ in } \Omega, \quad m=1;2, \\
u &= 0 \text{ on } \partial\Omega, \\
\partial_\nu u &= 0 \text{ on } \partial\Omega \text{ if } m=2.
\end{aligned} \tag{1}$$

where $\partial_\nu u$ is the outer normal derivative and Ω is a bounded polygonal domain in R^2 with a boundary $\partial\Omega$.

Let $H^s(\Omega)$ be the usual s -th order Sobolev space on Ω with a norm $\|\cdot\|_{s,\Omega}$ and a seminorm $|\cdot|_{s,\Omega}$ and $(\cdot, \cdot)$ denote the $L_2(\Omega)$ -inner product.

The variational elliptic eigenvalue problems associated with (1) are: find number $\lambda \in R$ and function $u \in H_0^m(\Omega)$, $m=1;2$ such that

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= \lambda(u, v), \quad \forall v \in V \equiv H_0^m(\Omega), \quad m=1;2, \\
\|u\|_{0,\Omega} &= 1,
\end{aligned} \tag{2}$$

where $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy, \quad \forall u, v \in V$ or

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \, \Delta v \, dx \, dy, \quad \forall u, v \in V,$$

for second- or fourth-order problem, respectively.

The bilinear forms $a(\cdot, \cdot)$ are symmetric, continuous on $H^m(\Omega)$ and coercive on $H_0^m(\Omega)$, $m=1;2$. It is well known that the solution of (2) in both cases is given by a sequence of pairs (λ_j, u_j) , with positive eigenvalues $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$ (see e.g. [7]). The corresponding eigenfunctions u_j can be orthonormalized in $L_2(\Omega)$ and they constitute a Hilbert basis for V .

2. Finite Element Method

Let τ_h be a triangulation of Ω which satisfies the usual regularity condition (see [8]), i.e. there exists a constant $\sigma > 0$ such that

$h_K / \rho_K \leq \sigma$, where h_K is the diameter of the element (triangle or rectangle) $K \in \tau_h$ and ρ_K being the diameter of the largest circle contained in K . Then we denote $h = \max_{K \in \tau_h} h_K$.

In our considerations we also include the case when nonconforming finite elements are used. Then let us define mesh-dependent bilinear form

$$a_h(u, v) = \sum_{K \in \tau_h} a_K(u, v), \quad u, v \in V, \text{ where}$$

$$a_K(u, v) = \int_K \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy, \quad \forall u, v \in V \text{ or}$$

$$a_K(u, v) = \int_K \Delta u \, \Delta v \, dx \, dy, \quad \forall u, v \in V,$$

for second- or fourth-order problem, respectively. In case of conforming FEM, obviously $a(\cdot, \cdot)$ and $a_h(\cdot, \cdot)$ coincide.

Defining a piecewise polynomial FE space V_h , the approximation of the problem (2) is: find $\lambda_h \in R$ and $u_h \in V_h$, $u_h \neq 0$ such that

$$a_h(u_h, v_h) = \lambda_h(u_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3)$$

It is well-known (see e.g. [4,6,14]) that there exist nonconforming FE methods which approximate the exact eigenvalues from below, i.e. $\lambda_h \leq \lambda$. Then we propose a-posteriori postprocessing algorithm which is a simple method for obtaining two-sided bounds of eigenvalues.

Suppose that u_h is a solution of (3). Then we consider the elliptic problem:

$$a(\tilde{w}_h, \tilde{v}_h) = (u_h, \tilde{v}_h), \quad \forall \tilde{v}_h \in \tilde{V}_h, \quad (4)$$

where the FEM is conforming, so that $\tilde{V}_h \subset V$.

Let us introduce the number $\tilde{\lambda}_h = \frac{1}{(u_h, \tilde{w}_h)}$, where u_h and $\tilde{w}_h$ are

solutions of (3) and (4), respectively. The number $\tilde{\lambda}_h$ approximates the exact eigenvalue λ . Moreover, in [9] the authors determine the condi-

tions under which $\tilde{\lambda}_h$ is superclose to λ .

Consider the function $\tilde{u}_h = \tilde{\lambda}_h \tilde{w}_h$, where $\tilde{w}_h$ is the solution of (4). This function approximates the corresponding exact eigenfunction (see [3]).

3. Upper Bounds of Eigenvalues

Here, we will prove that the solution of (4) ensures a upper bound of the exact eigenvalue and, at the same time, we obtain different eigenpair approximations closer to the exact one up to a constant multiplier.

For that purpose, we introduce the number $\bar{\lambda}_h = R(\tilde{u}_h) = \frac{a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h)}{(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h)}$,

where R is the Rayleigh quotient [7].

Theorem 3.1 *Both numbers $\bar{\lambda}_h$ and $\tilde{\lambda}_h$ approximate the corresponding eigenvalue by one and the same order of convergence. In addition $\bar{\lambda}_h \leq \tilde{\lambda}_h$.*

For the first (essential) eigenvalue λ_1 we have

$$\lambda_1 \leq \bar{\lambda}_{1,h}. \quad (5)$$

P r o o f. It is easy to see that $(\tilde{u}_h, u_h) = \tilde{\lambda}_h (\tilde{w}_h, u_h) = \tilde{\lambda}_h \frac{1}{\tilde{\lambda}_h} = 1$.

On the other hand,

$(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) = (\tilde{u}_h - u_h, \tilde{u}_h - u_h) + 2(\tilde{u}_h, u_h) - (u_h, u_h)$. Using that u_h is normalized, i.e. $\|u_h\|_{0,\Omega} = 1$, it follows that $(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) = \|\tilde{u}_h - u_h\|_{0,\Omega}^2 + 1$, and hence

$$\|\tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2 = \|\tilde{u}_h - u_h\|_{0,\Omega}^2 + 1 = \varepsilon(h) + 1 \geq 1.$$

From this inequality, for any $\bar{\lambda}_h$ and $\tilde{\lambda}_h$, it holds that

$$\bar{\lambda}_h = R(\tilde{u}_h) = \frac{a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h)}{(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h)} = \tilde{\lambda}_h^2 \frac{a(\tilde{w}_h, \tilde{w}_h)}{(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h)} = \tilde{\lambda}_h^2 \frac{(u_h, \tilde{w}_h)}{(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h)} = \frac{\tilde{\lambda}_h}{(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h)} = \frac{\tilde{\lambda}_h}{\varepsilon(h) + 1} \leq \tilde{\lambda}_h.$$

$$\text{So that, } \bar{\lambda}_h \leq \tilde{\lambda}_h. \quad (6)$$

Next we will prove that the differences $\lambda - \tilde{\lambda}_h$ and $\lambda - \bar{\lambda}_h$ have one and the same order of convergence. Consider the equalities:

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}_h - u, \tilde{u}_h - u) - \lambda(\tilde{u}_h - u, \tilde{u}_h - u) &= a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) - 2a(\tilde{u}_h, u) + a(u, u) \\ -\lambda(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) + 2\lambda(\tilde{u}_h, u) - \lambda(u, u) &= a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) - \lambda(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h). \end{aligned}$$

In the last equality we use the fact that $\tilde{V}_h \subset V$ and also that u is a solution of (2).

Adopting the notation $\sqrt{a(v, v)} = \|v\|_{a, \Omega}$ for any $v \in V$, we get

$$\bar{\lambda} - \lambda = R(\tilde{u}_h) - \lambda = \frac{a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h)}{(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h)} - \lambda = \frac{\|\tilde{u}_h - u\|_{a, \Omega}^2 - \lambda \|\tilde{u}_h - u\|_{0, \Omega}^2}{\|\tilde{u}_h\|_{0, \Omega}^2}.$$

$$\text{Consequently } \bar{\lambda}_h - \lambda = O\left(\|\tilde{u}_h - u\|_{a, \Omega}^2\right).$$

This order of convergence is the same as for $|\lambda - \tilde{\lambda}_h|$ (see, e.g. [2,3,9]).

The inequality (5) is proved in [5].

Finally, combining (5) and (6), for the first eigenvalue we have that $\lambda_1 \leq \bar{\lambda}_{1,h} \leq \tilde{\lambda}_{1,h}$. $\square$

Remark 3.1 *It is obvious to expect that $\bar{\lambda}_{k,h}$ is closer to λ_k than $\tilde{\lambda}_{k,h}$, $k = 2, 3, \dots$, if $\lambda_k \leq \bar{\lambda}_{k,h}$ for any $k = 1, 2, \dots$ (see the last section of the paper).*

We consider the following eigenvalue problem: find $\tilde{\Lambda}_h \in \mathbb{R}$ and $\tilde{U}_h \in \tilde{V}_h$, $\tilde{U}_h \neq 0$, such that

$$a(\tilde{U}_h, \tilde{v}_h) = \tilde{\Lambda}_h (\tilde{U}_h, \tilde{v}_h), \quad \forall \tilde{v}_h \in \tilde{V}_h. \quad (7)$$

It is well-known [7] that $\lambda \leq \tilde{\Lambda}_h$, where λ is the corresponding exact eigenvalue. We suppose that the solution $(\tilde{\Lambda}_h, \tilde{U}_h)$ of (7) is available.

Theorem 3.2 (see [5], Theorem 2) *If the partition τ_h of Ω is uni-*

form, then for h sufficiently small: $\tilde{\Lambda}_h \leq \tilde{\lambda}_h$.

Corollary 3.1 *If the condition of Theorem 3.2 is fulfilled, then for sufficiently small h : $\tilde{\Lambda}_h \leq \tilde{\lambda}_h$.*

P r o o f. First, we transform $\bar{\lambda}_h - \tilde{\lambda}_h$:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_h - \tilde{\lambda}_h &= R(\tilde{u}_h) - a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) = a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) \left[\frac{1}{\|\tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2} - 1 \right] = \frac{\|\tilde{u}_h\|_{a,\Omega}^2}{\|\tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2} (1 - (\tilde{u}_h, \tilde{u}_h)) \\ &= \bar{\lambda}_h [-(u_h, u_h) + 2(u_h, \tilde{u}_h) - (\tilde{u}_h, \tilde{u}_h)] = -\bar{\lambda}_h \|\tilde{u}_h - u_h\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (8)$$

On the other hand,

$$\tilde{\lambda}_h - \tilde{\Lambda}_h = \|\tilde{u}_h - \tilde{U}_h\|_{a,\Omega}^2 - \tilde{\Lambda}_h \|\tilde{u}_h - \tilde{U}_h\|_{0,\Omega}^2 + \tilde{\Lambda}_h \|\tilde{u}_h - u_h\|_{0,\Omega}^2.$$

Combining this equality with (8), it follows that

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_h - \tilde{\Lambda}_h &= (\bar{\lambda}_h - \tilde{\lambda}_h) + (\tilde{\lambda}_h - \tilde{\Lambda}_h) = \|\tilde{u}_h - \tilde{U}_h\|_{a,\Omega}^2 - \tilde{\Lambda}_h \|\tilde{u}_h - \tilde{U}_h\|_{0,\Omega}^2 + \\ &+ (\tilde{\Lambda}_h - \bar{\lambda}_h) \|\tilde{u}_h - u_h\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned}$$

$$\text{Therefore } \bar{\lambda}_h - \tilde{\Lambda}_h = \frac{\|\tilde{u}_h - \tilde{U}_h\|_{a,\Omega}^2 - \tilde{\Lambda}_h \|\tilde{u}_h - \tilde{U}_h\|_{0,\Omega}^2}{1 + \|\tilde{u}_h - u_h\|_{0,\Omega}^2}.$$

Now, it has to use the same arguments as in Theorem 3.2 to prove that the right-hand side is non-negative for sufficiently small h .

Finally, we can summarize for any eigenvalue λ and its approximations:

$$\lambda \leq \tilde{\Lambda}_h \leq \bar{\lambda}_h \leq \tilde{\lambda}_h. \quad (9)$$

It should be noted that all approximations are of order $O(\|u - \tilde{U}_h\|_{a,\Omega}^2) = O(\|u - \tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2)$ (see, e.g. [3,7,9]).

Remark 3.2 *From the general result (9), the following questions arise:*

- *What is the advantage of the proposed postprocessing method?*
- *Which approximate eigenvalue is preferable to calculate?*

Our method gives a procedure for accelerating the convergence of FE approximations by solving a more simple source problem (4). The corresponding solution is based on an augmented FE space $\tilde{V}_h$ (see [2,9,13]). On the other hand, if V_h is an appropriate nonconforming FE space, then the method is a simple approach to ensure two-sided bounds for the exact eigenvalues.

Moreover, in terms of computing, it is preferable to calculate $\tilde{\lambda}_h$ as an approximation, because it can be immediately obtained by contrast of $\bar{\lambda}_h$.

4. Numerical Example

The present example illustrates that, in spite of the fact that the investigation of this work concerns the problem (1), they remain also valid for more general problems.

Consider the plate vibration problem, i.e. the eigenvalue problem (2) with $V = H_0^2(\Omega)$, where Ω is the unit square and $\sigma \in [0, 0.5]$ is the Poisson ratio:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} [\sigma \Delta u \Delta v + (1 - \sigma)(2\partial_{12}u \partial_{12}v + \partial_{11}u \partial_{11}v + \partial_{22}u \partial_{22}v)] dx dy.$$

The domain Ω is uniformly divided into n^2 rectangles, where $n = 4; 8; 12; 16$, respectively.

Our numerical experiments are implemented by means of Adini elements which we use for eigenvalue problem (3) solving. The numerical examples of Rannacher [10] show that for the plate vibration problem on rectangular domain, the Adini element approximates exact eigenvalues from below. Yang [14] gives a theoretical proof of this fact in case of uniform mesh. The post-processing procedure is under application using Bogner-Fox Schmidt elements.

In Table 4.1 we give results for the approximations of first (essential) eigenvalue when $\sigma = 0, 0.1, 0.2$. The results for $\lambda_{1,h}$, obtained using nonconforming Adini elements form an increasing sequence when

the mesh parameter $h = 1/n$ decreases, which confirm the results reported into the literature [10,14] that Adini rectangles give lower bound for the exact eigenvalues.

Table 4.1

n		$\sigma = 0$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.2$
4	$\lambda_{1,h}$	1185.550861	1176.591985	1167.392908
4	$\tilde{\lambda}_{1,h}$	1629.661664	1631.634994	1632.978596
8	$\lambda_{1,h}$	1254.152526	1250.233565	1246.188992
8	$\tilde{\lambda}_{1,h}$	1478.265953	1480.125036	1481.631502
12	$\lambda_{1,h}$	1274.357984	1272.332193	1270.220003
12	$\tilde{\lambda}_{1,h}$	1371.319310	1383.177757	1395.200465
16	$\lambda_{1,h}$	1283.199186	1282.023411	1280.793015
16	$\tilde{\lambda}_{1,h}$	1313.671528	1321.882385	1331.814826

The results in Table 4.1 confirm the statement of Theorem 3.1 and Theorem 3.2: the sequence $\{\lambda_{1,h}\}$ increases, while $\{\tilde{\lambda}_{1,h}\}$ decreases. Here, the exact eigenvalues for $\sigma = 0.1$ and $\sigma = 0.2$ are not known. This fact provides a reason for two-sided bounds of any eigenvalue obtaining. Concerning the case $\sigma = 0$, the exact smallest eigenvalue is approximately $\lambda_1=1295$ (see [11]).

Acknowledgement. This work was partially supported by the Technical University of Gabrovo under grant E1405/2015.

References

- [1] Ainsworth M., J.T. Oden: A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. Wiley Interscience, New York, 2000.
- [2] Andreev, A.B., Lazarov, R.D., Racheva, M.R.: Postprocessing and higher order convergence of the mixed finite element approximations of biharmonic eigenvalue problems. *JCAM* **182**(2005), pp. 333-349.
- [3] Andreev, A.B., Racheva, M.R.: Superconvergence FE postprocessing for eigenfunctions. *Comp. rend. Acad. bulg. Sci.* 55, No2 (2002), pp. 17-22.
- [4] Andreev, A.B., Racheva, M.R.: Lower bounds for eigenvalues and postprocessing by an integral type nonconforming FEM. *Numerical Analysis and Applications*, Vol. 5, Issue 3 (2012), pp. 191-203.
- [5] Andreev, A.B., Racheva, M.R.: The effect of a postprocessing procedure to upper bounds of the eigenvalues, *Springer LNCS* **8962**, 2015, pp. 273-281.
- [6] Armentano, M.G., Duràn, R.G.: Asymptotic lower bounds for eigenvalues by nonconforming finite element methods. *Electron. Trans. Numer. Anal.* **17** (2004), pp. 93-101.
- [7] Babuska, I., Osborn, J.: Eigenvalue Problems., in *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. II, P.G. Ciarlet and J.L. Lions, eds., North-Holland, Amsterdam, 1991, pp. 641-787.
- [8] Ciarlet, P.: Basic Error Estimates for the FEM. Elsevier, Vol. 2 Amsterdam, pp. 17-351 (1991).
- [9] Racheva, M.R., Andreev, A.B.: Superconvergence postprocessing for eigenvalues. *Comp. Meth. in Appl. Math.* **2**(2), pp. 171-185 (2002).
- [10] Rannacher, R.: Nonconforming finite element methods for eigenvalue problems in linear plate theory. *Numer. Math.* **33** (1979), pp. 23-42.
- [11] Rannacher, R., Turek, S.: Simple nonconforming quadrilateral Stokes element. *Numer. Methods Partial Differential Equations.* **8** (1992), pp. 97-111.

- [12] Verfürth R.: A Review of a-posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-refinement Techniques, Wiley & Teubner, 1996.
- [13] Xu, J., Zhou, A.: A two-grid discretization scheme for eigenvalue problems. Math. of Comput. **70** No 233 (2001), pp. 17-25.
- [14] Yang, Y.D.: A posteriori error estimates in Adini finite element for eigenvalue problems. J. Comput. Math., 2000, 18: pp. 413-418.

ИНСТИТУЦИОНАЛНИ ВЪЗДЕЙСТВИЯ И ОТРАЖЕНИЕТО ИМ ВЪРХУ БЪЛГАРСКИЯ БИЗНЕС

*Проф. д-р Тодорка Атанасова, ас. д-р Мирослава Иванова
Стопански факултет, Тракийски университет - Стара Загора*

Резюме. Начинът на функциониране на институциите и вземаните от тях решения оказват силно отражение върху облика на българския бизнес. При наличие на административен капацитет и функционална ефективност на институциите се стимулира, а при отсъствието им се затруднява развитието на бизнеса. Целта на разработката е да изследва и установи степента на въздействие на някои институционални решения, повлияли върху бизнеса у нас. На база на проведено емпирично проучване сред малки, средни и големи предприятия, се представят и анализират изразените мнения на представителите на бизнеса.

Ключови думи: институционални въздействия, бизнес, резултати.

ВЪВЕДЕНИЕ

Нефинансовите (stopански) предприятия в тяхната размерна диференциация на микро-, малки и средни (ММСП) са гръбнакът на българската икономика. Относителният им дял е 99,8% при 0,2% за големите предприятия (НСИ, 2013). ММСП са основен източник на нови работни места и най-чувствителни на обществено-икономическите промени в страната. Начинът на функциониране на институциите и вземаните от тях решения влияят върху състоянието и развитието на българския бизнес.

Целта на разработката е да установи степента на въздействие на някои институционални решения върху стопанските предприятия у нас, чрез оценъчните индекси: „Външна среда“, „Достъп до финансиране“, „Иновационна активност“.

На основа на емпирично проучване сред микро, малки, средни и големи предприятия в област Стара Загора се анализират изразените мнения на представителите на бизнеса.

МЕТОДИЧЕСКИ ПОДХОД ПРИ ФОРМУЛИРАНЕ НА ОЦЕНЪЧНИТЕ ИНДЕКСИ

Индексът „Външна среда“ оценя в каква степен собственици и/или мениджъри на предприятия определят условията за осъществяване на стопанската дейност в България като „благоприятна“. За „благоприятна бизнес среда“ се приема тази, при която: а) обществено-икономическите условия в страната, предоставят добри възможности за развитие на бизнеса; б) икономическата криза не е повлияла негативно върху състоянието на бизнеса.

Индексът е формулиран по начин, който включва два равнопоставени компонента: а) оценка за условията (законови, икономически, пазарни и др. на регионално и национално ниво), които собственици и/или мениджъри дават за развитието на своя бизнес; б) оценка за влиянието, което оказва световната икономическа криза върху развитието на стопанските предприятия, позиционирани в Старозагорски регион.

Математическата формула, по която се установява индексът, е:

$$IBE_i = \frac{\frac{Conditions_i^j}{p} + \frac{Consequences_i^j}{q}}{2} \cdot 100, \text{ където}$$

IBE_i - индекс, който оценя в каква степен предприятие i определя външната бизнес средата в България като благоприятна;

$Conditions_i^j$ - степен, в която предприятие i определя условие j като възможност за развитие на бизнеса;

p - максимална допустима оценка, с която предприятие i оценява условията за развитие на бизнеса в България;

$Consequences_i^j$ - степен, в която предприятие i определя последиствие j от световната икономическа криза като добра възможност за развитие на стопанската дейност;

q - максимална допустима оценка, с която предприятие i оценява

последствията от световната икономическа криза върху развитието на бизнеса в България.

Оценъчният индекс приема стойности от 0 до 100, разпределени в пет интервала - представени в таблица 1.

Таблица 1.

Оценъчни стойности на индекс „Външна средата“

Интервали на оценъчния индекс	Оценка на индекс „Външна среда“
0 – 20	неблагоприятна
21 – 40	по-скоро неблагоприятна
41 – 60	нито неблагоприятна, нито благоприятна
61 – 80	по-скоро благоприятна
81 - 100	благоприятна

Индексът „Достъп до финансиране“¹ измерва в каква степен стопанските предприятия имат „облекчен“ достъп до финансиране. Приемаме, че „облекчен достъп до финансиране“ е този, който позволява на предприятията да използват бързо и лесно финансови ресурси от следните източници: а) Чужди: търговски банки, национални и европейски фондове и програми, рисков капитал и др.; б) Собствени: средства и спестявания на семейството, на близки и приятели.

Математическата формула, по която се пресмята индексът, е:

$$IAF_i = \frac{\sum_m FinSource_i^m + \sum_n Personal_i^n}{\max\left(\sum_m FinSource_i^m + \sum_n Personal_i^n\right)} \cdot 100, \text{ където}$$

IAF_i - индекс за достъп до финансиране за предприятие i ;

$\sum_m FinSource_i^m$ - измерва дали предприятие i ползва външен из-

¹ Изследване на предприемачеството и перспективите за развитие на иновациите на МСП, София 2013

точник m за финансиране на дейността, предоставян от търговски банки, национални и европейски фондове, рисков капитал;

$\sum_n Personal_i^n$ – измерва дали предприятие i ползва собствен капитал n , спестен от дейността му в България или в чужбина.

Оценъчният индекс приема стойности от 0 до 100, разпределени в петте интервала, които са представени в таблица 2.

Таблица 2.

Оценъчни стойности на индекс „Достъп до финансиране“

Интервали на оценъчния индекс	Оценка на индекс „Достъп до финансиране“
0 – 20	затруднен
21 – 40	по-скоро затруднен
41 – 60	нито затруднен, нито облекчен
61 – 80	по-скоро облекчен
81 - 100	облекчен

Индекс „Иновационна активност“ се прилага, за да измери в каква степен предприятията имат иновационна дейност. Под иновационна активност на предприятието се разбира извършване на научно-изследователски и развойни дейности, които включват: а) Партниране с образователни и научни институции от страната и чужбина; б) Разработване на нови технологии и продукти.

Оценъчният индекс съдържа два равнопоставени компоненти: а) Наличие на партньорство с образователни и научни институции; б) Наличие на разработки за нови технологии и продукти. Отчитат се и планираните иновативни дейности на предприятията, които ще се реализират през следващите пет години.

Математическата формула за пресмятане на индекса е:

$$IRD_i = \frac{\frac{\sum_m RDpartner_i^m}{\max\left(\sum_m RDpartner_i^m\right)} + \frac{\sum_n RDstrategy_i^n}{\max\left(\sum_n RDstrategy_i^n\right)}}{2} \cdot 100,$$

където: IRD_i - индекс за иновационна активност на предприятие i ;
 $RDpartner_i^m$ - предприятие i партнира с образователни и научни институции;
 $RDstrategy_i^n$ - предприятие i разработва нови технологии и продукти.

Приемаме, че оценъчният индекс има стойности от 0 до 100. Ако те клонят към 100 - налице е висока иновативна активност, но ако клонят към 0, то същата е ниска. В таблица 3 са представени петте интервала, които може да заема този индекс.

Таблица 3.

Оценъчни стойности на индекс „Иновационна активност“

Интервали на оценъчния индекс	Оценка на индекс „Иновативна активност“
0 – 20	ниска
21 – 40	по-скоро ниска
41 – 60	нито ниска, нито висока
61 – 80	по-скоро висока
81 - 100	висока

АНАЛИЗ НА ЕМПИРИЧНИТЕ РЕЗУЛТАТИ

По инициатива на Регионален академичен център - Стара Загора с участието на студенти и преподаватели от Стопански факултет на Тракийски университет през месеците юли - септември 2014 г. се проведе анкетно проучване след стопански предприятия от Старозагорска област. Проучването целеше да се разкрие тех-

ния потенциал за развитие и ограниченията, които ги възпрепятстват. Извадката е формирана на случаен принцип, а включените в нея предприятия представляват - 0,5% от общия брой на микро- и малките предприятия; 4,1% от средните и 5,3% от на големите предприятия, които осъществяват дейност към 01.01.2014 г. Сферите на стопанска дейност на анкетираните предприятия са четири - промишленост, строителство, търговия и услуги за населението.

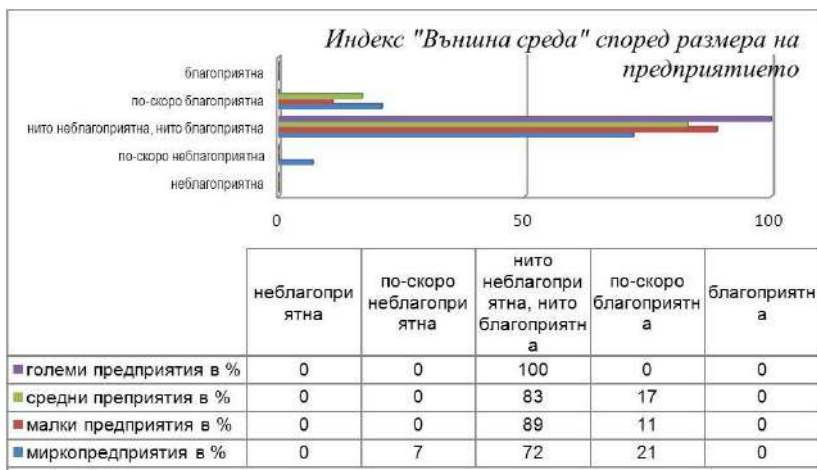
Индекс „Външна среда“

Изразеното субективно мнение на анкетираните собственици и/или мениджъри на предприятия се претегля чрез оценъчния индекс, за да се обективизира оценката за външната бизнес среда в Старозагорски регион и страната като цяло. Индексът е пресметнат за всяко включено в извадката предприятие, след което резултатът е обобщен за всички анкетираните предприятия, а също е диференциран и по размер на предприятията. Така индексът „Външна среда“ измерва степента, в която предприятията възприемат условията за осъществяване на бизнес като „благоприятни“, респективно „неблагоприятни“.

Установява се, че условията за осъществяване на бизнес в Старозагорски регион, оценени чрез индекса са „нито неблагоприятни, нито благоприятни“ за 78,3% от всички анкетираните предприятия. Само 17,4% от тях оценят „Външната среда“ като „по-скоро благоприятна“, а 4% я считат за „по-скоро за неблагоприятна“.

На фиг. 1 са представени диференцираните оценки чрез индекса „Външна среда“ по размерни групи предприятия. Установява се, че при микропредприятията в региона има три разновидности на оценка – за 7% средата е „неблагоприятна“, за 21% е „благоприятна“, а за повечето от тях - 72% е „нито неблагоприятна, нито благоприятна“. Този резултат при най-многобройната група от стопански предприятия в региона (аналогично и в страната) може да се обясни с факта, че те са най-близко до потребителите, най-силно понасят ударите на пазара, а и най-бързо се адаптират

към турбулентностите на заобикалящата ги външна среда. Макар 17% от средните и 11% от малките да оценят условията за осъществяване на бизнес „по-скоро благоприятни“, то няма нито едно предприятие, което да ги е оценило като „благоприятни“.



Източник: Собствени изследвания и калкулации 2015 г.

Фигура 1

Индекс „Достъп до финансиране“

Индексът оценява през погледа на собственици и/или мениджъри на предприятия достъпа до 15 вида финансови източници, диференцирани по произход като чужди (финансови средства от търговски банки, национални и европейски фондове, и програми, рисков капитал) и собствени (печалба, лични спестявания и такива на роднини, приятели) във връзка със стартиране на бизнеса както и развитието му през последните 5 години.

Установява се, че достъпът до финансиране на включените в изследването предприятия в Старозагорски регион, оценен чрез индекса, е „затруднен“ за 86% и „по-скоро затруднен“ за 14% от тях. (фиг. 2)

Най-затруднен е достъпът до финансиране при микропредп-

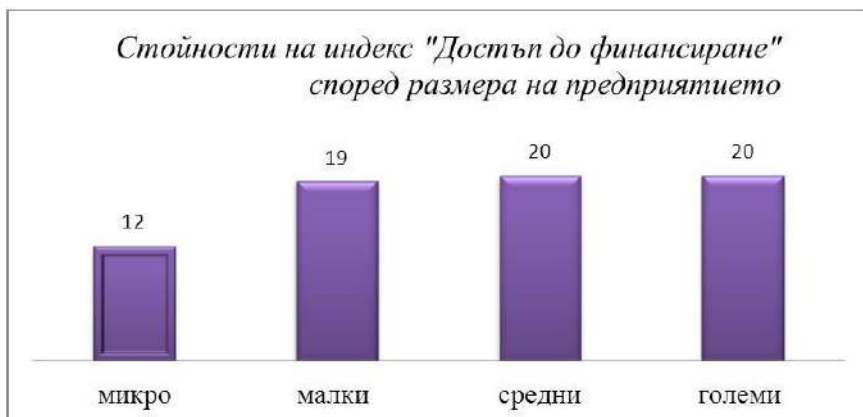
риятията, като при тях средната стойност на индекса е близо два пъти по-ниска от тази на средните и големите предприятия. Обясненията на получените резултати при микропредприятията се свързват с ниската кредитонадежност, малкият размер на притежаваните активи и липсата на кредитна история, фактори които възпират кредитните институции да предоставят финансови ресурси.



Източник: Собствени изследвания и калкулации 2015 г.

Фигура 2

Индексите при средните и големи предприятия са равни – 20, а този при малките е с единица по-нисък -19 (фиг.3). Въпреки, че трите размерни групи предприятия са значително по-кредитонадежни спрямо микропредприятията, значително по-малък е достъпът им до чужди (кредитни) и собствени (печалби) финансови ресурси. Основните причини са свитото вътрешно потребление и загубата на външни пазари като следствие от световната икономическа криза.



Източник: Собствени изследвания и калкулации 2015 г.

Фигура 3

Индекс „Иновационна активност“

За анализирането на идекса предприятията включени в изследването условно са разделени на две групи. В първата група са такива, които си партнират с образователни и научни организации за осъществяване на развойна дейност, а във втората, които не осъществяват такова партньорство. Индексът е пресметнат за всяка от двете групи, след което е обобщен по размери на предприятията (фиг.4).

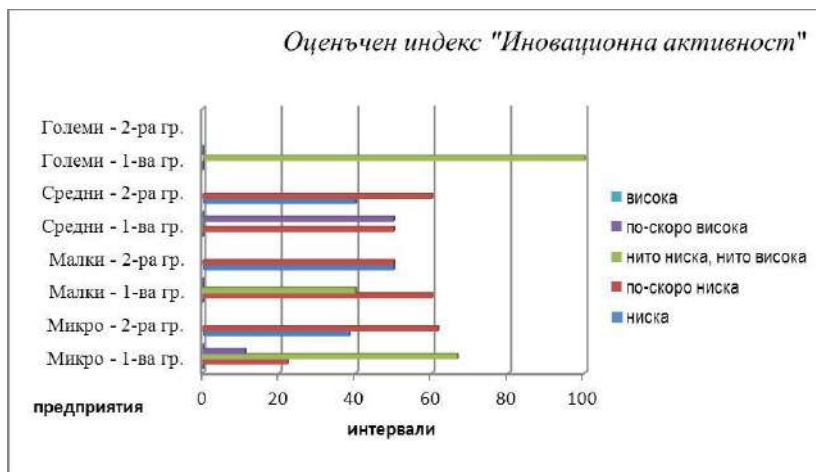
Анализът установява, че 56% от анкетираните предприятия в първата група, имащи партньорство с образователни и научни организации оценят иновационната активност като „нито ниска, нито висока“. Докато 33% от предприятията я оценят като „по-скоро ниска“. Едва 11 % от всички, включени в извадката фирми оценят своята иновационна активност „по-скоро висока“.

Установи се, че 50% от анкетираните средни предприятия оценят иновационната си активност като „по-скоро висока“, което е резултат на парнирането с научно-изследователски институции. При микропредприятията резултатите са по-неблагоприятни, тъй като 60% оценят като „по-скоро ниска“ и 40% като „нито ниска,

нито висока“ иновационната си активност. Всички включени в изследването големи предприятия оценят чрез индекса иновационната си активност „нито ниска, нито висока“.

При 34% от анкетираните предприятия във втората група, неосъществяващи партньорство с образователни и научни организации, иновационната активност е оценена като „ниска“. Докато при 66% от тях се установява „по-скоро ниска“ иновационна активност.

Получените резултати от изследването потвърждават съществуващата не само в изследваните в Старозагорска област, но и в страната като цяло неблагоприятна картина на ниска иновационна активност на стопанските предприятия. Това се свързва с недостатъчните източници на банково и друго финансиране, както и с липсата на гаранции за собственост върху иновацията. Дори при утвърждаване на системата за патентоване, оказва се, че иновационният процес у нас е много дълъг, а самите иновации прекалено скъпи.



Източник: Собствени изследвания и калкулации 2015 г.

Фигура 4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Осъщественото изследване и анализ неоспоримо показва, че са наложителни промени не само в стопанските предприятия, но и във външната среда. Новите оперативни програми в страната целят да подпомогнат иновациите, но все още няма утвърдена практика за съвместна изследователска и развойна дейност между стопанските предприятия и научноизследователските институции (университетите).

Пример в тази област са повечето страни от ЕС, в които са постигнати 3% и повече процента относителен дял на разходите от БВП за изследователска и развойна дейност. В техните национални програми за стимулиране на иновациите в МСП са поставени изисквания за сътрудничество между науката и бизнеса, улесняване достъпа до рисков капитал, публично-частно партньорство и др.²

Може да се посочи и опита на един от водещите университети в света - Кеймбридж³. През 1990 г. университетът разработва и стартира собствена *„Програма за модернизация”*, подтикнат от факта, че традиционните начини за финансиране са недостатъчни за развитието на науката и технологиите. Амбицията на университета е да бъде водеща научно-образователна институция и това го подтиква да търси сътрудничество с бизнеса. Воден от тази идея тогавашният вицеканцлер на университета Алекс Броърс сключва договори за съвместна научноизследователска дейност с десет световноизвестни компании като „Майкрософт”, „Ролс Ройс”, „Хитачи”, „Тошиба”, „Сейко” и др.

² Атанасова-Калайджиева Т., Стопанското предприятие – обект на управлението и субект на икономиката., ИК „Искра –М-И“, 2012, с.180.

³ The Cambridge Phenomenon and The Cambridge Phenomenon Revisited., 2000., pp. 41-45.

INSTITUTIONAL IMPACTS AND THEIR REFLECTION ON BULGARIAN BUSINESS

*Prof. Todorka Atanasova PhD, Assist. Prof. Miroslava Ivanova PhD
Faculty of Economics, Trakia University – Stara Zagora*

Abstract. The manner of functioning of the institutions and their decision-making exert a strong impact on the image of Bulgarian business. The presence of administrative capacity and functional efficiency of the institutions stimulates business development and their absence hampers it. The purpose of the study is to investigate and establish the impact extent of certain institutional solutions which have influenced the business in the country. On the basis of an empirical survey among small, medium and large enterprises, the business representatives' opinions are represented and analyzed.

Keywords: institutional impacts, business, results.

РАВНОВЕСИЕ В ЛИНЕЙНОКВАДРАТИЧНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ ИГРИ

*Проф. д.м.н. Иван Иванов, гл. ас. д-р Боряна Богданова
Стопански факултет, СУ „Св.Кл.Охридски“*

Резюме. Представени са три игрови модела, в които търсенето на равновесие преминава през намиране на стабилизиращо решение за съответно Рикатиево уравнение или система. Коментирани са методи на пресмятане на стабилизиращите решения за разглежданите Рикатиеви уравнения.

Ключови думи: Игрови модел, Равновесна точка (партия), Уравнение на Ляпунов, Уравнение на Рикати, Позитивна система.

1. Увод

В настоящия доклад са представени няколко линейноквадратични игрови модела. Общото между тях е търсенето на равновесие чрез намиране на стабилизиращо решение на съответно алгебрично Рикатиево уравнение.

Една от водещите статии, която поставя началото на серия от методи от алгоритми е статията на Lanzon и съавтори¹. Разглежда се следната динамична система:

$$dx = A x dt + G v dt + B u dt, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

в която $x(t)$ е състоянието на системата, $u(t)$ е функция на управлението, и $v(t)$ е функция на смущенията, които са вектор стълбове с подходяща размерност. Тази система се разглежда заедно с функционала, който често се интерпретира като разходен функционал или индекс в съответния модел:

$$J_\gamma(u, v) = \int_0^\infty (x^T C^T C x + u^T R u - \gamma^2 v^T v) dt. \quad (2)$$

Вторият модел, който ще представим изследва следната дина-

¹ A.Lanzon, Y. Feng, B. Anderson, M. Rotkowitz, Computing the positive stabilizing solution to algebraic Riccati equations with an indefinite quadratic term via a recursive method, IEEE Transactions on automatic control, 2008, 53(10), 2280-2291.

мична система²:

$$dx = Ax(t) dt + Gv(t) dt + Bu(t) dt + \tilde{A} x(t)dw(t), \quad (3)$$

където w е едномерен процес на Винер. Съответния функционал на динамичната стохастична система (3) е

$$J_{\gamma}(u, v) = E \int_0^{\infty} (x^T C^T C x + u^T R u - \gamma^2 v^T v) dt. \quad (4)$$

Във всяка една система функцията на управлението $u(t)$ се стреми да намери минимума на съответния функционал, а функцията на смущенията $v(t)$ се стреми към това функционалът да заеме своята максимална стойност. По този начин всяка от функциите се интерпретира като самостоятелен играч в игровия модел. При провеждане на теоретични изследвания се намира функцията на управлението:

$$u^* = -R^{-1} B^T P^* x(t), \text{ (съответно } v^* = \gamma^{-2} G^T P^* x(t) \text{)}, \quad (5)$$

за да се достигне до минималната стойност на съответния функционал, където P^* е стабилизиращо решение за съответно Рикатиево уравнение.

За модела (1)-(2) се търси стабилизиращо положително определено решение P^* на матричното Рикатиево уравнение:

$$A^T P + PA + C^T C - P(B R^{-1} B^T - \gamma^{-2} G G^T)P = 0, \quad (6)$$

т.е. всяка собствена стойност на матрицата $A + \gamma^{-2} G G^T P^* - B R^{-1} B^T P^*$ има отрицателна реална част. За модела (3)-(4) се търси стабилизиращо положително определено решение на матричното Рикатиево уравнение:

$$0 = \mathcal{R}(P) = A^T P + PA + C^T C + \tilde{A}^T X \tilde{A} - P(B R^{-1} B^T - \gamma^{-2} G G^T)P \quad (7)$$

т.е. всяка собствена стойност на оператора на Ляпунов

$$\mathcal{L}_{A^*, \tilde{A}}(X) = A^{*T} X + X A^* + \tilde{A}^T X \tilde{A}$$

да има отрицателна реална част и

$$A^* = A + \gamma^{-2} G \times G^T P^* - B R^{-1} B^T P^*.$$

Двете Рикатиеви уравнения (6) и (7) съдържат в себе си симет-

² Y.T. Feng, B.D.O. Anderson, An iterative algorithm to solve state-perturbed stochastic algebraic Riccati equations in LQ zero-sum games, Systems and Control Letters, 2010, 59(1), 50-56.

ричната матрицата $B R^{-1} B^T - \gamma^{-2} G G^T$, която в общия случай не е положително определена. Тя може да има както положителни, така и отрицателни собствени стойности. Индефинитността на тази матрица налага търсенето на нов подход за намиране на стабилизиращо решение на тези уравнения. Lanzon и съавтори¹ предлагат метод, в който търсеното решение на (6) се представя чрез построяване на две матрични редици. Авторите Wu и Luo³ описват друг метод на решаване на (6) и доказват неговата сходимост. Втората особеност се отнася за уравнението (7), в което има един допълнителен член $\tilde{A}^T X \tilde{A}$. Feng и Anderson³ обобщават метода на Lanzon за уравнението (7).

Знаейки стабилизиращото положително полуопределено решение P^* на съответното Рикатиево уравнение се формира равновесната партия (u^*, v^*) , за която са изпълнени следните неравенства:

$$J_\gamma(x_0, u^*, w) \leq J_\gamma(x_0, u^*, w^*) \leq J_\gamma(x_0, u, w^*)$$

за всички функции u, w от допустимото им множество (Basar и Olsder⁴).

2. Интерпретация от теория на игрите

В теория на игрите се прилага следния подход за достигане до равновесната точка. Дадена игра се разиграва многократно, като всеки път играчите избират своя стратегия по начин, който да ги доближи до поставената цел. След определен брой пъти разигравания, тези стратегии стават все по-близки и неразличими. Достигането на този момент означава, че играчът е достигнал до равновесната си стратегия и всички равновесни стратегии определят равновесната партия на играта. Това е итеративен подход или подход на последователните приближения за достигане на равновесие. Този под-

³ H.-N. Wu, B. Luo, Simultaneous policy update algorithms for learning the solution of linear continuous-time H_∞ state feedback control, Information Sciences, 2013, 222, 472-485.

⁴ T.Basar, G. Olsder. Dynamic Non-Cooperative Game Theory. SIAM. 1995.

ход успешно се прилага в класическата безкрайна безкоалиционна игра, модел на Курно и нейни приложения.

2.1. Поведение на управляващия играч

Прилагаме тази идея към разглежданата игра (H_{∞} оптимизационната задача). Ще представим идеята на примера на играта (3)–(4). Динамичната система (3) зависи от две функции – функцията на управлението $u(t)$ – управляващият играч и функцията на смущението $v(t)$ – играч на смущението. Стратегиите на двамата играчи задаваме чрез следните две редици: $u_0, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots$ и $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots$. На базата на вида (5) на равновесните стратегии ще търсим u_k и v_k от вида $u_k = -R^{-1} B^T P_k x(t)$ и $v_k = \gamma^{-2} G^T P_k x(t)$. Тъй като матрицата P_k е обща за стратегиите на двамата играчи u_k и v_k , то всеки от тях може да достигне до равновесната си стратегия u^* и v^* без да зависи от поведението и избора на другия играч.

При първото разиграване на играта двамата играчи обявяват своите стратегии $u_0 = 0$ и $v_0 = 0$, което означава, че $P_0 = 0$. Всеки от играчите трябва да избере своя стратегия за следващото разиграване на играта, така че да получи по-добра за своята цел стратегия. Управляващият играч се стреми да минимизира функционала (4):

$$J_{\gamma}(u, v_0) = E \int_0^{\infty} (x^T C^T C x + u^T u) dt$$

при условие (3): $dx = Ax(t) dt + B u(t) dt + \tilde{A} x(t) dw(t)$.

Решението на поставената оптимизационна задача се представя чрез намиране на стабилизиращото решение P_1 на следващото Рикатиново уравнение:

$$A^T P_1 + P_1 A + \tilde{A}^T P_1 \tilde{A} - P_1 B R^{-1} B^T P_1 + C^T C = 0.$$

Нека предположим, че е известна матрица P_k , чрез която се определя стратегията v_k . В този момент целта на управляващия играч е да минимизира функционала (4), който има вида:

$$J_{\gamma}(u, v_k) = E \int_0^{\infty} (x^T (C^T C - \gamma^{-2} P_k G G^T P_k) x + u^T u) dt$$

при условие

$$dx = (A + \gamma^{-2} G G^T P_k) x(t) dt + B u(t) dt + \tilde{A} x(t) dw(t).$$

Управляващият играч трябва да намери стабилизиращо положително определено решение P_{k+1} на Рикатиевото уравнение

$$(A + \gamma^{-2} G G^T P_k)^T P_{k+1} + P_{k+1} (A + \gamma^{-2} G G^T P_k) + \tilde{A}^T P_{k+1} \tilde{A} - P_{k+1} B R^{-1} B^T P_{k+1} + C^T C - \gamma^{-2} P_k G G^T P_k = 0. \quad (8)$$

Стабилизиращото положително полуопределено решение P_{k+1} за това уравнение стабилизира оператора на Ляпунов $\mathcal{L}_{A+\gamma^{-2} G G^T P_k - B R^{-1} B^T P_{k+1}, \tilde{A}}$. Функцията на управлението, която минимизира функционала при v_k има вида $u_{k+1} = -R^{-1} B^T P_{k+1} x(t)$. Процесът продължава да се изпълнява от управляващият играч дотогава докато разликата по норма между две съседни приближения u_s и u_{s+1} ($s > k$) не бъде по-малка от зададено малко положително число и нормата на матричната функция $\mathcal{R}(P_{s+1})$ да бъде достатъчно малка. Стабилизиращото решение на $\mathcal{R}(P) = 0$ е $P^* = P_{s+1}$, а равновесната стратегия u^* може да се използва при следващи разигравания на играта.

Въпросът за сходимостта на матричната редица $P_0, P_1, \dots, P_k, \dots$ към търсеното решение P^* е изследван от Feng и Anderson².

2.2. Поведение на втория играч

Вторият играч се стреми да максимизира функционала (4). Нека да предположим, че са известни двете функции u_k и v_k (те са различни от тези в секция 2.1) и $u_k = -R^{-1} B^T W_k x(t)$, където W_k е решение на някакво Рикатиево уравнение (уравнението (9), представено по-долу). Вторият играч трябва да максимизира функционала (4), представен във вида:

$$J_\gamma(u, w) = E \int_0^\infty (x^T (C^T C + W_k B R^{-1} B^T W_k) x - \gamma^2 v^T v) dt$$

при условие

$$dx = (A - B R^{-1} B^T W_k) x(t) dt + G v(t) dt + \tilde{A} x(t) dw(t).$$

Търси се стабилизиращо положително определено решение

$$\begin{aligned}
& W_{k+1} \text{ на Рикатиевото уравнение } (W_0 = 0, k=1, 2, \dots): \\
& (A - BR^{-1} B^T W_k)^T W_{k+1} + W_{k+1} (A - BR^{-1} B^T W_k) + \\
& \tilde{A}^T W_{k+1} \tilde{A} + W_{k+1} \gamma^{-2} G G^T W_{k+1} + C^T C + \\
& + W_k BR^{-1} B^T W_k = 0, (W_0 = 0).
\end{aligned} \tag{9}$$

Процесът продължава и приключва при същите условия както разглежданият процес в секция 2.1. Дали матричната редица $\{W_k\}_{k=0}^\infty$ е сходяща към търсеното решение P^* ? Лесно се установява, че ако редицата $\{W_k\}_{k=0}^\infty$ е сходяща, то нейната граница е P^* . До момента обаче доказателство за нейната сходимост не е известно. Направени са редица числени експерименти и са изследвани матричните редици, породени от рекурентното уравнение (9), които потвърждават сходимостта на матричната. Освен това, изследвайки итерационния метод, изведен от Feng и Anderson³ и изпълним няколко алгебрични преобразования се достига до следната итерационна формула:

$$\begin{aligned}
& (A - BR^{-1} B^T W_k)^T W_{k+1} + W_{k+1} (A - BR^{-1} B^T W_k) + \tilde{A}^T W_{k+1} \tilde{A} + \\
& + W_{k+1} \gamma^{-2} G G^T W_{k+1} + C^T C + W_k BR^{-1} B^T W_k - \gamma^{-2} (W_{k+1} - \\
& - W_k) G \times \\
& \times G^T (W_{k+1} - W_k) - (W_{k+1} - W_k) BR^{-1} B^T (W_{k+1} - W_k) = 0,
\end{aligned}$$

която води до стабилизиращото решение. А за да приложим рекурентното уравнение (9) го преобразуваме във вида:

$$\begin{aligned}
& (A - BR^{-1} B^T W_k)^T W_{k+1} + W_{k+1} (A - BR^{-1} B^T W_k) + \tilde{A}^T W_k \tilde{A} + \\
& + W_k \gamma^{-2} G G^T W_k + C^T C + W_k BR^{-1} B^T W_k = 0.
\end{aligned}$$

3. Игрови модел за позитивни системи

За динамичната система (1) налагаме изискването функцията на състоянието $x(t)$ да бъде неотрицателна за всеки неотрицателен начален вектор x_0 и всяка неотрицателна функция $u(0)$ и $v(0)$. При това условие динамичната система се нарича *позитивна*. Известно е твърдение, според което една система е позитивна, ако матриците G и B са неотрицателни, а матрицата $-A$ е Z -матрица. Една матрица N се нарича Z -матрица, ако съществува реално число s и неотрицател-

на матрица C , така че е вярно представянето $H=sI-C$. Ако s е по-голямо от спектралния радиус на C , то H се нарича M -матрица. Тук ще разгледаме игрови модел за позитивна система с двама играчи и *обратна връзка*⁵, т.е. за управлението $v(t)$ и $u(t)$ на всеки играч съществува обратна връзка със състоянието $v(t) = F_1 x(t)$ и $u(t) = F_2 x(t)$. За системата (1) дефинираме множеството от наредени двойки матрици (F_1, F_2) , за които матрицата $A + GF_1 + BF_2$ е устойчива. Дефинираме се два функционала

$$J_i(F_1, F_2, x_0) = \int_0^\infty (x^T (Q_i + F_1^T R_{i1} F_1 + F_2^T R_{i2} F_2) dt), \quad i=1,2,$$

всеки от които се интерпретира като цел на първи и втори играч. Матриците от функционалите Q_i и R_{i1}, R_{i2} са симетрични, а R_{11}, R_{22} са отрицателно определени матрици. Двете функции $v(t)$ и $u(t)$ се наричат управление за съответния играч. Целта на всеки играч е да намери максималната възможна стойност на съответния функционал, като отчита интереса на другия играч, или търсят се такива матрици (F_1^*, F_2^*) за играта, за които следните неравенства са изпълнени:

$$J_1(F_1^*, F_2^*, x_0) \geq J_1(F_1, F_2^*, x_0) \quad \text{и} \quad J_2(F_1^*, F_2^*, x_0) \geq J_2(F_1^*, F_2, x_0).$$

Двойката матрици (F_1^*, F_2^*) се наричат партия или точка на равновесие за дефинираната позитивна система. Управлението на всеки от играчите, водещо до точката на равновесие се определя по

$$v^*(t) = F_1^* x(t) = -R_{11}^{-1} G^T X_1^* x(t) \quad \text{и}$$

$$u^*(t) = F_2^* x(t) = -R_{22}^{-1} B^T X_2^* x(t).$$

Матриците X_1^* и X_2^* задават стабилизиращо решение за системата матрични уравнения:

$$0 = -A^T X_1 - X_1 A - Q_1 + X_1 S_2 X_2 + X_2 S_2 X_1 + X_1 S_1 X_1 + X_2 S_{12} X_2$$

$$0 = -A^T X_2 - X_2 A - Q_2 + X_2 S_1 X_1 + X_1 S_1 X_2 + X_2 S_2 X_2 + X_1 S_{21} X_1,$$

което означава, че матрицата $A + G F_1^* + B F_2^*$ е устойчива. В системата Рикатиеви уравнения са означени $S_1 = G R_{11}^{-1} G^T \leq 0$, $S_2 = B R_{22}^{-1} B^T \leq 0$ (матриците имат неположителни елементи) и $S_{12} =$

⁵ van den Broek B. Uncertainty in Differential Games. PhD-thesis Univ. Tilburg, Netherlands, 2001.

$BR_{22}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1}B^T \geq 0$ и $S_{21} = GR_{11}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1}GB^T \geq 0$. За търсене на стабилизиращото решение е приложен метод на Нютон съгласно Теорема 8⁶ по следните формули:

$$-A^{(k)T}X_1^{(k+1)} - X_1^{(k+1)}A^{(k)} + W_{12}^{(k)}X_2^{(k+1)} + X_2^{(k+1)}W_{12}^{(k)T} = \tilde{Q}_1^{(k)}, \quad (10)$$

$$-A^{(k)T}X_2^{(k+1)} - X_2^{(k+1)}A^{(k)} + W_{21}^{(k)}X_1^{(k+1)} + X_1^{(k+1)}W_{21}^{(k)T} = \tilde{Q}_1^{(k)}, \quad (11)$$

където

$$A^{(k)} = A - S_1X_1^{(k)} - S_2X_2^{(k)}, \quad W_{ij}^{(k)} = X_i^{(k)}S_j - X_j^{(k)}S_{ij},$$

$$\tilde{Q}_i^{(k)} = Q_i + X_i^{(k)}S_iX_i^{(k)} + X_i^{(k)}S_jX_j^{(k)} + X_j^{(k)}S_jX_i^{(k)} - X_j^{(k)}S_{ij}X_j^{(k)},$$

за $i, j = 1, 2; i \neq j$.

При същите условия, както в цитираната Теорема 8⁶ разглеждаме нов итерационен процес, при който в уравнение (10) замествахме $X_2^{(k+1)}$ с $X_2^{(k)}$ и в уравнение (11) замествахме $X_1^{(k+1)}$ с $X_1^{(k)}$ и получаваме итерационен процес, в който се решават две уравнения на Лапунов на всяка стъпка. За този процес се установяват същите свойства както за метода на Нютон. Новият итерационен процес използва по-малко оперативна памет от метода на Нютон, но е по-бавно сходящ от него. В същото време, този итерационен процес позволява на всеки от играчите сам да намира следващата си стратегия, определена от $X_1^{(k+1)}$ и $X_2^{(k+1)}$, като знае текущите матрици $X_1^{(k)}$ и $X_2^{(k)}$.

4. Заключение

Представихме методи за намиране на равновесието в три игрови модели, които обясняват поведението на играчите и позволяват ефективен избор на стратегия за всеки.

⁶ T. P. Azevedo-Perdicou, G. Jank, Linear Quadratic Nash Games on Positive Linear Systems, European Journal of Control (2005)11:1–13.

5. Благодарности

Настоящото изследване е проведено и финансирано по договор № Д03-91 от 27.05.2015 на схема BG09 “Фонд за стипендии на ЕИП“, мярка „Проекти за междуинституционално сътрудничество“, програма Финансов механизъм на ЕИП.

МОДЕЛИРАНЕ НА РАЗПРОСТРАНЕНИЕТО НА ФИНАНСОВА ИНФЕКЦИЯ ЧРЕЗ ИГРОВИ МОДЕЛИ И УЕЙВЛЕТ ТРАНСФОРМАЦИЯ

Гл. ас. д-р Боряна Богданова, проф. дмн Иван Иванов
Стопански факултет, СУ „Св.Кл.Охридски“

Резюме. Скоро след настъпването на „Азиатския грип“ и „Руския вирус“ в литературата се появява терминът „финансова инфекция“, който отразява появата на неочаквано по сила и мащаб разпространение на криза, ограничена първоначално в рамките на един или група от пазари (Forbes и Rigobon¹). Възможностите за моделиране са разгледани през призмата на уейвлет трансформацията и теория на игрите, тъй като с помощта на уейвлет трансформацията могат да се проследят настъпилите изменения в зависимостите между отделните пазари спрямо различни времеви хоризонти, а теорията на игрите дава възможност да се обясни и предскаже поведението на икономическите агенти по време на криза. Изследователската рамка е приложена върху характеристиките на разпространението на дълговата криза в Европа.

Въведение

Редица автори изследват каналите, чрез които финансова криза, ограничена първоначално в един регион, се разпространява в други региони (виж статията на Bekaert и съавтори², както и цитираните в нея литературни източници). Целта на настоящия доклад е да разгледа методология, основана на игровия модел от теория на игрите на Ahnert и Bertsch³, съчетан с уейвлет анализ. Нейното при-

¹ Forbes, K. & Rigobon, R., 2001. Measuring contagion: conceptual and empirical issues. От: S. F. K. Cleassens, ред. *International Financial Contagion*. New York: Springer Science+Business Media, pp. 43-66.

² Bekaert, G., Ehrmann, M., Fratzscher, M. & Arnaud, M., 2014. *The global crisis and equity market contagion*, Discussion Paper No 1352: Deutsches Institut für Wirtschaftsforschung, Berlin.

³ Ahnert, T. & Bertsch, C., 2015. A wake-up call theory of contagion. *Sveriges Riksbank Working Paper Series*, p. WP № 294.

ложение и предимства са демонстрирани върху данни за няколко европейски пазари на дълг. Формулираните изводи са с приложна значимост за вземането на управленски решения и изготвянето на адекватна макроикономическа политика.

2. Методология

2.1. Игрови модел

В основата на предложения от Ahnert и Bertsch³ модел е изследването на поредица от глобални координационни игри с промяна в режима в два обособени региона, индексирани с $t \in \{1, 2\}$. Всеки от регионите се характеризира с непрекъснато множество от инвеститори, неутрални към риска, на всеки от които съответства индекс $i \in [0, 1]$. Инвеститорите от първия регион $t = 1$ предприемат едновременно действия, следвани от инвеститорите от втория регион $t = 2$.

Във всеки регион инвеститорите вземат решение едновременно дали да атакуват режима $a_{it} = 1$ или да не предприемат действия $a_{it} = 0$. Крайният резултат зависи от $A_t = \int_0^1 a_{it} di$ и от състоянието на основните икономически показатели на местните пазари (пазарни фундаменти) $\theta_t \in \mathbb{R}$. Налице е промяна в режима, в случай че $A_t > \theta_t$. В настоящия доклад под смяна на режима ще се разбира настъпването на дългова криза, под сила на пазарните фундаменти ще се разбира готовността на региона за изплащане на държавния си дълг, а отказът на инвеститорите да реинвестират освободилите се капитали в държавни ценни книжа се отъждествява с инвеститорската атака.

Моделът е основан на допускането че $P(\rho = 0) = p, P(\rho = \rho_H) = (1 - p)$, като $\rho = \text{corr}(\theta_1, \theta_2)$. Състоянието на пазарните фундаменти θ_t следва двумерно нормално разпределение със средна стойност $\mu_t = \mu$, стандартно отклонение $\alpha_t = \alpha$ и реализирана корелация ρ . Информацията за θ_t е непълна, като преди атаката

всеки инвеститор получава частен сигнал, с определено ниво на шум $x_{it} = \theta_t + \varepsilon_{it}$, където ε_{it} са независими еднакво разпределени случайни величини със средна стойност 0 и дисперсия $\beta, \beta \in (0, \infty)$. Освен това се допуска, че само в случай на криза, настъпила в регион 1, реализираното състояние θ_1 може да се наблюдава от инвеститорите, а за част от тях $n \in [0,1]$ е известна и реализираната корелация ρ .

В регион 1 съществува единствено равновесие, което се характеризира с граничните стойности x_1^* и θ_1^* , като инвеститор i ще атакува в случай, че $x_{i1} < x_1^*$, а криза ще настъпи при $\theta_1 < \theta_1^*$. След настъпването на криза в регион 1 (т.е. $\theta_1 < \theta_1^*$), информираният инвеститор адаптира оценката си за пазарните фундаменти в регион 2 с информацията, която има за θ_1 и ρ : $\theta_2|\rho, \theta_1 \sim N(\rho\theta_1 + (1-\rho)\mu, \frac{1-\rho^2}{\alpha})$. Неинформираният инвеститор също адаптира оценката си за състоянието на пазарните фундаменти в регион 2 само въз основа на информацията за θ_1 : $\theta_2|\theta_1 \equiv p[\theta_2|\rho = 0] + (1-p)[\theta_2|\rho = \rho_H, \theta_1]$. Разпределението на адаптираната оценка за θ_2 е с най-висока средна стойност, но също така и с най-голяма дисперсия в случай, че инвеститорите са информирани и $\rho = 0$, а когато $\rho = \rho_H$, разпределението е с най-малка средна стойност и най-малка дисперсия.

Равновесието в регион 2 е по-сложно и се характеризира с няколко гранични стойности, една от които е $\theta_2^*(n, \rho, \theta_1)$, като криза настъпва в случай, че $\theta_2 < \theta_2^*(n, \rho, \theta_1)$. При условие, че е частната информация е достатъчно точна и инвеститорите нямат информация за корелацията между пазарните фундаменти на двата региона (т.е. $n = 0$), то тогава:

$$\begin{aligned} \Pr\{\theta_2 < \theta_2^*(0, \rho, \theta_1) | \theta_1 < \theta_1^*\} \\ > \Pr\{\theta_2 < \theta_2^*(0, \rho, \theta_1) | \theta_1 \geq \theta_1^*\} \end{aligned} \quad (1)$$

Ahnert и Bertsch³ доказват, че неравенство (1) е в сила за $n \in [0, 1)$. Интересен факт е, че финансовата зараза може да се раз-

пространи в регион 2 дори в случай че всички инвеститори са информирани за липсата на корелация между пазарните фундаменти на двата региона:

$$\Pr\{\theta_2 < \theta_2^*(n, \rho, \theta_1) | \rho = 0, \theta_1 < \theta_1^*\} > \Pr\{\theta_2 < \theta_2^*(n, \rho, \theta_1) | \theta_1 \geq \theta_1^*\} \quad (2)$$

Неравенство (2) може да се изследва по-задълбочено чрез въвеждането на допълнителен параметър $\underline{\theta}_1$, който се явява долна граница на силата на кризата в регион 1. Ако с $\Pr(\theta_2, \rho)$ бъде означена вероятността от настъпване на криза в регион 2, то:

$$d\left(\frac{d\Pr(\theta_2, \rho)}{d\rho}\right)/d\theta_2 < 0, \quad (3)$$

като $\frac{d\Pr(\theta_2, \rho)}{d\rho} < 0$ ако $\theta_1 > \underline{\theta}_1$ и $\frac{d\Pr(\theta_2, \rho)}{d\rho} > 0$ ако $\theta_1 < \underline{\theta}_1$.

Интерпретацията на израз (3) и свързаните с него неравенства на частната производна по отношение на ρ е следната: криза в регион 1, дължаща се на умерено слаби пазарни фундаменти, ще се разпространи с по-голяма вероятност ако $\rho = 0$, а криза в регион 1, дължаща се на изключително слаби пазарни фундаменти, е по-малко вероятно да се разпространи при $\rho = 0$.

Този извод заема централно място в анализа на разпространение на финансова зараза. По същество неравенство (3) дава възможност да се предскаже ефектът на заразяване в зависимост от силата на настъпилата в регион 1 криза и наличието на свързаност между двата изследвани региона⁴. Докато силата на настъпилата криза е лесно измерима, то измерването на свързаността между пазарните фундаменти на два региона е доста сложно за осъществяване чрез конвенционалния иконометричен апарат. Приложението на непрекъснатата уейвлет трансформация предлага решение на този проблем (виж статията на Богданова⁵). В следващата част е предс-

⁴ В така разгледания модел $\rho \geq 0$ измерва зависимостта между двата пазара, основаваща се на съществуващи търговски и финансови връзки.

⁵ Богданова, Б., 2014. Измерване на степента на интеграция между група от фондови пазари. *Икономическа мисъл*.

тавена накратко концепцията за непрекъсната уейвлет трансформация, като заинтересованият читател може да намери по-подробна информация в статията на Aguiar-Conrara и Soares⁶.

2.2. Уейвлет трансформация

Уейвлет функцията $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ трябва да удовлетворява условието за допустимост, което при достатъчно бързо затихване на $\psi(t)$ се свежда до: $\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$, където с $L^2(\mathbb{R})$ е означено множеството от функции, интегрируеми в квадрата си, а с $\Psi(\omega)$ е означена трансформацията на Фурие на $\psi(t)$. Чрез премащабиране и транслация на ψ може да бъде получен набор от дъщерни функции $\{\psi_{\tau,s}; s, \tau \in \mathbb{R}, s \neq 0\}$: $\psi_{\tau,s} = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$. За даден времеви ред $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$, непрекъсната уейвлет трансформация се дефинира по следния начин:

$$W_{x;\psi}(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt,$$

където звездичката е използвана за означение на комплексно спрегнатото число. С цел да се опростят означенията, в текста, който следва $W_{x;\psi}(\tau, s)$ ще бъде означавана с W_x . Смесената уейвлет трансформация на два времеви реда, $x(t)$ и $y(t)$, се получава като $W_{xy} = W_x W_y^*$.

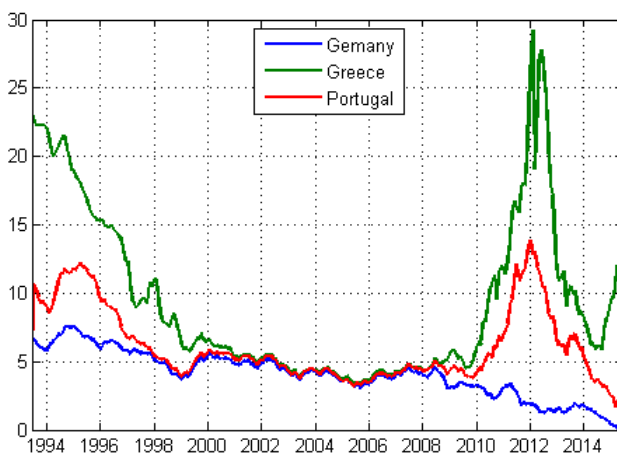
Когато целта на трансформацията е свързана с изследване на степента на свързаност между два времеви реда, то следва да се използва уейвлет кохеренцията, която за времевите редове $x(t)$ и $y(t)$ се означава чрез R_{xy} и се дефинира по следния начин:

$$R_{xy} = \frac{|S(W_{xy})|}{[S(|W_x|^2)S(|W_y|^2)]^{1/2}}, \quad (4)$$

където S е изглаждащ оператор и $0 \leq R_{xy} \leq 1$. Колкото по-близко е стойността на R_{xy} до 1, толкова по-силна е степента на зависимост

⁶ Aguiar-Conrara, L. & Soares, M., 2014. The continuous wavelet transform: moving beyond uni-and bivariate analysis. *Journal of Economic Surveys*, 28(2), pp. 344-75.

между редовете $x(t)$ и $y(t)$. Основен извод на Богданова⁵ е, че стойностите на R_{xy} , съответстващи на ниските честоти могат да бъдат използвани за измерване на връзката между пазарните фундаменти на два фондови пазара.

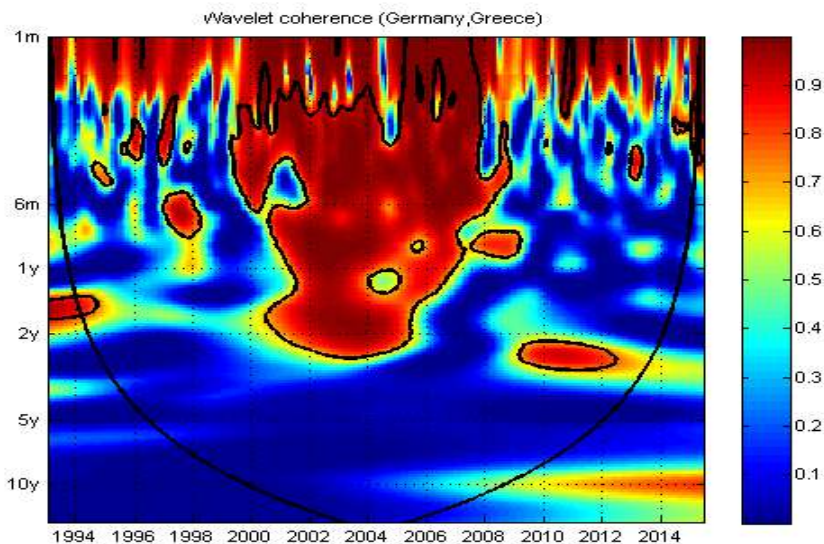


Фигура 1. Месечен лихвен процент върху държавни ценни книжа с 10-годишен матуритет

3. Емпирични резултати

Приложението и предимствата на описаната методология са демонстрирани върху данни за пазарите на дълг на Германия, Гърция и Португалия за периода 01.1993-06.2015 г. Използвани са дългосрочните месечни лихвени проценти върху държавни ценни книжа с 10-годишен матуритет, представени на **Фигура 1**. Източникът на данните е <https://www.ecb.europa.eu>. От фигурата може да се забележи конвергенция на лихвените проценти на трите пазара в периода от 2002 до 2009 г., след което е налице тенденция за дивергенция. За целите на изследването е разгледан процесът на разпространение на Гръцката дългова криза. Степента на свързаност между гръцкия пазар на дълг и пазарите на Германия и Португалия е измерена чрез уейвлет кохеренцията, дефинирана с формула (4), число-

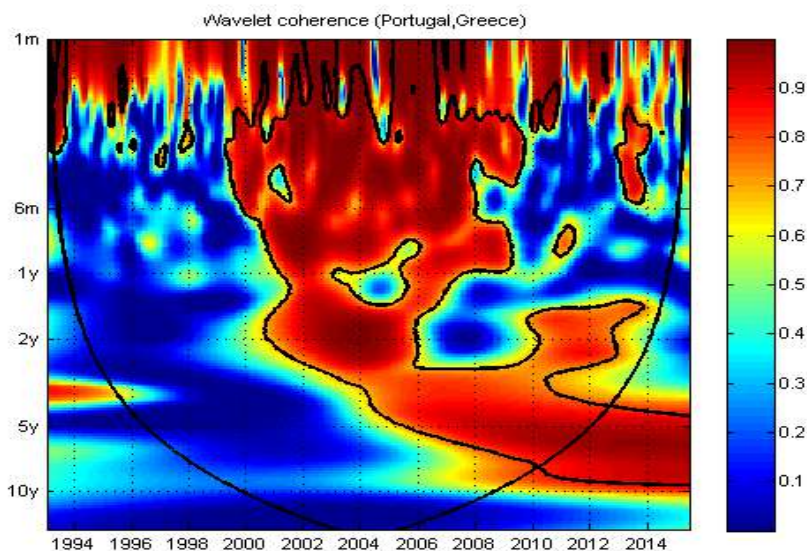
вата реализация на която, е осъществена посредством свободно достъпен пакет от функции, наличен на <http://sites.google.com/site/aguiarconraria/joanasoares-wavelets>. Получените резултати са представени нагледно на Фигура 2 и Фигура 3.



Фигура 2. Уейвлет кохеренция между пазарите на държавен дълг на Гърция и Германия

Представянето е под формата на цветна карта, всеки пиксел от която съответства на точно определена стойност R_{xy} ($0 \leq R_{xy} \leq 1$) в дадена точка от равнината „време-честота“. Оста „x“ съответства на времевото измерение, а оста „y“ – на честотното. Всяка стойност на R_{xy} е изразена с определен цвят, като използваният цветови код е представен в дясно от картата. Използваните честоти са изразени във времеви единици, като най-високата честота съответства на 1 месец, а най-ниската – на 15 години. Статистически значимите коефициенти са очертани с черен контур. Конусът на влияние е означен с плътна черна линия и представлява зоната, в която трансформацията е засегната от удължаването на редовете при пресмятане на

крайните коефициенти на ТВ кохеренцията. Общото между двете фигури е наличието на силна краткосрочна свързаност на пазара на държавен дълг на Гърция с пазарите на Германия и Португалия. Тази свързаност се наблюдава в периода 2000-2009 г. и отразява наличието на конвергенция между пазарите. По отношение на ниските честоти, които отразяват зависимостта между пазарните фундаменти, на фиг. 2 може да се забележи липса на значими коефициенти. От друга страна, анализът на нискочестотните коефициенти на Фигура 3 е индикативен за силна зависимост между фундаментите на гръцкия и на португалския пазар от 2004 г. нататък. Този извод в контекста на неравенство (3) е сигнал за висока вероятност от разпространение на дълговата криза от Гърция към Португалия, на каквато сме свидетели през 2011 г.



Фигура 3. Уейвлет кохеренция между пазарите на държавен дълг на Гърция и Португалия

4. Заключение

Проведените емпирични експерименти илюстрират възможността за идентифициране на пазарите, които са най-уязвими в случай на настъпване на криза в даден регион. Изводите, които могат да бъдат направени с помощта на описаната методика, са от значение не само от инвеститорска гледна точка, но и за изготвянето на адекватни политики за контрол и ограничение на разпространението на финансови кризи.

5. Благодарности

Настоящото изследване е проведено и финансирано по договор № Д03-91 от 27.05.2015 на схема BG09 “Фонд за стипендии на ЕИП“, мярка „Проекти за междуинституционално сътрудничество“, програма Финансов механизъм на ЕИП.

ИГРОВИ МОДЕЛ НА ПРЕГОВАРЯНЕТО И ДОГОВАРЯНЕТО ПРИ СЪСТАВЯНЕ НА ПРАВИТЕЛСТВО НА РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ СЛЕД ИЗБОРИТЕ НА 05.10.2014 г.

Проф. д-р Дочо Дочев¹, проф. д-р Здравко Славов², ас. Ангел Генчев¹

¹Икономически университет-Варна,

²Варненски свободен университет

Резюме. Конфликтният анализ, създаден през 80те и 90те години на миналия век за решаване на сложни конфликтни ситуации е приложен за моделиране на преговорите и договарянето при съставяне на правителство в една сложна политическа и икономическа обстановка в България.

1. Основни понятия от теория на игрите и конфликтния анализ.

Излязлата през 1944 г. монография на Джон фон Нойман и Оскар Моргенщерн – „Теория на игрите и икономическо поведение“ – събужда надеждите за развитие на теория на игрите в универсална математическа теория за рационално поведение в условията на конфликт на интереси. Тя предизвиква голям интерес и всеобщо възхищение. Малко са научните трудове, с математическо съдържание, които успяват да предизвикат широк отзвук както в математическите, така и в нематематическите среди.

Създателите на класическата теория на игрите фон Нойман и Моргенщерн си поставят за цел да създадат теория, определяща на всеки субект рационално поведение във всяка ситуация, която може да възникне. Скоро след създаването ѝ се установява, че тя има ограничено практическо приложение. Именно правилата на рационалността, на които тя се основава, се оказват най-спорни в теорията.

Много от изследователите се отказват не само от опитите да я надстроят, но и от надеждите да я използват като техника за анализ на конфликтни ситуации. Но има и такива, които продължават с

опитите да развият класическата теория на игрите и да я превърнат в инструмент за изследване на реални конфликти. Един от тези изследователи е Найджъл Хауърд. През 1971 г. той публикува книгата си „Парадокси на рационалността. Теория на метаигрите и политическо поведение” и така поставя началото на приложните течения в областта на теория на игрите.

Нуждата от консултиране и водене на преговори е главния мотив за превръщане на класическата теория на игрите в ефективен инструмент за анализ и разрешаване на конфликти. Умението да се отчитат не само действията на участниците в конфликта, но също и контрадействията, както и действията на контрадействията е необходимо условие за ефективното разрешаване на конфликти. Емоциите, ирационалните действия, измамата, неверието, заплахата, обещанията влияят на изменението на предпочитанията и на самото поведение на играчите.

По късно канадските учени Нийл Фрейзър и Кийт Хипел усъвършенстват теорията на метаигрите, като създават конфликтния анализ и теория на хиперигрите²¹.

Последната съществена модификация на класическата теория на игрите се нарича теория на драмата и е въведена през 1992 г. от широк колектив от учени и изследователи в тази област.

Конфликтният анализ е набор от практически методи за прилагане на постиженията в областта на теория на игрите към анализирането и разрешаването на реални конфликти, а в теоретическо отношение свързва конфликтния анализ с идеите на теория на игрите.

От гледна точка на **класическата теория на игрите**, един играч се държи **разумно** или има **рационално поведение** тогава и само тогава, когато избира всеки изход, чиято полезност не зависи от действията на неговите противници.

От гледна точка на **конфликтният анализ** всеки играч се държи **разумно**, ако се съобразява с действията на останалите игра-

²¹ Fraser N.M., Hipel K.W. Conflict Analysis. Models and Resolution. New York, 1984.

чи и относно тях избира така наречения стабилен изход.

Стабилен изход за даден играч се нарича изход, който не може да бъде сменен от играча с по-предпочитан от него изход без изменение стратегията на противника (стратегии на останалите играчи).

Ще разгледаме игра с двама играча А и В. Въвеждаме понятието Едностранно подобряване на играча на своята позиция (стратегия).

Казваме, че играчът А има едностранно подобрение на даден изход q , ако той може да направи по-добър избор в сравнение с изхода q , докато играчът В не променя своята стратегия.

Чрез $UI(q)$ означаваме множеството от изходи, които са едностранно подобрение на изхода q .

Има няколко вида стабилност:

1) Рационално стабилен изход (г)

Изходът q се нарича рационален (рационално стабилен) ако няма едностранни подобрения, т.е. $UI(q)=\emptyset$

2) Последователно (санкциониран) стабилен изход (S)

Изходът q се нарича последователно стабилен за един играч, ако за всички възможни едностранни подобрения на този изход, другият играч може да предприеме действия (санкции), които водят до резултат, по-малко предпочитан изход от изхода q , който играчът иска да подобри.

Санкцията се нарича надеждна ако е такава, която води до по-предпочитан резултат за играча, който предприема санкцията.

Възможността, че може да се достигне до по-непредпочитан изход при промяна на стратегията на играча го кара да се откаже от едностранното подобрение на изхода q и създава вид на стабилност.

3) Нестабилна изход (u).

Изходът q се нарича нестабилен за даден играч ако $UI(q)\neq\emptyset$ и за поне едно едностранно подобрение за този играч няма санкции.

4) Едновременно стабилен изход (SS).

Изходът q се нарича едновременно стабилен, ако е нестабилен за двамата играчи А и В, и a , b са едностранните им подобрения из-

ходи съответно за играчите и при едновременно подобряване от страна и на двамата играчи се достига до по-непредпочитан изход за единия или за двамата играчи.

Договарянето и преговарянето включват специален вид конфликти, в които участниците се опитват да постигнат взаимно приемливи договори. Ситуациите се различават от конвенционалните конфликти, обаче базовата идея на конфликтния анализ може да се прилага еднакво добре и за проблеми с договаряне и преговаряне.

Термините „договаряне“ и „преговаряне“ имат почти еднакво значение в ежедневието, но в специализираната литература те са придобили малко по-специално значение. Ниеренберг (1973), например, разглежда договарянето, като нещо, което може да бъде моделирано и анализирано, а преговарянето – като противопоставяне на анализа, защото няма правила и всичко е възможно при него.

Рубин и Браун (1975) виждат договарянето като нещо направено между индивиди, докато преговарянето се провежда между групи. Стивънс (1963) посочва, че може да се „сключва сделка“ без преговаряне, но обикновено се включва договаряне.

Кенеди (1980) разглежда договарянето като акт на предоставяне на алтернативи, компромиси и отстъпки по време на процеса на преговаряне.

В научните изследвания и специализираните публикации термините „договаряне“ и „преговаряне“ придобиват по-различно значение и се използват по следния начин:

- договарянето се приема като технически процес, при който две или повече страни постигат взаимно приемливо споразумение за ограничени ресурси и може да бъде напълно моделирано математически;

- преговарянето включва човешките взаимодействия, които формират обкръжаващата среда на процеса на договаряне. Преговарянето обикновено е евристично и може да се разглежда по-скоро като изкуство, отколкото като наука.

Когато разглеждаме договаряне и преговаряне се използва и

пети тип стабилност – стабилност при коопериране. Ако един кооперативен изход без едностранни подобрения е предпочитан от играча пред най-малко предпочитания равновесен изход, който не е кооперативен, то той е стабилен при коопериране. Тази стабилност се отбелязва със символа „с“.

2. Изграждане на игрови модел за сформирание на правителство.

2.1. Предистория

На парламентарните избори проведени на 5 октомври 2014-та година 8 политически партии и коалиции успяват да преодолеят 4 процентовата бариера и да имат свои народни представители в Народното събрание. Подробното разпределение на местата и получените гласове са дадени в следващата таблица:

Таблица 1

Разпределение на депутатите по партии

Партия	Брой гласове	Брой депутати
ГЕРБ	1 072 491	84
БСП	505 527	39
ДПС	487 134	38
РБ	291 806	23
ПФ	202 453	19
ББЦ	186 938	15
АТАКА	148 262	11
АБВ	136 223	11
Общо	3 501 000	240

На лидера на партията спечелила изборите, Бойко Борисов, е възложено от президента на Република България да сформира правителство.

Представители на ГЕРБ провеждат срещи с представители на другите седем партии и коалиции по реда на представянето им на

изборите.

След първия кръг от преговори се установява, че БСП, ДПС²², ББЦ и АТАКА няма да участват в бъдещото правителство. За втория кръг остават РБ, ПФ и АБВ.

2.2. Моделиране на създалата се ситуация със средствата на конфликтния анализ

Алгоритъмът на конфликтния анализ е следния:

1. Определяне на анализатори и времева рамка – за моделирането на създалата се ситуация на преговаряне и договаряне избираме периода непосредствено след първата серия от преговори 20.10.14 – 05.11.14 г.

2. Набавяне на информация за разглеждания конфликт – за нуждите на анализа са проучени множество публикации в престижни и уважавани вестници и списания, официалните информационни сайтове на политическите партии като и техните официални изявления и интервюта по време на предизборната кампания и след изборите. Използвани са и предизборните програми и платформи на политически партии ГЕРБ, РБ и АБВ.

3. Анализиране на наличната информация и определяне на играчите – в игровия модел на преговаряне участват 4 основни играча, това са ГЕРБ, РБ, ПФ и АБВ.

4. Определяне на опциите – за водещия играч ГЕРБ определяме 3 опции, а за всеки от останалите играчи приемаме само първите две:

1-твърда позиция и отстояване на приоритетите застъпени в предизборната програма;

2-компромис при решаване на проблеми, по които не са на еднакво мнение;

3- популизъм - търсене на обществена популярност и връзка с опозицията.

²² При преговорите с ДПС има съвпадение по почти всички от 18-те приоритета предложени от ГЕРБ, но те отказват да направят коалиция с ДПС заради разногласия и конфронтация в миналото.

5. Сглобяване на първоначалния модел на конфликта – тъй като ГЕРБ води преговорите, а останалите политически партии имат общи позиции и допирни точки за споразумение с ГЕРБ, но не и помежду си, следва да разгледаме 3 едни и същи игри 2×2 .

Нека да разгледаме играта ГЕРБ – РБ. Водещият преговорите играч има 3 опции, а другият – 2, общо за модела 5. Броят на всички възможни изходи е $2^5=32$. Ако използваме 1 за да покажем, че опцията е избрана и 0 – че е отхвърлена, то възможните изходи биха могли да се представят в двоичен запис (вж. табл. 2).

6. Премахване на изходи – често при първоначалното конструиране на игрови модел се генерират изходи, които са логически неосъществими за един или повече играчи, или се основават на неосъществимост по предпочитание на един или повече играчи. Такива изходи не са важни за анализа и следва да се премахнат от модела. Изходите, които би следвало да се премахнат от моделираната ситуация са дадени в следващата таблица:

Таблица 3

Изходи за премахване

Играч	Опция	Набори от изходи за премахване			
<u>ГЕРБ</u>	Твърда позиция	1	–	–	–
	Компромис	1	–	0	1
	Популизъм	–	–	–	–
<u>РБ</u>	Твърда позиция	–	1	–	–
	Компромис	–	1	1	0

След премахването в модела остават следните изходи:

Таблица 4

Осъществими изходи

ГЕРБ	Твърда позиция	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
	Компромис	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
	Популизъм	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1
РБ	Твърда позиция	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
	Компромис	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Десетичен запис		0	1	4	5	8	9	12	13	18	22

7. Определяне на предпочитанията

Десетичните вектори на предпочитанията на ГЕРБ и РБ са:

ГЕРБ: $5 > 1 > 22 > 4 > 18 > 0 > 13 > 9 > 12 > 8$

РБ: $8 > 18 > 22 > 0 > 12 > 4 > 9 > 13 > 1 > 5$

8. Анализ на стабилност

Таблица 5

Анализ на стабилност

	X	X	E	E	X	E	E	X	X	X	
	г	s	c	s	u(c)	s	г	u	u	u	
ГЕРБ	5	1	22	4	18	0	13	9	12	8	O
		5		5	22	5		13	13	13	UI
				1		1			9	9	UI
						4				12	UI
	г	c	c	s	г	s	г	г	u	u	
РБ	8	18	22	0	12	4	9	13	1	5	O
				8		12			9	13	UI

От таблица 5 се вижда векторът на предпочитание на ГЕРБ. Най-предпочитан е изход 5, включващ използване на популизъм без РБ да предприема твърда политика. Следващият е изход 1, където следва твърда политика. Третият най-предпочитан изход за ГЕРБ е изход 22, при който преговаря с РБ и търси договаряне по несъвпадащи въпроси и отново използва популизма. За РБ най-предпочитан изход е 8, след това изход 18, при който прави компромис заедно с ГЕРБ.

9. Разрешаване на конфликта – изходите 4, 0 и 13 са некооперативни и са едновременно стабилни и за двамата играчи. Кооперативните изходи, които са по-предпочитани пред най-малко предпочитаното некооперативно равновесие са стабилни по коопериране, освен тези които са нестабилни. Тези които са по-малко предпочитани от най-малко предпочитаното некооперативно равновесие не са равновесни (стабилни).

В разглеждания модел се вижда, че има четири равновесни изхода 22, 4, 0 и 13. Всеки един от тях може да бъде вероятно решение на разглежданата ситуация. От тях единственият кооперативен изход е изход 22. Той е и най-предпочитан във векторите на предпочитание и на двамата играчи, и следователно е търсеното решение на конфликта.

3. Заключение

Историческият развой на събитията потвърждава резултатите от анализа. След тежки и продължителни преговори между ГЕРБ и РБ двете партии подписват коалиционно споразумение за общи принципи на управление, за ключови приоритети за формиране на стабилно парламентарно мнозинство в 43-то Народно събрание и съставяне на проевропейско реформаторско правителство за стабилно развитие на България. В последствие АБВ и ПФ подписват декларация за подкрепа на правителството по ключови приоритети залегнали в техните предизборни програми.

Използвана и цитирана литература:

1. Льюс, Р.Д., Х. Райфа, Игри и решения, Москва 1961.
2. Fraser, N.M., K.W. Hipel "Conflict Analysis. Models and Resolutions", North Holland, New York, 1984.
3. Howard, N. Paradoxes of Rationality: Theory of Metagames and Political Behavior, Cambridge Mass. MIT press 1971.
4. Kennedy, G., J. Benson and J. McMillan Managing Negotiations, Business Books, London, 1980.
5. Nash, J.F. "Non-cooperative Games", Annals of Mathematics, vol. 54, p. 286-295, 1951.
6. Nierenberg, G. Fundamentals of Negotiation, Hawthorn Books, New York, 1973.
7. von Neumann, J., O. Morgenstern "Theory of Games and Economic Behavior", Princeton University Press, 3rd ed., 1944.

8. Rubin, J.Z., B.R. Brown The Social Psychology of Bargaining and Negotiation, Academic Press, New York 1975.
9. Stevens, C.M. Strategy and Collective Bargaining Negotiation, Greenwood Press, Westport, 1963.

МАТЕМАТИЧЕСКИ МЕТОДИ ЗА ФОРМАЛИЗИРАНЕ НА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТТА И ОЦЕНКА НА РИСКА В БИЗНЕСА

*Доц. д-р Жечка Димитрова, ас. д-р Руска Димитрова
Университет "Проф. д-р Асен Златаров", Бургас*

Abstract. Emphasizing the importance and complexity of the inclusion and giving an account of uncertainty in risk modeling and assessment the paper discusses various mathematical methods used for formalizing uncertainty in business and carrying out the risk modeling, analysis and quantitative risk assessment. These methods consider the nature and different levels of uncertainty in modern business as well as the role of human factor in risk assessment. The application of some of those methods in the risk management practice is presented.

Keywords: risk analysis, multi-criteria decision making, fuzzy sets, cognitive modeling.

В съвременните условия на задълбочаваща се нестабилност на глобалната икономика предприятията от различни отрасли на икономиката се насочват към прилагане на интегриран подход за риск мениджмънт (Enterprise-wide risk management, ERM), насочен към отчитане на потенциалния ефект от рисковете на всички управленски нива (оперативно, стратегическо) и върху всички аспекти на дейността. Новата дефиниция на риска – *ефектът на неопределеността върху целите*, дадена в международния стандарт за риск мениджмънт ISO 31000:2009 Risk Management – Principles and Guidelines, ясно свързва риска както с неопределеността, така и с това, което предприятието иска да постигне – поставените цели. Като се изхожда от високото ниво на неопределеност на съвременната делова среда и сложността на задачите за математическо описание на неопределеността, в настоящата работа се обсъждат различни подходи и методи за формализиране на неопределеността, моделиране, анализ и оценка на риска и възможности за тяхното приложение в практиката на риск

мениджмънта. Акцентът е поставен върху методите за количествен анализ на риска.

В стандарта ISO 31000 анализът на риска се разглежда като комплексен етап за разбиране природата на риска. Количественият анализ заема основно място при оценката на риска. Той е насочен към това да помогне *да се преодолеят субективизмът и познавателната предубеденост на субекта на управление* и вземане на по-добри решения. Доминираща роля при количественото измерване и оценяване на риска има моделирането на риска.

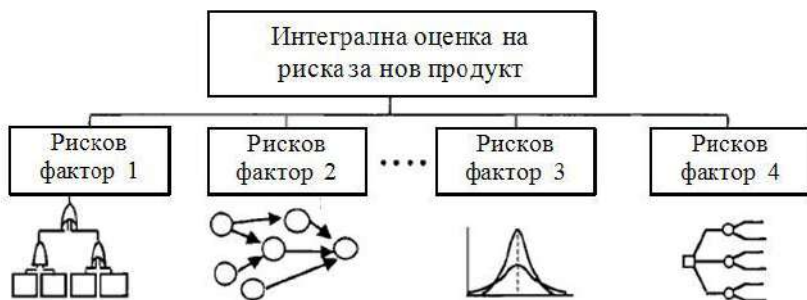
Построяването на адекватен модел на проблемната ситуация неминуемо поставя въпроса за прилагане на подходящи математически методи и модели за формализиране на неопределеността. Проблемите на моделирането, анализа и оценката на риска са предмет на разглеждане в голям брой литературни източници от различни научни и предметни области (Дочев, Николаев, 2007; Дубров и др., 2003; Попчев, 2009; Haines, 2009 и др.). Анализът на формулираните в специализираната литература (Courtney) четири нива на неопределеност на съвременната пазарна среда: *достатъчно точно прогнозируемо бъдеще; алтернативни варианти на бъдещето; интервална неопределеност на бъдещите резултати; пълна непредсказуемост* позволява да се направи заключението, че понастоящем бизнесът функционира в ситуация, която се характеризира с нива на неопределеност три и четири. Ниво четири изисква фундаментално да се преосмисли отношението към неопределеността и риска в бизнеса и прилагане на нови подходи и методи за неговото моделиране. Във връзка с това могат да бъдат открити следните особености при моделирането и анализа на риска:

➤ Научно обосновано включване на субективните оценки и предпочитания на субекта на управление при създаване на модели за анализ и оценка на риска, което е нова концепция в моделирането на икономическите системи.

➤ Моделирането и оценката на риска следва да се разглеждат като сложен интелектуален процес, изискващ прилагането на *хиб-*

ридни технологии за моделиране, т.е. прилагане на принципа „полимоделност“ (фиг. 1).

Понастоящем се наблюдава развитие и усъвършенстване на подходите и методите за формализиране на неопределеността и анализ на риска, които могат да бъдат обособени в следните основни групи: вероятностно-статистически подходи; подходи за вземане на решения по много критерии; размито-множествени подходи; експертни и когнитивни подходи.



Фигура 1. Графична илюстрация на принципа „полимоделност“
(Адаптирана от Haimes, 2009)

В исторически аспект вероятностно-статистическият подход е първият подход за математическо описание на неопределеността и моделиране на риска. При него факторите на неопределеност се разглеждат като случайни величини, представени със съответни закони за разпределение на вероятностите. Основните трудности, които възникват при практическото разработване и използване на стохастични модели за количествен анализ на риска, са свързани с определянето на вероятностното разпределение на параметрите на моделите. Достоверността на статистическите изводи, получени на основата на тези модели, съществено зависи от допусканията за законите на вероятностно разпределение и е твърде чувствителна, когато са нарушени изходните допускания. Разработването на процедури за усъвършенстване на приложението на тези методи може

да бъде реализирано чрез използване на емпирични разпределения за входящите случайни величини (вместо теоретични), получени чрез прилагане на статистически анализ на ретроспективни данни, както и чрез използване на *интервално-вероятностния подход*. По този начин става възможно *отслабване на допускането за статистическа еднородност на наблюдаваните събития и подобряване на адекватността и качеството на моделите*.

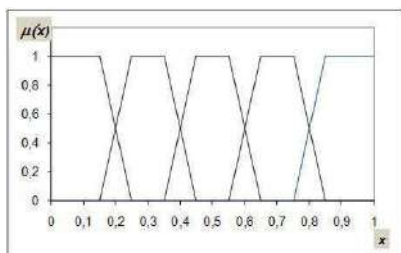
В специализираната литература се предлага за извършване на анализ и оценка на риска да се конструират и използват методи, модели, алгоритми и програмни инструменти, предназначени за решаване на многокритериални задачи за вземане на решения (Попчев, 2009). Методите на многокритериалния анализ включват средства и процедури за представяне и обработка на знанията на експерта, субективните оценки и системата от предпочитания на лицата, вземащи решения (ЛВР) и построяване на модел на проблемната ситуация. *Представянето на информацията за проблемната ситуация във формата на предпочитания има универсален характер*, тъй като позволява в математическия модел да се въведат знания и представи на експертите и ЛВР, което прави модела по-адекватен на реалността.

Многобройните практически приложения на методите на многокритериалния анализ в областта на моделирането и оценката на риска са свързани с идентифициране на рисковите фактори, определяне на тяхното тегло, определяне на вероятностите за настъпване на рискови събития, класиране на алтернативни варианти при сложни проекти според степента на риска и др.

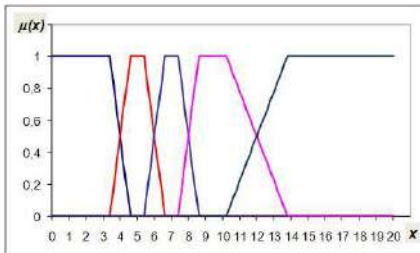
Трябва да се отбележи, че се наблюдава тенденция за адаптиране на редица от най-известните методи за многокритериален анализ към техни модифицирани варианти на основа на апарата на теорията на размитите множества: Fuzzy АНР (FАНР); метод, основан на размити предпочитания на експертите; многокритериална размита функция на предпочитане и др. (Попчев, 2009). Нарастващо внимание се отделя на *методите за групово решаване* на задачи на многокритериалния анализ.

Прилагането на теорията на размитите множества (ТРМ) при моделирането на сложни икономически системи, каквито са предприятията, позволява да се получат принципно нови модели за анализ и оценка на риска – получаване на количествена характеристика на резултата при задачи с *размити входни променливи* (качествени фактори на риска, формулирани в термините на естествения език). ТРМ позволява да се формализира и използва в единна форма цялата достъпна нееднородна информация (детерминирана, интервална, статистическа, лингвистична), характерна за реалните задачи от практиката.

Теорията на размитите множества в съчетание с методите на експертните оценки може да се използва като инструмент за получаване на интегрален показател на риска. За преодоляване на проблемите, свързани с определяне на функциите на принадлежност и прилагането на размита логика при изграждането на *сложни многофакторни йерархични модели* за изчисляване на интегрален показател на риска е подходящо да се използват предложените в работите на А. Недосекин модели, основаващи се на размити стандартни (нестандартни) петстепенни класификатори (фиг. 2, фиг. 3).



Фигура 2. Стандартен петстепенен класификатор



Фигура 3. Нестандартен петстепенен класификатор

Пресмятането на интегрален показател на риска R_{int} се извършва по следната формула:

$$R_{int} = \sum_{i=1}^M w_i A_i^N,$$

където: w_i – важността (относителното тегло) на базовия фактор (показател) r_i , участващ в определянето на оценката на риска, $(\sum w_i = 1)$;

M – брой на базовите фактори на изследваната проблемна ситуация;
 A_i^N – агрегирана стойност на i -тия базов фактор r_i , която се получава по следната формула:

$$A_i^N = \sum_{k=1}^N p_k \sum_{j=1}^5 \alpha_j \gamma_{kj}$$

където: α_j са възловите точки на размития петстепенен 01-класификатор;

N – брой на S -факторите (подчинените фактори) за съответния базов фактор r_i ($k = 1, \dots, N$);

p_k – тегло на k -тия S -фактор в обобщаването;

γ_{kj} – значение на функцията на принадлежност на j -тото качествено ниво за текущото значение на k -тия S -фактор; $j = 1, \dots, 5$.

Детайлна информация за приложението на тези класификатори, аналитичният вид на системата от петте функции на принадлежност и методиката за построяване на нестандартни класификатори могат да бъдат намерени в (Недосекин; Недосекин, Фролов).

Един от новите, перспективни подходи за моделиране и анализ на риска е когнитивното моделиране. Трябва да се отбележи, че независимо от системния подход към рисковете, поради наличието на сложни причинно-следствени връзки между рисковете и целите на предприятието, въпросът за определяне на влиянието на рисковете върху целите все още не е намерил решение и остава открит. Съвместното прилагане на когнитивния подход заедно с експертните методи и ТРМ дава възможност да се построят модели, позволяващи по нов начин да бъдат моделирани връзките между рисковите фактори, ключовите индикатори на риска, целевите показатели и мерките за въздействие върху риска

В когнитивната карта за управление на рисковете е подходящо

да бъдат включени следните върхове-концепти (Зайцева, 2009):

- върхове-концепти, представлящи рисковите фактори във външната среда на предприятието (външни рискови фактори): $ВФ_1, \dots, ВФ_n$; това са фактори на макросредата и фактори, свързани с непосредствената среда;

- върхове-концепти, представлящи рисковите фактори във вътрешната среда (вътрешни фактори на риска): $РЕ_1, \dots, РЕ_m$;

- върхове-концепти за ключовите рискови индикатори: $И_1, \dots, И_k$;

- върхове-концепти, представлящи показатели за последствията от възникването на рискови ситуации: $П_1, \dots, П_L$;

- върхове-концепти за мерките за управление на рисковете: $М_1, \dots, М_p$.

Отношенията между върховете-концепти се представят чрез дъгите на претегляния граф във вид на тегла $w_{i,j}$ и са елементи на матрицата на съседство. След построяване на когнитивната карта се прилагат методи за аналитична обработка, ориентирани към изследване на структурата на системата и получаване на прогнози за нейното поведение при различни управляващи въздействия. На фиг. 4 е представен графичният вид на когнитивна карта, предназначена за управление на рисковете.

ЛИТЕРАТУРА

Абрамова, А., Человеческие факторы в когнитивном подходе. Управление большими системами: Сборник трудов, № 16, 2006.

Дочев, Д., Р. Николаев, Теория на риска, Наука и икономика, Икономически университет - Варна, 2007.

Дубров, А., А. Лагоша, Е. Хрусталеv, Т. Барановская, Моделирование рискованных ситуаций в экономике и бизнесе. М., 2003.

Зайцева, Ж., Автореферат „Методические основы нечетко-когнитивного управления коммерческими рисками предприятий пищевой промышленности в условиях неопределенности”, 2009

<http://www.muctr.ru/acadc/soisc/files/zaytseva.doc> (12.09.2011).

Недосекин, А., Оценка риска бизнеса на основе нечетких данных, http://sedok.narod.ru/sc_group.html (01.04.2009).

Недосекин А., Фролов С., Лингвистический анализ гистограмм экономических факторов, http://sedok.narod.ru/sc_group.html (01.04.2009).

Попчев, И., Многокритериален избор на проектни решения: някои практически алгоритми.

http://www.iit.bas.bg/IIT_bg/staff_bg/I_Popchev/Finansovi-Reshenia-2009-23-51.pdf (1.08.2009).

Courtney, H., A fresh look at strategy under uncertainty: An Interview, <http://mckinseyquarterly.com>

Haimes, Y., Risk modeling, assessment, and management - 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., 2009.

РЕГРЕСИОННИ МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ ВЛИЯНИЕТО НА РАЗЛИЧНИ ТЕХНОЛО- ГИЧНИ ПАРАМЕТРИ ВЪРХУ КАЧЕСТВЕНИТЕ ПОКАЗАТЕЛИ НА ШЕВА

*Доц. д-р Мирослав Петров¹, доц. д-р Мариел Пенев¹,
ас. Даниел Ангелов²*

¹ТУ – Габрово, ²ТК – Ловеч

Резюме. Изследванията и експериментите, провеждани с помощта на статистически методи се отличават с две основни предимства: висока достоверност на резултатите и минимални разходи. Целта на разработката е да се изследва влиянието на следните входни фактори: геометрия острието на иглата, номер (дебелина) на иглата, гъстота на бодовия ред, а параметрите, характеризиращи качеството на обекта са паропропускливост, здравина и устойчивост на шева на проникване на вода.

Ключови думи: регресионен анализ, математическо моделиране, бодов ред, паропропускливост, здравина на шева.

С помощта на методите на математическата статистика се анализират явленията, съпътстващи технологичните процеси в шевното производство, оценява се взаимодействието между факторите, влияещи на процесите, установяват се най-оптималните режими на работа. При организирането на плана на експеримента се взема предвид очакваната степен на регресионния модел и критериите за оптималност на плана, с оглед осигуряване по-ефективно и точно изработване на данните. При решаване на задачите за намиране на оптимални количествени съотношения между входните и изходните величини информацията ще бъде недостатъчна. За да бъде изяснен въпроса за наличието или отсъствие на линейна връзка между входните и изходните величини с използването на корелационния анализ, също е недостатъчно. Избран е регресионен анализ, защото при него се установява вида и елементите на зависимостта на параметър-

ра Y_i от един или няколко фактора.

Целта на проведеното изследване е да се установи експериментално влиянието на различни технологични параметри върху качествените показатели на бодовия ред на шевното изделие и да се изведе регресионен математически модел.

Мострите са изработени с вид геометрия на острието на иглата – R, от един и същ плат и шевен конец. Използваме различна дебелина на иглите и гъстота на бодовия ред. Резултатите от експеримента са отчетени в лаборатория на фирма “ТЕКС-КОНТРОЛ” ЕООД – гр. Габрово.

Избрани са следните факторите, влияещи на процеса:

- ✓ X_1 – Дебелина на иглата,
- ✓ X_2 – Гъстота на бодовия ред.

Избрани са и следните параметри, характеризиращи качеството на изследвания обект:

- ✓ Y_1 – Пробив на първа капка [3]
- ✓ Y_2 – Пробив на трета капка
- ✓ Y_3 – Паропропускливост [1]
- ✓ Y_4 – Здравина на шева [2]

На фиг.1 е показана информационната схема на изследвания обект.



Фигура 1. Информационна схема на изследвания обект

X_i – фактори, влияещи на процеса;

Y_j – параметри, характеризиращи качеството на обекта;

W_k – други външни влияния и въздействия, които не оказват съществено значение върху получените резултати.

В таблица 1 са дадени изходните данни - броя опити, фактори, параметри.

Таблица 1

Брой точки на експерименталния план	N = 96
Брой на факторите	$X_i = 2$
Брой на параметрите	$Y_i = 4$
Степен на регресионните модели	3
Брой на регресионните коефициенти	m = 10

Регресионният модел за решаваната задача има следния вид:

$$Y_1 = B_{000} + B_{100}X_1 + B_{200}X_2 + B_{120}X_1X_2 + B_{110}X_1^2 + B_{220}X_2^2 + B_{111}X_1^3 + B_{112}X_1^2X_2 + B_{122}X_1X_2^2 + B_{222}X_2^3 \quad (1)$$

Моделът е адекватен, ако е изпълнено условието:

$$F \leq F_{кр}(\alpha, v_1, v_2) \quad (2)$$

Стойността на F се взема от таблица за критерия на Фишер, където α е избраното ниво на значимост.

Таблица 2

Изведените регресионни модели от III степен са от вида:					
$Y_1 = B_{000} + B_{100}X_1 + B_{200}X_2 + B_{120}X_1X_2 + B_{110}X_1^2 + B_{220}X_2^2 + B_{111}X_1^3 + B_{112}X_1^2X_2 + B_{122}X_1X_2^2 + B_{222}X_2^3$					
X_i	Коефициент	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
	B (0, 0, 0)	552.098	333.497	0.4228734	7550.745
X_1	B (1, 0, 0)	44.3566	69.22659	-0.0061071	-329.5425
X_2	B (2, 0, 0)	1182.813	1223.828	-0.01218971	2419.609
X_1^2	B (1, 1, 0)	-0.7751626	-0.9759424	0.000113562	3.912968
X_1X_2	B (1, 2, 0)	15.47517	15.55568	-0.00165596	-42.05745
X_2^2	B (2, 2, 0)	78.68389	84.39424	0.01448763	90.46448
X_1^3	B (1, 1, 1)	0.00315747	0.003667663	-0.00000064	-0.01305984
$X_1^2X_2$	B (1, 1, 2)	-0.04668526	-0.04665839	0.000011943	0.09168379
$X_1X_2^2$	B (1, 2, 2)	-0.5550528	-0.5660181	-0.0000301	1.992751
X_2^3	B (2, 2, 2)	-1.507167	1.688621	-0.00070844	-20.87069
Ср. проц. грешка (СПГ)	%	2.76	2.93	0.447	5.93

R	-	0.959541	0.964400	0.989202	0.997526
F> Fтаб.	-	110.9721	127.0836	435.3121	1924.148

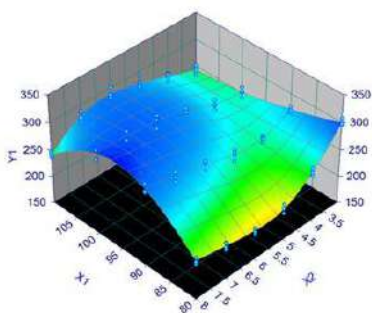
Избрана е таблична стойност за критерия на Фишер за $F = 1.88$ при степен на свобода $\nu_1 = m - 1 = 9$, $\nu_2 = N - m = 96 - 10 = 86$ и ниво на значимост $\alpha = 0.05$; R – коефициент на множествена корелация и е значим при $F_{кр} > F$.

От анализа на статистическите данни, показани в таблица могат да се направят следните изводи:

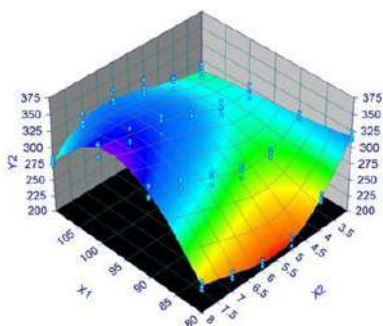
- За всички стойности е изпълнено условието за адекватност $F_{кр} > F$, при ниво на значимост $\alpha = 0.05$, което показва, че предсказаните стойности на моделите съответстват на измерените и същите могат да се използват за решаване на оптимизационни задачи.

- Коефициентите на множествена корелация R имат високи и значими стойности, което показва, че сме направили правилен избор на структурата на модела и в него са включени всички силно влияещи фактори.

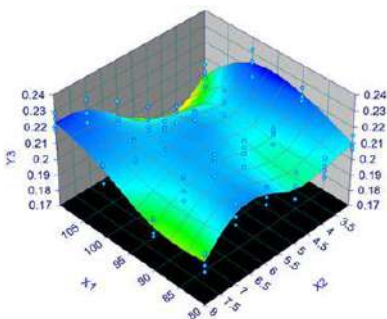
- Средната процентна грешка се движи в границите от 0,477% до 5.93%, което напълно удовлетворява изискванията за точност на решенията в инженерната практика.



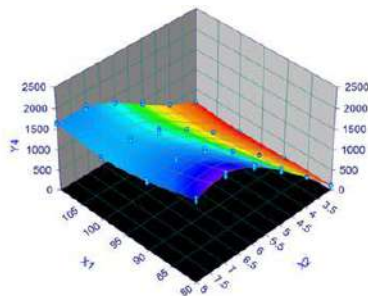
Фигура 2. Влияние на дебелината на иглата (X_1) и гъстотата на бодовия ред (X_2) върху пробива на първа капка Y_1



Фигура 3. Влияние на дебелината на иглата (X_1) и гъстотата на бодовия ред (X_2) върху пробива на трета капка Y_2



Фигура 4. Влияние на дебелината на иглата (X_1) и гъстотата на бодовия ред (X_2) върху паропропускливостта Y_3



Фигура 5. Влияние на дебелината на иглата (X_1) и гъстотата на бодовия ред (X_2) върху здравината на шева Y_4

На фигури 2, 3, 4 и 5 са построени графичните зависимости, представени с уравненията на математичните модели от таблица 2. Получените криви в тримерното пространство са за различните условия на входящите и изходящите величини. На фигурите са обозначени координатните системи със стойностите на входните фактори и на изходните параметри.

От значение при изследването е да се определи коефициента на взаимна корелация между входящите и изходящите величини. Коефициентът на взаимна корелация е значим, ако е изпълнено условието:

$$|R_{ij}| \geq R_{кр}(\alpha, v = N - 2) \quad (3)$$

Критичните стойности на коефициента на взаимна корелация $R_{кр}$, при различни нива на значимост α и брой степени на свобода $v = N - 2$, се отчитат от таблица, където N е брой опити. Стойностите на коефициентът на взаимна корелация се изменят от -1 до +1. При разглеждане на технически задачи се използват три нива на значимост – $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.01$ и $\alpha = 0.001$. В таблица 3 са определени коефициентите на взаимна корелация R_{ij} по методика описана в специализираната литература [4,5] и се създава взаимно корелационната матрица. Значението на знака пред R_{ij} е следното:

- При взаимната корелация между управляващите фактори X_i и

целевите параметри Y_i при повишаване на X_i в интервала на Y_i ще се повиши, ако R_{ij} е положителен и ще намалява Y_i , ако R_{ij} е отрицателен.

- При взаимната корелация между целевите параметри $Y_i - Y_j$, ако R_{ij} е положителен, то условията за управляващите фактори X_i , водещи до повишаване на Y_i ще повишават и Y_j , ако R_{ij} е отрицателен, то условията на X_i водещи до повишаване на Y_i ще водят до намаляване на Y_j .

Таблица 3

		R_{ij}	$ R_{ij} \geq R_{кр}$
1 (X_1)	2 (X_2)	0.000000	
1 (X_1)	3 (Y_1)	0.424370	0.424370
1 (X_1)	4 (Y_2)	0.556995	0.556995
1 (X_1)	5 (Y_3)	0.440752	0.440752
1 (X_1)	6 (Y_4)	-0.207876	-0.207876
2 (X_2)	3 (Y_1)	0.072451	
2 (X_2)	4 (Y_2)	0.095855	
2 (X_2)	5 (Y_3)	-0.040662	
2 (X_2)	6 (Y_4)	0.920913	0.920913
3 (Y_1)	4 (Y_2)	0.972585	0.972585
3 (Y_1)	5 (Y_3)	0.374662	0.374662
3 (Y_1)	6 (Y_4)	0.154632	
4 (Y_2)	5 (Y_3)	0.390291	0.390291
4 (Y_2)	6 (Y_4)	-0.174734	
5 (Y_3)	6 (Y_4)	-0.144950	

Табличните стойности на $R_{кр}$ са:

$R_{кр} = 0.195$ - при $\alpha = 0.05$, при степени на свобода $\nu = 94$;

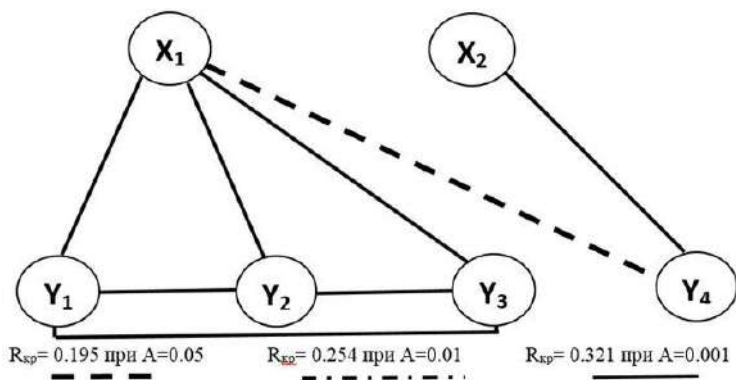
$R_{кр} = 0.254$ - при $\alpha = 0.01$, при степени на свобода $\nu = 94$;

$R_{кр} = 0.321$ - при $\alpha = 0.001$, при степени на свобода $\nu = 94$;

$\nu = N - 2 = 96 - 2 = 94$, където N – брой опити.

С получените коефициенти на взаимна корелация се построяват корелационни графи, на които се вижда влиянието между вхо-

дящите величини – управляващите фактори – X_i и изходящите величини – целевите параметри – Y_i .



Фигура 6. Корелационен граф за геометрия на острието R

От анализа на взаимно корелационния граф показан на фигура 6 за игла с геометрия на острието R можем да направим следните заключения:

- Значима положителна линейна корелационна връзка има само между фактора X_1 и параметрите Y_1 , Y_2 и Y_3 .
- Връзката $X_1 - Y_4$ е значима, но с отрицателна стойност.
- Факторът X_2 има значима положителна корелационна връзка с параметъра Y_4 .
- Параметрите Y_1 , Y_2 и Y_3 имат значими корелационни връзки помежду си.

От анализа на данните за изследвания модел, може да се направят следните изводи:

- За всички стойности е изпълнено условието за адекватност $F_{кр} > F$ по критерия на Фишер, при ниво на значимост $\alpha = 0.05$, което показва, че предсказаните стойности на моделите съответстват на измерените и същите могат да се използват за решаване на оптимизационни задачи.

- Коефициентите на множествена корелация R имат високи и значими стойности, което показва, че сме направили правилен из-

бор на структурата на модела и в него са включени всички силно влияещи фактори.

- Средната процентна грешка се движи в границите от 0.477% до 5.93%, което напълно удовлетворява изискванията за точност на решенията в инженерната практика.

- Показани са корелационните връзки между факторите и параметрите за всеки модел.

Използвана литература

[1]. JIS L 1092:2009, The Japanese Industrial Standard specifies the testing methods for water resistance of textiles

[2]. БДС EN ISO 13935:2002 Текстил. Свойства при опън на шева на платове и готови текстилни продукти.

[3]. БДС EN ISO 20811:1996, Текстил. Определяне устойчивостта на проникване на вода. Изпитване на хидростатично налягане

[4]. Джонов Ц., Ангелов Ив., Петров М., Математическо моделиране и оптимизация на механичните характеристики на стоманите, ТУ – Габрово, 1995 , УДК 669.14.018.29

[5]. Ангелов И., Петров М., „Теория на инженерния експеримент“, Университетско издателство „В. Априлов“ -Габрово, 2002 ISBN 954-683-178-6

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ГЕНЕТИЧЕН АЛГОРИТЪМ ПРИ МОДЕЛИРАНЕ НА ОПТИЧНО ПОЛЕ

Ас. Жейно Жейнов, доц. Милена Карова
Технически университет – Варна

Резюме. Докладът представя едно приложение на генетичния алгоритъм за намиране на амплитудно-фазовото разпределение на оптично поле в отворен край на многомодово стъпално оптично влакно, за създаване на определено поле на излъчване в далечната зона.

Ключови думи: генетичен алгоритъм, стъпално оптично влакно, отворен край, поле на излъчване.

Въведение

Излъченото поле от отворено оптично влакно представлява интерес за редица приложения: лазерна хирургия, телекомуникации, измервания. Профилът на излъчване на лазерен източник се анализира чрез специални камери и стендове, защото от него зависят качествата на апаратурата. При моделирането му се използва теорията за разпространение на електромагнитното поле при известна антенна задача за излъчване от кръгла апертура. Пресмятането на полето на излъчване предполага изчисляване на определен интеграл, където подинтегралната функция задава разпределение на полето в излъчващата апертура и при някои опростявания се решава за далечната зона.

Синтезът на апертурното амплитудно-фазово разпределение за получаване на дадено поле на излъчване налага решаване на интегрално уравнение на Фредхолм от I род. Теорията допуска точно решение само за определени разпределения на полето. По-нататък се прилага генетичен алгоритъм като метод за оптимизация на синтеза на апертурното амплитудно-фазово разпределение.

Математически модел

С уравненията на Максвел при опростояването за слабонасочени влакна се описва аналитично разпространението на светлината в стъпално оптично влакно. Ако плоска електромагнитна вълна се разпространява в положителна посока на оста z на влакното, компонентите на електрическото $\mathbf{E}$ и магнитното $\mathbf{H}$ полета в отворения край на влакното се описват съответно с изразите (1) и (2):

$$\mathbf{E}_i(\rho, \varphi, z, t) = \mathbf{E}_i(\rho, \varphi) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_i(\rho, \varphi, z, t) = \mathbf{H}_i(\rho, \varphi) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (2)$$

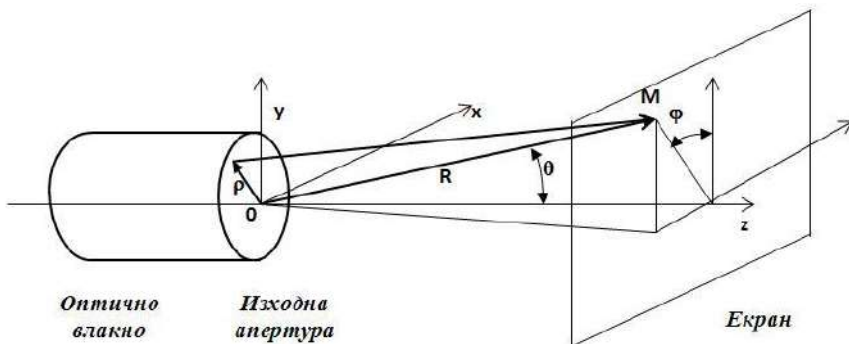
където $i = \rho, \varphi, z$, а t е времето. Тук ω е кръговата честота, а β е надлъжната константа на разпространение. Скаларното вълново уравнение за оптичното влакно е диференциално Беселово уравнение от втори род. То има две независими решения във вид на две различни цилиндрични функции. В цилиндрична координатна система вълновите уравнения се разлагат на шест уравнения, описващи компонентите на полето. При влакно с постоянен показател на пречупване на сърцевината n_1 , имащо обвивка с постоянен показател на пречупване n_2 , където $n_1 > n_2$, решението се дава с Беселови функции от първи и втори род. Константата на разпространение β може да бъде определена чрез решаването на трансцедентно уравнение, в което участват като аргументи в Беселовите функции параметрите на вълновода.

Модите в слабо насочено влакно са образувани от напречно поляризирана плоска вълна, разпространяваща се по оста z . Електрическото поле в напречното сечение на влакното е суперпозиция на собствени моди.

Схемата на излъчване от отворен край на оптично влакно е показана на фиг. 1. На достатъчно голямо разстояние от изходната апертура на влакното е поставен плосък екран, така, че да се изпълнява условието (3):

$$R \geq \frac{2D^2}{\lambda} \quad (3)$$

Тук D е диаметърът на излъчващия отвор (диаметъра на обвивката на влакното), а λ е дължина на вълната във вакуум.



Фигура 1. Анализиран модел

Тогава полето на излъчване $q(R, \theta, \varphi)$ в точка M върху екрана в далечната зона се представя като функция от амплитудното разпределение на оптичното поле в апертурата на влакното $u(x, y)$ и на координатите по следния начин [1]:

$$q(R, \theta, \varphi) = \frac{ik}{4\pi} (1 + \cos\theta) \frac{e^{-ikR}}{R} \iint_S u(x, y) \cdot e^{ik \cdot \sin\theta \cdot (x \cos\varphi + y \sin\varphi)} dx dy \quad (4)$$

Тук R е разстоянието от края на влакното до точката на екрана, в която се пресмята функцията, а $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ е вълновото число за свободното пространство. Интегрирането се извършва по излъчващата повърхност S на влакното. С φ е означен полярния ъгъл, а с θ азимуталният ъгъл. Функцията $u(x, y)$ описва амплитудното разпределение на електрическото поле в излъчващия отвор.

За анализирания случай са предварително известни стойностите на функцията q , които трябва да се получат в дадени точки на екрана, поставен в далечната зона. Търси се такова амплитудно разпределение $u(x, y)$ на напрегнатостта на електрическото поле в изходната апертюра на влакното, че разликата между създаваното и зададеното поле да бъде минимална.

Прилаганите методи за оптимизация са систематизирани в [3].

Характерно за разглежданата електродинамична задача е наличието на голям брой параметри, които могат да бъдат дискретни, непрекъснати или и двата вида. Върху параметрите са наложени ограничения, свързани с реализацията. Освен това стойностите на полето в произволна точка от апертурата и екрана се пресмята приблизително с помощта на числени методи. Търси се онова амплитудно-фазово разпределение в апертурата на влакното, което осигурява минимум на разликата между зададената и изчислената функция q в точки със зададени координати. При това положение е ясно, че използването на традиционни оптимизационни техники е неприложимо или се изисква тяхна комбинация.

Генетичният Алгоритъм (ГА) е мощен, стохастично базиран търсещ метод [4]. Този метод използва концепцията за естествена селекция и еволюция. Характерно за този метод е, че предлага по-бърза сходимост при решението при наличието на множество неизвестни и непълно определени функции. Затова се ползва за решаване на широк кръг от комплексни, комбинирани и свързани проблеми по електромагнитна оптимизация.

ГА се прилага върху популация от индивиди. Всеки индивид е представен със своя хромозома. Индивидът представя полето в отворения край на влакното като съвкупност от моди, всяка със своя начална амплитуда и фаза. Хромозомата кодира всички параметри на индивида. При програмната реализация на ГА хромозомите представляват едномерен масив от P на брой 32-битови гени, като P е броят на разпространяващите се моди. Началната амплитуда и началната фаза на всяка една мода се кодират в гена като амплитудите и фазите на модите се представят с по 16 бита.

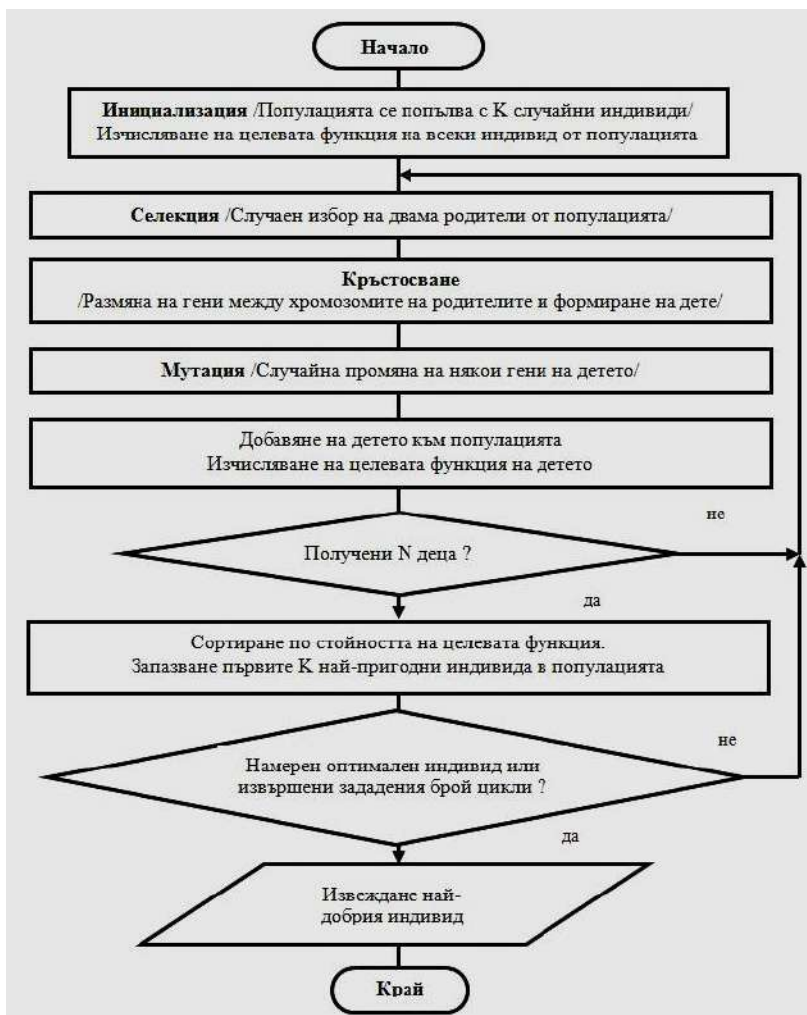
Ако A_i е началната амплитуда, а φ_i началната фаза на i -та анализирана мода и означим битовете в гена G_i с b_j , $j = 0 \dots 31$, то началните амплитуди $[-1, 1]$ и фази $[0, 2\pi]$ на модите се кодират в гена с изразите (5) и (6):

$$A_i = -1 + \frac{2}{2^{16}-1} \sum_{j=0}^{15} b_j \cdot 2^j \quad (5)$$

$$\varphi_i = \frac{2 \cdot \pi}{2^{16}-1} \sum_{j=16}^{31} b_j \cdot 2^{j-16} \quad (6)$$

Блок-схема на алгоритъта, реализиращ ГА, е показана на фиг.

2.



Фигура 2. Блок-схема на Генетичен Алгоритъм

ГА извършва 3 основни операции върху популацията [2]: селекция (*Selection*), кръстосване (*Crossover*) и мутация (*Mutation*), които се повтарят в цикъл (*Reproduction cycle*). Хромозомите в началната популация се създават чрез генерация на случайни 32-битови гени. Броят на индивидите в популацията е избран $K = 30$ - в долната граница на препоръчвания в [3] размер. Когато над хромозомите се извършват стандартните генетични операции, началната популация еволюира към оптимално решение, като критерий за пригодност (оптималност) е целевата функция. Тя се пресмята за всяка хромозома. Целевата функция *Fitness* е избрана съгласно (6), където $Fcalc_i$ е пресметнатата сумарна нормирана амплитуда на полето, а $Fgiv_i$ е зададената амплитуда на полето в точката с номер i върху екрана. Общият брой на зададените стойности на полето в точки M_i на екрана е $m \leq 100$. Изборът на положението им върху екрана и броят им зависи от диаграмата на насоченост на излъчващото влакно.

$$Fitness = \sqrt{\sum_{i=1}^m (Fcalc_i - Fgiv_i)^2} \quad (6)$$

По-добрата хромозома (по-пригоден индивид) има по-малка целева функция. Кръстосването става чрез размяна на p части от хромозомите на родителите. Експериментирано бе с $p = 2$ и $p = 3$. Изборът на двама родители от популацията се извършваше по случаен начин. Възможността на кръстосване бе зададена 0.7, при което след всеки репродукционен цикъл се получаваха $N = 20$ деца. Върху полученото дете (нова хромозома) се извършваше мутация чрез инвертиране на 5% от битовете. Горните стойности бяха избрани в средата на указания в [3] интервал. Изчисляваха се целевите функции на децата. Сортираха се хромозомите по големина на целевата функция. От популацията се изключваха индивидите с по-малка пригодност, така че размера на новополучената популация да се запази (метод на селекция *steady-state*).

Пример за моделиране

Към маломощен лазерен източник на червена светлина с $\lambda = 680 \text{ nm}$ бе свързано едномодово влакно със стъпален индекс на показателя на пречупване $n_1 = 1.47$, $n_2 = 1.46$ диаметър на сърцевината $9 \text{ }\mu\text{m}$, диаметър на обвивката $125 \text{ }\mu\text{m}$ и дължина 1.05 m . Другият му край, завършващ със съединител тип SC, бе насочен перпендикулярно към плосък екран на разстояние 0.4 m . На екрана се проектираше светлинно петно с диаметър около 0.1 m с неправилна форма и неравномерна яркост. Изображението на екрана бе заснето и преобразувано чрез графичен редактор от червената в сивата скала на цвета и бе усилен контраста му. Съгласно описания математически модел на излъчване от отворения край на многомодово стъпално влакно бе създаден софтуер за синтез на разпределението чрез ГА. Нормираните стойности на цвета в сивата скала за 32 точки върху екрана бяха въведени в програмата. Симулацията на влакното показва, че в него се разпространяват 7 линейно-поляризирани моди, а броят на точните моди е 17. Изход от програмата се извършваше при достигане на средна разлика за стойностите на амплитудите на електрическото поле в зададените точки под 1% или след фиксиран брой репродукционни цикли. След 2000 репродукционни цикъла бяха получени начални стойности на амплитудите и фазите на модите в излъчващата апертура на влакното. Разликата между търсените и получените амплитуди на електрическото поле върху екрана в 30 от 32 точки не надхвърляше 4 %.

Изводи

Чрез симулацията на реален случай на излъчване от отворен край на малкомодово стъпално влакно бе установено, че ГА е подходящ метод за решаване на оптимизационни задачи при симулация на оптично поле и може да се прилага там, където традиционните методи (или други методи) за оптимизация не могат да се ползват. Реализираният софтуер с ГА винаги даваше решение, но изискваше

твърде много машинно време за постигане на задоволителна оптимизация. Заради начина на изчисленията и числените апроксимации на Беселовите функции над 95% от времето за пресмятания заемаше изчисляването на целевата функция. Времето за получаване на задоволително решение на разглежданата задача бе пропорционално на броя на анализиранияте моди и слабо зависеше от броя m на анализиранияте точки, защото при численото интегриране в (6) полето се пресмята в точки от S , които са десетки пъти повече от m . Важно значение за постигане на по-бърза сходимост имаше метода на селекция. Слабо влияние на крайния резултат оказваха стойностите на коефициентите на мутация и кръстосване.

Работата, представена в този доклад, е подкрепена от НП № 9, 2015, Технически университет – Варна, „Изследване на алгоритми от изкуствения интелект за управление на подвижни обекти“.

Литература

1. Orphanidis, Sophocles. *Electromagnetic Waves and Antennas*. Rutgers, State University of New Jersey, 2004.
2. Karova, M., Todorova, G., Penev, I., Todorova, M.. *Managing Project Activities System using Genetic Algorithm*. Recent Advances in Civil Engineering and Mechanics, At Florence, Italy, 2010.
3. Johnson, J., Rahmat-Sami, Y.. *Genetic Algorithm in Engeneering Electromagnetics*. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 39, No. 4, 1997.
4. Цонев, Ст., Витлиемов, В., Коев, П. *Методи за оптимизация*. Второ издание. Русенски университет, Русе, 2004.

АКТУАЛНИ ТЕНДЕНЦИИ В РАЗВИТИЕТО НА ТЪРГОВИЯТА НА ЕДРО В БЪЛГАРИЯ

Доц. д-р Михал Стоянов

Икономически университет – Варна

Резюме. В настоящата работа е направен преглед на развитието на месечните индекси на оборота в подсектор “Търговия на едро, без търговия с автомобили и мотоциклети” за периода 01.2001-04.2015 г. Приведеният динамичен ред от месечни стойности е подложен на тестови оценки за доказване на тенденцията и периодичните колебания в развитието с помощта на основни методи на класическия анализ на динамични редове и авторегресионен анализ за оценка на поведението на времевия ред.

Ключови думи: търговия на едро, автокорелация, ARIMA.

Търговският бизнес играе централна роля в живота на всяко общество. Ежедневната близост на търговията до икономическите агенти съдейства за задоволяване на потребителското им търсене с многообразни продукти.

Търговците на едро в ролята на репрезентативни агенти на междината размяна посредничат и са ангажирани в най-голяма степен с механизма за трансфер на риск между участниците в икономическия процес и спомагат за неговата трансформация и преразпределение. Основната им функция свързваме с възможността да се намесват в моделите за финансиране на икономическия процес както за производителите, така и за последващите участници в обмяна. Те могат да осигурят авансов ресурс (паричен или стоков), с което да стимулират равномерността както на производството, така и на крайната размяна. Тяхната ангажираност и силата на позицията им се определя от относително по-малкия брой и тесния кръг от икономически агенти, с които встъпват в продажбени взаимоотношения, което им позволява да управляват ефективно и целенасочено връзките с тях и най-вече с важните клиенти. Поддържането на по-

тесен контакт с производители, доставчици и клиенти съдейства търговците на едро да управляват по-ефективно продажбения процес и да го настройват спрямо спецификата на всеки продажбен контакт.

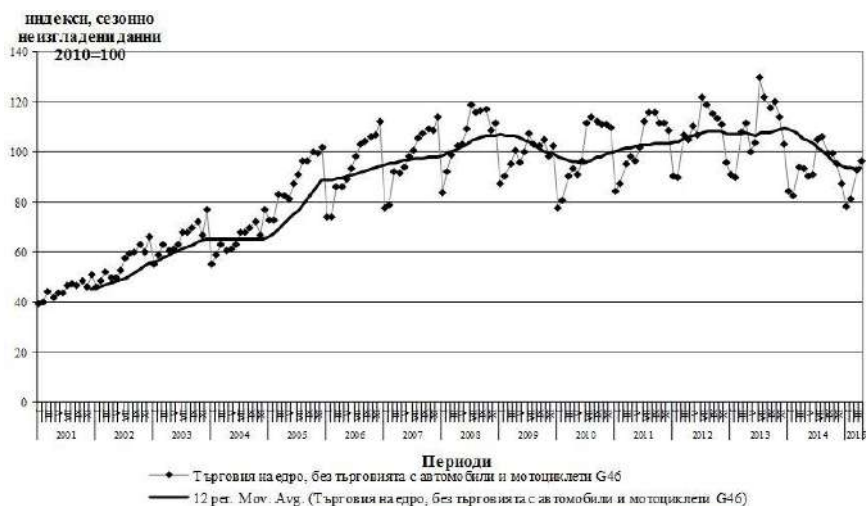
Търговията на едро (ТЕ) като специфична дейност на междинен обмен се свързва с продуктовата реализация към други търговци за последваща препродажба или за влягането на тези продукти при създаването на продукцията, която в последствие отново ще бъде обект на продажба. Формирането на отношения B2B в канала за реализация на продуктите съдейства директно за икономическото благосъстояние на обществото, тъй като посредством търговията на едро се осигурява мащабна и целенасочено управлявана географска експанзия на продуктите, гарантира се ефективния пренос на информацията между крайните клиенти и производителите, оптимизира се икономическия процес чрез по-доброто управление на наличностите и разходите за тяхното съхранение и т.н. По този начин ролята на едровата търговия е да се формира продуктов буфер от наличности, чрез които се регулират нормалните колебания в търсенето и предлагането както в мястото, така и във времето на тяхното възникване. Всъщност, междинната търговия може да концентрира продуктово разнообразие от множество източници и да осигури на последващите участници желаното многообразие в предпочитаното количество за препродажба.

Графичният образ на индексите на оборота в подсектор “Търговия на едро, без търговия с автомобили и мотоциклети” по съпоставими цени (2010 г. = 100) позволява да се отбележат някои важни закономерности (вж. фиг. 1): Тенденцията към нарастване на индексите на оборота в ТЕ е по-ясно изразена и устойчива в началните години на периода 2001-2015 г. до настъпването на стопанската криза в края на 2008 г., като втори спад в равнището на показателя е регистриран през 2014-2015 г., което се потвърждава и от приложената 12 месечна плъзгаща средна, която графично изразява лежащия в основата на промяната тренд в резултат само на трайно действащи

причини. Следователно, в дългосрочен план несигурната икономическа среда остава най-сериозния фактор за изменението на оборота в ТЕ. Втори момент, който се проявява в общото развитие на показателя е сезонен компонент, с характерни върхове и спадове с периодичност от 12 месеца. Като той е най-силно изразен в периодите след 2003 г., въпреки че с различна амплитуда присъства през всички години на периода и е по-слабо формулиран в неговото начало (2001-2003 г.).

Наблюдението върху повтораемостта в движението на индексите на оборота в ТЕ позволява да открием два допълнителни момента: Първият, свързан с постигането на най-висока годишна стойност на индекса, при което за подпериода 2001-2008 г. максимумът се постига през месец декември на съответната година, докато през втория подпериод това се случва през някои от летните месеци (юли – 2009, 2012 и 2013 г., август – 2010 и 2014 г., септември – 2011 г.). Вторият, свързан с минималната годишна стойност на индекса, която традиционно се постига в началото на всяка календарна година (за подпериода 2001-2011 г. през месец януари, за подпериода 2012-2015 г. през месец февруари). В краткосрочен план основните фактори, детерминиращи повтораемостта в движението на кривата на индексите на оборота, са свързани със сезонността в производството и потреблението, а от там съпътстващите ценови колебания на потребителските продукти, конюнктурата на международните стокови пазари, ценовата конвергенция в рамките на вътрешнообщностния пазар на ЕС, влиянието на местните фактори и особености на потребителското търсене, свързано с бита и традициите. Симптомът на големите отклонения между края на предходната и началото на текущата година в индекса на оборота в ТЕ е основно предизвикан от промяната в структурата на потреблението през зимните месеци на календарната година, както и от необходимостта за акумулиране на ресурс и традиционния пик в плащането на данъчни задължения към началото на годината. Значим фактор е и динамиката в движението на индекса на тържищните цени, който отразява изменението

на цените на едро на хранителните стоки в страната и традиционно “най-високи стойности индексът достига през периода февруари – март, а най-ниските нива се регистрират през август”¹.



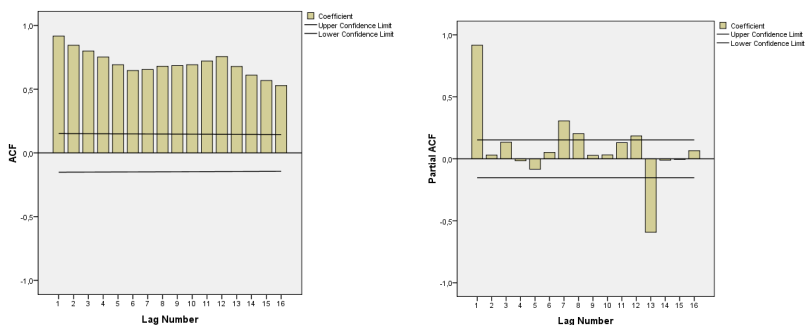
Фиг. 1. Месечни индекси на оборота в подсектор “Търговия на едро, без търговия с автомобили и мотоциклети” (Евростат код G46) по съпоставими цени (2010 г. =100) за периода 01.2001-04.2015 г.

За да потвърдим визуалната инспекция на динамичния ред ще задълбочим изследването посредством прилагане на допълнителни статистически тестове и извеждане на някои емпирични характеристики за доказване на закономерностите на развитието. Така формираният динамичен ред е изграден от 167 отделни значения, което позволява да се тества вътрешната зависимост между членовете на реда посредством коефициентите на автокорелация и частна автокорелация (вж. фиг. 2).

¹ Вж. по-подробно: Анализ на движението на цените на едро на стоките, търгувани на стоковите тържища и пазарите на производителите през 2013 г. // Държавна комисия по стоковите борси и тържищата, С.: ДКСБТ, февруари 2014, с. 45-46.

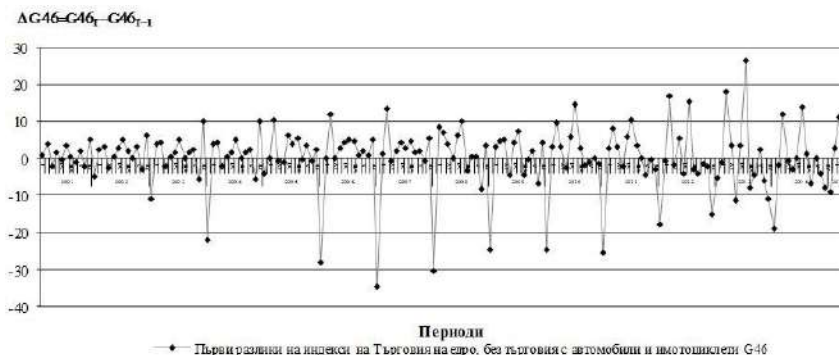
<http://dksbt.bg/doc/GODISHEN%20ANALIZ%202013.pdf> (18.01.2015).

Автокорелационните коефициенти от всеки порядък имат високи положителни стойности, надвишаващи горното критично ниво, които постепенно намаляват при увеличаване на изместването. При частните автокорелационни коефициенти първият (1), дванадесетият (12) и двадесет и четвъртият (24) имат ясно изразени критични значения. Подобна картина е показателна за наличието на тенденция в развитието на индексите на оборота в ТЕ. Направеният тест за единичен корен, конструиран чрез модел с включена константа, линеен детерминистичен тренд и лагов порядък равен на 13, дава оценка на тестовата характеристика на Дики-Фулър (ADF) равна на $-1,3145$ (при критична стойност на тестовата величина по МакКинън от $-4,0168$ при 1% риск за грешка), което с вероятност от 0,8807 посочва, че хипотезата за единичен корен не може да бъде отхвърлена. В подкрепа на този извод са и оценките на тестовите характеристики по теста на Филипс-Перон (PP) равна на $-14,0387$ (критична стойност при 5% риск за грешка $-3,4364$) и по теста на Квиатковски-Филипс-Шмид-Шин (KPSS) равна на 0,3896 (критична стойност при 5% риск за грешка 0,1460). Посочените емпирични тестови характеристики и съпоставката им с критичните таблични стойности, водят до извода, че редът е нестационарен.

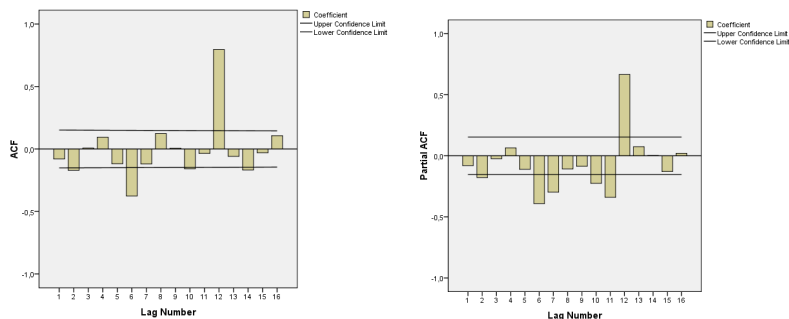


Фиг. 2. Коефициенти на автокорелация и частна автокорелация на месечните индекси на оборота в подсектор “Търговия на едро, без търговия с автомобили и мотоциклети G46”

При това положение следва да приложим трансформация за елиминиране на тенденцията в реда. Така например, можем да използваме първите последователни разлики (вж. фиг. 3). След направената трансформация оценките на трите теста са: $ADF = -3,7491$ (критична стойност при 5% риск за грешка $-3,4383$) $PP = -3,9198$ (критична стойност при 1 % риск за грешка $-4,0126$) и $KPSS = 0,0091$ (критична стойност при 5% риск за грешка $0,1460$), дават основание да се приеме, че новопостроеният ред е стационарен (вж. фиг. 4). Проверката на статистическата значимост на автокорелационните коефициенти на първите разлики посредством тестовите характеристики на Бокс-Люнг (BL) и Бокс-Пиърс (BP) при една степен на свобода потвърждават, че в трансформирувания ред не се съдържа тенденция. И двете тестови оценки за коефициентите на автокорелация от първи порядък не надвишават теоретичната стойност ($BP = 1,0944$ и $BL = 1,1137$ при $\chi^2_{\text{тео.}} = 3,84$), поради което приемаме заключението, че трансформируваният ред е стационарен или в трансформирувания ред има само *white noise*, т.е. независими и еднакво разпределени случайни променливи.



Фиг. 3. Първи разлики на месечни индекси на оборота в подсектор “Търговия на едро, без търговия с автомобили и мотоциклети G46” за периода 02.2001-04.2015 г.



Фиг. 4. Коефициенти на автокорелация и частна автокорелация на първи разлики на месечните индекси на оборота в подсектор “Търговия на едро, без търговия с автомобили и мотоциклети G46”

Коефициентите на автокорелация на първите разлики нямат значима оценка при първи порядък, но имат своя максимум постигнат при порядък 12, 24 и 36 и минимум при порядък 6, 18 и 30, което свидетелства за наличие на ясно изразен сезонен компонент в реда. Допълнителна проверка за статистическа значимост на сезонни компонент е извършена на основата на модифицирана със сезонните отмествания: 12, 24 и 36 на автокорелационните коефициенти характеристика на Бокс-Люнг², която дава емпирична оценка $BSL = 218,1311$ и при теоретична стойност от 7,815 при 5% риск за грешка можем да заключим, че в динамичния ред присъства статистически значим сезонен компонент.

Посочените тестови характеристики и техните количествени оценки потвърждават вече споменатите закономерности за развитието на търговията на едро и наличието на възходяща тенденция и сезонна цикличност. Така в контекста на възстановяването на глобалната, националната и регионалната икономика от кризисната фаза на стопанския цикъл, търговците на едро в няколко сегмента ще имат повече предимства за по-бързо съживяване. Така например в ТЕ със строителни материали и суровини може да се очаква по-

² $BSL = r_{12}^2(n-12) + r_{24}^2(n-24) + r_{36}^2(n-36)$.

бързо нарастване на оборотите при съживяване на строителния сектор, аналогично в ТЕ с автомобили, компютърна и телекомуникационна техника и т.н.

При това положение изследването продължава с построяване на модел, който взема предвид три взаимосвързани процедури: авторегресионна, диференцираща и плъзгащи средни. Приложеният софтуерен пакет EViews 8 използва автоматизиран алгоритъм за получаване на параметрите на най-подходящ модел и оценка на неговите тестови характеристики, посредством итерации на предварително заложиени варианти. При това положение като най-добър от EViews 8 се препоръчва моделът, описан в таблица 1.

Препоръчаният модел е подложен на диагностична проверка, която дава оценка на тестовата величина за остатъчните елементи на DW от 2,0416, която посочва отсъствие на автокорелация. Въпреки това остатъчните елементи имат асимптоматично нормално разпределение, потвърдено от тестовата характеристика на Жарк-Бера ($JB = 34,4732$) т.е. наличен при този модел е проблемът за липсата на нормалност на остатъчните елементи. Изводът за отклонение от нормалното разпределение на остатъците се потвърждава и от тестовете Колмогоров-Смирнов (Kolmogorov-Smirnov), ($KS = 0,091$; $df = 143$; $Sig. = 0,05$) и Шапиро-Уилк (Shapiro-Wilk), ($SW = 0,959$; $df = 143$; $Sig. = 0,000$). Оценката на F-statistic = 60,8944 индикира, че построеният модел представя или обяснява закономерно и адекватно вариацията в месечните индекси на оборота в подсектора. Ажустираният коефициент на детерминация от 74,567% с висока степен обяснява промените, настъпващи в зависимата променлива, следователно е способен при стандартна грешка на оценката от 4,4855 да опише развитието на индексите в сектор G46. Така предложеният модел е способен да обясни около 76% от вариациите в индексите на оборота в сектора. Същевременно всички параметри на модела, с изключение на константата (свободния член), са статистически значими (t-статистика) и надеждно могат да се използват за описване на моделирания процес.

Емпиричната t-статистика на свободния член е по-ниска от теоретичната, следователно включената в модела константа е ненадежден параметър целите на евентуалното прогнозиране.

Таблица 1

**Оценки и тестове характеристики на ARIMA модел
на месечните индекси на оборота в подсектор “Търговия на едро,
без търговия с автомобили и мотоциклети G46”
за периода 01.2001-04.2015 г**

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2,538672	7,901968	-0,321271	0,7485
AR(1)	-1,413458	0,034321	-41,18290	0,0000
AR(2)	-0,915429	0,035862	-25,52648	0,0000
SAR(12)	0,976208	0,031030	31,45986	0,0000
MA(1)	1,260302	0,088489	14,24249	0,0000
MA(2)	0,563726	0,136836	4,119721	0,0001
MA(3)	-0,267622	0,087924	-3,043791	0,0028
SMA(12)	-0,473825	0,089910	-5,270014	0,0000
R-squared	0,758120	Mean dependent var		0,249167
Adjusted R-squared	0,745670	S.D. dependent var		8,894377
S.E. of regression	4,485537	Akaike info criterion		5,893546
Sum squared resid	2736,326	Schwarz criterion		6,058536
Log likelihood	-416,3353	Hannan-Quinn criter.		5,960589
F-statistic	60,89448	Durbin-Watson stat		2,041676
Prob(F-statistic)	0,000000			

Оценките са получени чрез: Automatic ARIMA selection (ARIMASel) в EViews 8.

Отчетеният проблем за нормалността на остатъците на тествания модел посочва, че статистическото изследване следва да продължи до откриването на модел, който да може да се използва пълноценно за целите на прогнозирането.

Разрастването на търговията на едро в бъдеще ще се осъщест-

вява в голяма степен посредством добавянето на повече съпътстващи и допълнителни услуги, което допринася за по-голямата комплексност на търговския бизнес на едро. Увеличаването на обхвата и комплексността на търговското обслужване е генератор както на добавена стойност, така и на по-голяма удовлетвореност за клиентите на ТЕ. При това системният натиск на алтернативните канали за дистрибуция на потребителски продукти ще съдейства в най-голяма степен този процес на повишаване на обслужването и оптимизация на разходите на ТЕ да се задълбочава. Последното отново пренася акцента на предизвикателствата пред съвременните търговци в условия на стопанска криза с необходимостта за още по-голяма икономическа ефективност. Един от начините за нейното практическо реализиране свързваме с по-широкото използване на компютризирани, автоматизирани и интернет базирани системи за управление на поръчките, електронните продажби, стоките наличности, стокодвижението, документооборота, електронните разплащания, взаимоотношенията с клиентите и т.н. Без съмнение един от лостовете за повдигане на търговията на едро е икономическата глобализация, прогресираща от задълбочаващите се процеси на стопанска и политическа интеграция и усъвършенстването на организацията, технологията и времето на транспортиране на продуктите.

Анемичното и плахо възстановяване на националната и регионалната икономика от протичащите кризисни процеси в отделни сектори и дейности продължава да задържа и темповете на развитие в търговията на едро. Този процес се допълва и от съпътстващата интеграция и концентрация в икономическия процес, при която останалите стопански агенти поемат върху себе си ролята на търговци на едро, така производителите и организираните търговци на дребно започват да извършват подобни на търговците на едро операции в канала за реализация на продуктите. В отговор на това и междинните агенти на обмена приемат предизвикателството и прилагат иновативни търговски подходи. Те са свързани основно с две стратегии: Първата е съвместяването на търговия на едро и дребно “под един

покрив”. Втората е по-тясната работа с малките независими производители и вносители, които не са в обхвата на интерес на големите организирани търговци, а посредством търговията на едро могат да получат по-ефективно пазарно разпространение и проникване.

Използвана литература

- Иванов, Л. Моделиране и прогнозиране на временни редове: Статист. Аспекти. Свищов: Акад. изд. “Ценов”, (Библ. Стоп. свят; Бр. 97), 2009.

МОДЕЛ ЗА ОПТИМИЗАЦИЯ НА ОБЩОТО КОЛИЧЕСТВО ИЗВЪРШЕНА РАБОТА ОТ ТОВАРНИЯ ТРАНСПОРТ

Доц. д-р Донка Желязкова

Икономически университет – Варна

Резюме. Промените в икономическата конюнктура се отличават с динамичен характер и вземането на управленски решения се превръща в сложен процес, изискващ отстояване на обективна и аргументирана позиция, която още повече се усложнява на секторно равнище. В този контекст възниква идеята да се търси приложна активност на математическото моделиране като апарат за обосновано рационализиране на процесите в транспортния сектор.

За целта в настоящата разработка се прави опит за конструиране на икономико-математически модел за оптимизация на общото количество извършена работа в млн. ткм от различните видове товарен транспорт за даден период от време, с чиято помощ да може да се направи прогноза за посоката на развитие на транспортната дейност.

Ключови думи: оптимизация, транспорт, извършена работа.

Актуалните икономически условия, подчинени на действието на пазарните механизми, характеризирани се с висока степен на неопределеност и освободени от влиянието на бюрокрацията на административния апарат, присъщо за централно-плановата икономика, налагат решаването на „широк клас задачи, свързани с планирането и управлението, които изискват използване на ограничен обем от един или няколко вида трудови, информационни, материални, финансови и производствени ресурси за изпълнение на дадена съвкупност от работи в определен времеви порядък“¹. Реално в транспортния сектор възниква каузалния икономически проблем, свързан със задоволяването на неограничените потребности с огра-

¹ Мищенко, А. В. Методы управления ограниченными ресурсами в логистике. Москва: Инфра-М, 2014, с.7.

ничени ресурсни обеми, което поражда и обективната необходимост от приложната активност на инструментариума, действащ в обсега на математическото моделиране. В допълнение, нивата на комплицираност при решаването на казуса се повишават предвид „изключителната сложност на количествените зависимости и на качествените съотношения в икономиката на различните равнища на нейната организация, сложност, която се разширява и задълбочава в условията на съвременната техническа и технологична революция”².

Целта на настоящата разработка е да се направи опит за конструиране на икономико-математически модел за оптимизация на общото количество извършена работа в млн. ткм от различните видове товарен транспорт за даден период от време, с чиято помощ да може да се направи прогноза за посоката на развитие на транспортната дейност.

В теоретичен и практико-приложен план най-голяма популярност са придобили линейните оптимизационни модели, но са известни и редица нелинейни такива, в които се наблюдават относителни показатели, както в целевата функция, така и в ограничителните условия³.

Един от математическите модели, който може да бъде прило-

² Миркович, К. Икономическата система. София: Тракия – М, 2008, с. 265.

³ Като база за конструиране на представения икономико-математически модел са послужили някои основни идеи за използване на относителни показатели, заложи в следните разработки: Nikolaev, R. N., T. V. Milkova. The problem of allocating resources with relative parameters. // Сборник материалов международной научно-практической конференции „Украина – Болгария – Европейский союз: Современное состояние и перспективы“, том 2, Херсон – Варна – 2014, с. 255 – 259. Николаев, Р. Един подход за оптимизиране производствената дейност на предприятието. // Сборник с доклади от международната научната конференция „Икономиката в променящия се свят: национални, регионални и глобални измерения“, том II, Варна: Издателство „Наука и икономика“, 2015, с. 58 – 66. Милкова, Т. Модел за оптимизиране на асортиментната структура на произвежданата продукция. // Сборник с доклади от международната научната конференция „Икономиката в променящия се свят: национални, регионални и глобални измерения“, том II, Варна: Издателство „Наука и икономика“, 2015, с. 75 – 81.

жен адекватно за разкриване на оптимални решения в международен, национален и регионален мащаб има следната постановка и модел на задачата за оптимизация⁴ на общото количество извършена работа в млн. ткм от различните видове товарен транспорт за даден период от време.

Нека общата транспортна дейност на дадена общност, страна или регион се формира от дейностите на определени n ($j=1 \div n$) вида транспорт (автомобилен, железопътен, морски, вътрешноводен, въздушен и тръбопроводен). Относителният дял на извършената работа от всеки от видовете транспорт в общата транспортна дейност е предварително определен и в модела се означава с p_j ($j=1 \div n$). Биха могли да се използват различни подходи за определяне на стойностите на този показател, като например: стойностите на този показател се определят с помощта на различни методи за прогнозиране, като средногодишен темп на изменение или регресионни модели; стойностите на този показател се определят като средногодишен относителен дял на j -ти вид транспорт ($j=1 \div n$) в общата транспортна дейност за определен m -годишен период от време ($i=1 \div m$); предварително задаване на желани стойности на този показател. Освен това се предполага, че обемът на извършената работа от j -ти вид транспорт може да бъде в предварително определени граници.

Въвеждат се променливите величини x_j ($j=1 \div n$), изразяващи оптималния обем извършена работа (в млн. ткм) за следващата година от разглеждания период от всеки от видовете транспорт. Така целевата функция на оптимизационната задача, изразяваща сумарната извършена работа в млн. ткм от различните видове товарен транспорт, ще приеме вида:

⁴ Поставеният критерий за оптимизация в настоящата разработка е максимизиране на общото количество извършена работа в млн. ткм от различните видове товарен транспорт за даден период от време.

$$Z = \sum_{j=1}^n x_j .$$

Следва да бъде търсен максимумът на тази целева функция, като се отчетат някои ограничителни условия.

При конструиране на ограничителните условия на задачата е необходимо да бъдат обобщени статистически данни (налични в НСИ и Евростат) за относителния дял на всеки от видовете транспорт в общата транспортна дейност на разглеждания m -годишен период от време, както и за обема на извършената работа от всеки вид транспорт в млн. ткм за същия този период.

Първата група ограничителни условия са свързани с необходимостта относителният дял на извършената работа от всеки от видовете транспорт в общата транспортна дейност да е равен на средногодишния относителен дял на този вид транспорт в общата транспортна дейност за разглеждания период или

$$\frac{x_j}{\sum_{k=1}^n x_k} = p_j \quad (j=1 \div n), \text{ (или в проценти } \frac{x_j \cdot 100}{\sum_{k=1}^n x_k} = p_j),$$

където $p_j \quad (j=1 \div n)$ са предварително определените относителни дялове на извършената работа от всеки от видовете транспорт в общата транспортна дейност за изследвания период от време.

Предвид направените предположения е необходимо сумата от относителните дялове на извършената работа от всеки от видовете транспорт в общата транспортна дейност да е равен на единица, т.е.

$$\sum_{j=1}^n p_j = 1, \text{ (или в проценти } \sum_{j=1}^n p_j = 100).$$

Тук следва да се отчете възможността, в случаите при които тези относителни дялове се определят чрез някакъв метод за прогнозиране, да се наруши така поставеното условие. Тогава прогнозните относителни дялове на всеки от видовете транспорт в общата транспортна дейност могат да се означат с $p'_j \quad (j=1 \div n)$ и да се премине

към реални такива чрез следното преобразуване:

$$p_j = \frac{p'_j}{\sum_{j=1}^n p'_j} \quad (j=1 \div n) \text{ (или в проценти } p_j = \frac{p'_j}{\sum_{j=1}^n p'_j} \cdot 100).$$

Така наложеното условие гарантира, че при някои стойности на променливите величини $x_j \quad (j=1 \div n)$ няма да се стигне до ситуация знаменателят на ограничителното условие $\sum_{k=1}^n x_k$ да е равен на нула, т.е. винаги

$$\sum_{k=1}^n x_k \neq 0.$$

Втората група ограничителни условия са във връзка с предположението, че обемът на извършената работа от j -ти вид транспорт може да бъде в предварително определени граници. Като долна и горна граница за изменение на променливите $x_j \quad (j=1 \div n)$, показващи извършената работа (в млн. ткм) за следващата година от j -ти вид транспорт се избират съответно стойностите

$$a_j = \min_{1 \leq i \leq m} a_{ij} \quad (j=1 \div n)$$

и

$$A_j = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij} \quad (j=1 \div n), \text{ където}$$

a_{ij} – извършена работа в j -ти вид транспорт през i -та година от разглеждания период.

Освен това се допуска възможността обемът на извършената работа от j -ти вид транспорт да напуска границите на интервала $[a_j, A_j]$, като се отклонява например с

$$\varepsilon_j = \max \left\{ \left| \sum_{i=1}^{m-1} (a_{i+1j} - a_{ij}) \right| \right\} \quad (j=1 \div n),$$

където $\varepsilon_j \quad (j=1 \div n)$ е максималното отчетено изменение на извър-

шената работа през разглеждания период в j -ти вид транспорт. Биха могли освен това да се приложат различни методи за прогнозиране и с тяхна помощ да се определят други граници на изменение на обема на извършената работа от j -ти вид транспорт. Тогава

$$a_j - \varepsilon_j \leq x_j \leq A_j + \varepsilon_j \quad (j=1 \div n).$$

Предвид опасността лявата граница да приеме отрицателна стойност и недопустимостта на това, променливите величини x_j ($j=1 \div n$) да са отрицателни (съобразно икономическата им интерпретация), ограничителното условие окончателно приема вида

$$\max\{0; a_j - \varepsilon_j\} \leq x_j \leq A_j + \varepsilon_j \quad (j=1 \div n).$$

При така направената постановка на задачата, икономико-математическият модел приема вида:

Да се намери максимум на функцията:

$$Z = \sum_{j=1}^n x_j \quad (1)$$

при ограничителни условия

$$\frac{x_j}{\sum_{k=1}^n x_k} = p_j \quad (j=1 \div n), \quad \sum_{j=1}^n p_j = 1, \quad (2)$$

$$\max\{0; a_j - \varepsilon_j\} \leq x_j \leq A_j + \varepsilon_j \quad (j=1 \div n). \quad (3)$$

Така конструираният икономико-математически модел е нелинеен и за неговото решаване съществуват методи, но те са далеч по-сложни от методите за решаване на линейната оптимизационна задача. Нелинейният характер на задачата се определя от ограничителни условия (2), но те лесно могат да бъдат преобразувани и сведени до линейни ограничения. Предвид показаната ненулева стойност на знаменателя, следва, че

$$x_j = p_j \cdot \sum_{k=1}^n x_k \quad (j=1 \div n)$$

или

$$p_j \cdot \sum_{k=1}^n x_k - x_j = 0 \quad (j = 1 \div n). \quad (2')$$

Когато в модела (1) – (3), ограничителното условие (2) се замени с условия (2') се достига до линейна оптимизационна задача, за чието решаване има разработени специални алгоритми (например симплекс метода).

Актуалното състояние на транспортния сектор в международен, национален и регионален мащаб формира солидна основа за провеждане на научнообосновани изследвания в очертаните насоки.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ В СРЕДАТА НА SPSS

Доц. д-р Юлиан Василев
Икономически университет – Варна

Резюме. Цел на настоящия доклад е представяне на методика за интерпретация на математически модели, получени в изходния прозорец на SPSS. При работа със софтуерен продукт SPSS е възможно създаване на математически модели, които да описват дадено явление. При избор на команда Curve estimation, софтуерният продукт SPSS генерира изход с много модели. Особеното за тези модели е, че в изходния прозорец на SPSS те се представят като: име на модела и коефициенти без да е дадена математическа формула. Тук съществен проблем представлява правилното интерпретиране на получените модели с оглед адаптацията им в практиката. В доклада са представени няколко числени примера.

Ключови думи: статистически софтуер, MS Excel, прогнозиране на продажби.

1. Въведение

При работа със софтуерен продукт SPSS е възможно създаване на математически модели, които да описват дадено явление. При избор на команда Curve estimation, софтуерният продукт SPSS генерира изход с много модели. Особеното за тези модели е, че в изходния прозорец на SPSS те се представят като: име на модела и коефициенти без да е дадена математическа формула. Тук съществен проблем представлява правилното интерпретиране на получените модели с оглед адаптацията им в практиката.

За илюстриране на интерпретацията използваме следната таблица с данни (таблица 1).

Фрагмент от таблицата с данни

Дата	Обем продажби на артикул X
01.01.2014	20
02.01.2014	25
03.01.2014	17

Таблицата съдържа 365 реда – по един ред за всяка дата.

При оценка на различните модели следва да се гледа значимостта на ANOVA таблиците, значимостта на коефициентите в модела и равнището на коефициента на детерминация.

При тестване на моделите в средата на SPSS се избира команда Analyze/Regression/Curve estimation.

Тестването на моделите минава на два етапа: (1) при включване на константата в уравнението и (2) изключване на константата от уравнението.

Като независима променлива е избрано времето (Independent: Time).

Като зависима променлива е избрана „количеството“ (q).

Избрани са всички модели (linear, logarithmic, inverse, quadratic, cubic, power, compound, s, logistic, growth, exponential).

2. Интерпретация на получените модели

За линейния (linear) модел:

Коефициентът B е -0.013

Константа е 56.754

За да прогнозираме продажбите на 01.01.2015 г. (на 366 ден) с линеен модел, трябва да въведем следната формула в средата на MS Excel

$$= -0.013 * 366 + 56.754$$

За логаритмичен (logarithmic) модел

$\ln(\text{Case Sequence})$ е -1.454

Константа е 61.478

За да прогнозираме продажбите на 366 ден с логаритмичен модел, трябва да въведем следната формула в средата на MS Excel.

$$= 61.478 - 1.454 * \ln(366)$$

За инверсен (inverse) модел

Коеф. В е -13.992

Константа е 54.888

За да прогнозираме продажбите на 366 ден с инверсен модел, трябва да въведем следната формула в средата на MS Excel.

$$= 54.888 - 13.992/366$$

За квадратичен (quadratic) модел

Коеф. В1 е -0.29

Коеф. В2 е 0.000004

Константа 57.697

За да прогнозираме продажбите на 366 ден с квадратичен модел, трябва да въведем следната формула в средата на MS Excel.

$$= 57.697 - 0.29 * 366 + 0.000004 * 366 * 366$$

За кубичен (cubic) модел

Коеф. В1 е -0.073

Коеф. В2 е 0.0000004

Коеф. В3 е -0.0000005

Константа е 59.054

За да прогнозираме продажбите на 366 ден с кубичен модел, трябва да въведем следната формула в средата на MS Excel.

$$= 59.054 - 0.073 * 366 + 0.0000004 * 366 * 366 - 0.0000005 * 366 * 366 * 366$$

За съставна (compound) функция

Коеф. В: 1.00

Константа: 35.112

$$= 35.112 * \text{power}(1; 356)$$

За степенна (power) функция

ln(Case Sequence) -0.32

Константа 39.611

Зависима променлива ln(q)

За да прогнозираме продажбите на 366 ден със степенна функция, трябва да въведем следната формула в средата на MS Excel.

$$= \exp(39.611 * \text{power}(\ln(366); -0.32))$$

S - функция

Коеф. В -0.046

Константа 3.523

За да прогнозираме продажбите на 366 ден с S функция, трябва да въведем следната формула в средата на MS Excel.

$$= \exp(3.523 - 0.046/366)$$

Функция Growth

Case sequence: 0.000

Константа: 3.559

Зависима променлива: ln(количество)

За да прогнозираме продажбите на 366 ден с Growth функцията, трябва да въведем следната формула в средата на MS Excel.

$$= \exp(3.559 + 0 * 366)$$

Експоненциална (exponential) функция

Коеф. В: 0.000

Константа: 3.559

Зависима променлива: ln(количество)

За да прогнозираме продажбите на 366 ден с експоненциална функция, трябва да въведем следната формула в средата на MS Excel.

$$= \exp(3.559 + 0 * 366)$$

Логистична (logistic) функция

Коеф. В: 1.000

Константа: 0.028

Зависима променлива: ln(1/количество)

За да прогнозираме продажбите на 366 ден с логистична функция, трябва да въведем следната формула в средата на MS Excel.

$$= \exp(1 + \exp(0.028 + 1.366))$$

Всички описани модели са дадени с константа в уравнението. По аналогичен начин се интерпретират моделите без константа в уравнението. Представените числови данни са примерни.

Заклучение

Използването на статистически софтуер (като на пример SPSS) до голяма степен улеснява изследователите при съставяне на математически модели, описващи икономически явления. Използването на SPSS за съставяне на прогнози е обичайна практика. Като мощен софтуерен инструментариум, SPSS позволява да се направят няколко математически модела, които да описват зависимост между две променливи на кардинална скала или зависимостта на една кардинална променлива от времето. Така на пример в SPSS могат да се направят няколко математически модела, които да се използват за прогнозиране на продажбите при наличие на обобщена информация за продаденото количество от определен артикул по дни.

Тестването на статистическата значимост на моделите и коефициентите се извършва в изходния прозорец на SPSS. Съществен проблем за изследователите представлява правилното интерпретиране на получените коефициенти и сглобяването им в математическа формула. Ето защо в настоящия доклад са дадени примери за интерпретиране на математическите модели, получени в изходния прозорец на SPSS.

Използвана литература

1. http://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_function
2. Vasilev, J. Calculating the probability of returning a loan with binary probability models. Romanian Statistical Review, 4/2014, pp. 55-71.

ОПТИМИЗИРАНЕ НА РЕНТАБИЛНОСТТА ПРИ УПРАВЛЕНИЕТО НА ЗАПАСИ

Доц. д-р Танка Милкова

Икономически университет – Варна

Резюме. Стоково-материалните запаси представляват статичното състояние на материалния поток и в това си качество те са основен обект на управление в съвременната логистика. Предвид обстоятелството, че ангажират значителен обем финансов ресурс (в редица случаи и човешки ресурси) и формират основна част от логистичните разходи на организацията за тяхното управление следва да се използват специални научно-обосновани подходи. В настоящата разработка е предложен икономико-математически модел за управление на запасите, с чиято помощ се определят такива равнища на запасите от стоково-материалните ценности, при които се осигурява максимална рентабилност, изразяваща се с печалбата от единица запас.

Ключови думи: запаси, оптимизиране, рентабилност.

Проблемите на управлението на запасите от стоково-материални ценности в съвременната икономика попадат в обсега на широкия кръг от процеси и дейности, формиращи логистичното обслужване на всеки един стопански процес. Непрекъснатият теоретичен и практически интерес към запасите в логистичната система се обяснява най-вече с тяхната основна същност, а именно, че те представляват статичното състояние на материалния поток, основен обект на управление в логистиката. Стоково-материалните запаси се намират в различни стадии на производството и обръщението на продукцията с производствено-техническо предназначение, потребителски и други стоки, очакващи постъпване в производствения процес или потреблението, като се срещат във всички фази на стопанския процес – в снабдяването (суровини, материали, комплектоващи изделия), в производствения процес (незавършена продукция, инструменти, полуфабрикати и др.), в пласмента (готова продукция, ре-

зервни части, съпътстващи стоки за сервизите). Въпреки че запасите са факторът, осигуряващ нормалното и непрекъснато протичане на производствения и стопански процес, тяхното наличие е предпоставка за натрупване на редица негативи като замразяване на значителен финансов ресурс, ангажиране на човешки ресурси и допълнителни разходи за управление. В подкрепа на това могат да бъдат посочени резултатите от различни изследвания, които показват, че запаси под различна форма присъстват навсякъде в логистичните системи, като ангажират до 80% от оборотните средства на организациите, а разходите по поддържането и управлението им в редица случаи достигат до 40% от логистичните разходи на фирмите¹. Това поражда обективната необходимост от извеждането на научно обосновани подходи за регулиране на запасите с оглед постигане на оптимални резултати. Един от най-ефективните и резултатни подходи за постигане на тази цел е използването на методите на икономикоматематическото моделиране. В специализираната литература се срещат редица разработки посветени на управление на запасите, като обикновено акцентът е поставен на опитите за минимизиране на общите разходи за управление, включващи разходи за закупуване на запаси, разходи за попълване на запаси и разходи за съхранение на запаси². При търсене на оптимални резултати от управлението на запасите и предвид конкретно поставените управленски цели, би могла да се изследва и възможността за максимизиране на рентабилността на стоково-материалните запаси³.

В настоящата разработка авторът си поставя за цел да констру-

¹ Благоев, Бл. и др. Стопанска логистика. Варна: Наука и икономика, 2009, с. 360.

² Вж. например: Благоев, Бл. и др. Стопанска логистика. Варна: Наука и икономика, 2009; Дыбская, В. В. и др. Логистика. Интеграция и оптимизация логистических бизнес-процесов в цепях поставок. Москва: Эксмо, 2008; Стерлигова, А. Н. Управление запасами в цепях поставок. Москва: Инфра-М, 2012.

³ Рентабилността на стоково-материалните запаси представлява печалбата, която се получава от всяка парични единица, изразяваща себестойността на запасите в организацията. Изчислява се като отношение на печалбата от стоково-материалните запаси и тяхната стойност.

ира и предложи икономико-математически модел за управление на запасите, с чиято помощ се определят такива равнища на запасите от стоково-материалните ценности, при които се осигурява максимална рентабилност, изразяваща се с печалбата от единица запас.

Постановката на задачата може да се сведе до следното. Нека в дадена организация се поддържат стоково-материални запаси от n различни вида, като всеки конкретен вид запас се означава с индекс j ($j=1 \div n$). Индивидуалната рентабилност на всеки вид стоково-материален запас се означава с c_j ($j=1 \div n$) или това е печалбата, която се получава от една парична единица вложена в запас от всеки конкретен вид стоково-материална ценност. Тъй като всяка конкретна практическа ситуация обуславя необходимостта различните видове запаси да се измерват в различни натурални мерни единици, в настоящия модел ще се отчита количеството на запаса в стойностно изражение в съответната парична мерна единица. Така променливите величини в модела ще представляват количеството парични единици вложени в j -ти вид запас от всеки вид, което трябва да се поддържа и ще се означават с x_j ($j=1 \div n$). Променливите величини x_j могат да представляват или някакво средно ниво на поддържания запас от всеки вид или стойността на текущия запас, която съответства на равнището на запаса във всеки един момент, в случая в момента на прилагане на модела.

Предвид направените означения печалбата от всички видове поддържани запаси в организацията може да се изрази чрез сумата от произведенията на индивидуалната рентабилност и стойността на всеки от видовете запаси, т.е.

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \text{ или } \sum_{j=1}^n c_jx_j .$$

Общата стойност на всички стоково-материални запаси в парично изражение ще се представя от сумата

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \text{ или } \sum_{j=1}^n x_j .$$

Така рентабилността от стоково-материалните запаси се изразява чрез следното отношение

$$\frac{c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \text{ или } \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j}{\sum_{j=1}^n x_j} .$$

Представената по този начин рентабилност ще бъде целевата функция в икономико-математическия модел и предвид нейната икономическа същност следва да се търси максимум на функцията

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j}{\sum_{j=1}^n x_j} .$$

Следва да бъдат отчетени и някои ограничителни условия, предиктувани от спецификата на прилаганите системи за управление на запасите от всеки вид в конкретната организация.

Първо, необходимо е да бъде спазено изискването наличността от всеки вид запас да е съобразена с т.нар. максимално изискуемо ниво на запаса, което представлява икономически целесъобразното равнище на запаса в дадена система за управление на запаси. В модела тези величини ще бъдат означени с A_j ($j=1 \div n$) или максимално допустимата стойност в парични единици на всеки вид запас. Тогава следва да бъде изпълнено условието

$$x_j \leq A_j \quad (j=1 \div n) .$$

Второ, необходимо е да бъде спазено изискването наличността от всеки вид запас да е не по-малка от нивото на гаранционния (резервния) запас, който е предназначен за осигуряване на непрекъснатото снабдяване на дейността на организацията в случай на непредвидени обстоятелства, размерът му е постоянна величина и при

нормални условия на работа е неприкосновен. В модела тези величини ще бъдат означени с a_j ($j=1 \div n$) или минимално изискуемата стойност в парични единици на всеки вид запас. Така следва да бъде изпълнено условието

$$x_j \geq a_j \quad (j=1 \div n).$$

Трето, необходимо е общата стойност на запасите от всички видове да не надхвърля някаква предварително определена стойност K , която следва да е съобразена с възможностите и спецификата на конкретната организация. Тогава следва да се отчита условието

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq K$$

Така се достига до следния икономико-математически модел:

Търси се

$$\max : Z = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j}{\sum_{j=1}^n x_j}, \quad (1)$$

при ограничителни условия

$$x_j \leq A_j \quad (j=1 \div n), \quad (2)$$

$$x_j \geq a_j \quad (j=1 \div n), \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq K. \quad (4)$$

Конструираният икономико-математически модел представлява задача на нелинейното оптимиране, методите за чието решаване са свързани с някои трудности. Той може да бъде сведен до задача на линейното оптимиране с помощта на следващите преобразувания, чийто оптимален план се определя значително по-лесно.

Въвеждат се променливите y_i ($i=1 \div n$)

$$y_i = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^n x_j} \quad (i=1 \div n)$$

и

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i} \text{ или } \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{y_0}.$$

Тогава

$$x_i = y_i \sum_{j=1}^n x_j = \frac{y_i}{y_0} \quad (i=1 \div n). \quad (5)$$

Така задачата (1) – (4) ще приеме вида

Да се намери

$$\min : G = \sum_{i=1}^n c_i y_i, \quad (6)$$

при ограничителни условия

$$\sum_{i=1}^n y_i = 1, \quad (7)$$

$$y_i - A_i y_0 \leq 0 \quad (i=1 \div n), \quad (8)$$

$$y_i - a_i y_0 \geq 0 \quad (i=1 \div n), \quad (9)$$

$$y_0 \geq \frac{1}{K}, \quad (10)$$

$$y_i \geq 0 \quad (i=1 \div n). \quad (11)$$

Като се има предвид, че от условие (10) следва, че $y_0 > 0$ и $a_i \geq 0 \quad (i=1 \div n)$, то от (9) се получава, че $y_i \geq 0 \quad (i=1 \div n)$. Това дава възможност условията (11) да бъдат пропуснати в модела.

Оптималният план на така получения линеен икономико-математически модел може да бъде намерен лесно (стойностите на x_i^* се получават от намерените $y_i^* \quad (i=1 \div n)$ чрез равенство (5)) и ще осигури максимална рентабилност от поддържаните стокови-материални запаси в организацията.

Предложеният модел представлява само една от възможностите за приложение на научно-обосновани подходи при търсенето на оптимални управленски решения, които да осигурят най-добри икономически резултати при осъществяване на широкия спектър от дейности в логистичната система на всяка организация.

ПАНЕЛНИ ТЕСТОВЕ ЗА КОИНТЕГРАЦИЯ С R - ПАКЕТЪТ RCO

Доц. д-р Георги Маринов
Икономически университет – Варна

Резюме. Литературата в областта на панелните данни претърпява бурно развитие вече няколко десетилетия поред, през последните години вниманието се концентрира главно върху изследването на нестационарни панели. И докато за панелните тестове за единични корени отдавна съществуват реализации в R, то при тези за коинтеграция съществува известна празнота. Това наложи разработването на пакета rco, цел на който е да предостави на потребителя без сериозни познания в програмирането някои панелни тестове за коинтеграция.

Литературата в областта на панелните данни претърпява бурно развитие вече няколко десетилетия поред, преминавайки от първоначалния интерес към балансирани панели с голямо N и малко T измерение към небалансирани панели и към панели със съпоставими по размер измерения.

През последните години вниманието се концентрира главно върху изследването на панели, включващи нестационарни серии, с прехвърляне на вниманието от социологическите данни към тези в областта на икономиката.

Интересът към нестационарните панели е предизвикан от една страна от осъзнаването на важността на наличието на нестационарност в данните, особено що се отнася до данни свързани с икономиката; а от друга страна - чисто практически - от твърде ниската мощност на разработените тестове за не/стационарност при време-вите данни, особено при крайномерни извадки (къси редове).

Именно желанието за постигане на по-голяма мощност на тестовете подтиква търсенията да се насочат към панелните данни, а тестовите статистики имат някаква обобщеност, и тази им обобще-

ност има като допълнителен резултат нормалността им в граничния случай. Много от предложените панелни тестови статистики са нормално разпределени, а някои дори позволяват при подходящо нормиране да бъдат сравнявани с $N(0,1)$.

Развитието на панелните тестове е стимулирано и от появата на подходящи за анализ данни - през последните години, с развитието на Интернет и със стремежа на все повече страни пълноценно да участват в световната финансова система, достъпни за изследователите стават относително големи панели с макроикономически данни (WDI, PWT, данни на OECD, Eurostat и др.). Обвързаността на световната икономика допълнително допринася за това, панелните изследвания да бъдат възприемани като носещи висока степен на правдоподобност, интересът към тях продължава да е много висок.

Обобщаването на тестовете за нестационарност за панели от данни става още в края на миналия век - тестовете Levin-Lin (1992), (доразвит в Levin-Lin-Chu 2002), Im, Pesaran and Shin (1997, 2003) и Maddala and Wu (1999) са основните тестове с нулева хипотеза нестационарност (доразвиват ADF и подобните тестове), а предложените от Hadri (2000) тестове са за нулева хипотеза стационарност (обобщават KPSS теста).

Тези, ранни тестове за нестационарност изискват данните по N направлението да са независими помежду си. Това обаче се оказва твърде ограничително изискване, особено за икономически данни, както и изискването за липса на структурни промени.

През последните години литературата се концентрира върху отчитане на възможните взаимовръзки между отделните серии (N -направлението) и се появяват т.нар. "тестове от второ поколение" - PANIC теста на Bai and Ng (2004), Moon and Perron (2004) и др. - за подробности вж. Hurlin et Mignon (2005), Barbieri (2006).

Успоредно с тестовете за единичен корен, предлагат се и панелни тестове за наличие на коинтеграция. Някои от тях са базирани върху идеите за тестване на остатъците за стационарност (Pedroni 1999, Kao 1999 - използват идеите на Engle-Granger подхода), други

- върху проверка на ранга на матрицата на коефициентите в ADF тип модел (Breitung 2005, подход, подобен на Johansen, 1988), има и тестове за проверка за наличие на процес за корекция на грешки (McCoskey and Kao 1998, Larsson, Lyhagen and Lothgren 2001) - много добър обобщаващ преглед прави Choi (2012).

Както и при тестовете за единичен корен, така и при тестовете за наличие на коинтеграция последните години са посветени на изследване на случаите с връзки между отделните индивидуални серии и случаите на крайномерни извадки (къси редове), новите тестове държат сметка за възможните връзки, например посредством дефакторизиране на данните.

Откъм практическото им приложение, най-популярни се оказват тестовете на Pedroni (1999) - тази методология се използва в над две трети от 50-те най-популярни статии (към средата на 2015 г.) с прилагане на панелните тестове за коинтеграция върху емпирични данни. По популярност следват тестовете на Breitung (2005) и Larsson, Lyhagen and Lothgren (2001).

И докато за панелните тестове за единични корени отдавна съществуват реализации в R - например в пакетите *plm* и *urca*, то при тестовете за коинтеграция съществува известна празнота по въпроса. Някои ранни идеи бяха представени в Маринов (2013), но от полза е по-доброто стандартизиране на инструментариума.

Всичко това наложи разработването на пакета *rco*, цел на който е да предостави на потребителя без сериозни познания в програмирането някои панелни тестове за коинтеграция.

В първоначалната версия (1.0.1) пакетът позволява получаването на седемте тестови статистики на Pedroni (1999) за два от случаите - двумерен (една "зависима" и една "независима" променлива), и многомерен (една "зависима" и няколко "независими").

Пакетът може да бъде намерен в CRAN архива (<http://cran.r-project.org/>, в т.ч. и за Windows), както и на R-Forge (<http://pco.r-forge.r-project.org/>) - версиите в процес на разработка.

R разполага с големи възможности за работа с многомерни

данни (представени в т.нар. "array"), затова и реализацията на многомерния вариант на тестовете (функцията `pedroni99m`) не представлява особена трудност. Но от друга страна да се работи с матрици е по-интуитивно, а и по-лесно от гледна точка на въвеждането на данните, затова специално за двумерния случай (две променливи, N индивидуални серии, T времеви наблюдения) бе направена отделна реализация (функцията `pedroni99`).

Пакетът `рсо` е създаден с оглед прилагането на тестовете върху данни от икономиката, и то предимно за анализ на макроикономически данни. Подобни панели са относително малки (спрямо използвани панели с данни в други области на знанието, въпреки че ако става дума за данни за икономиката, такива панели се оказват много големи) - както N , така и T рядко надхвърлят 200, в краен случай 500. Изчисленията за такива относително малки панели не представляват особена трудност за съвременната компютърна техника. Ето защо е възможно реализацията да бъде направена директно със средствата на `R`, без да се налага използване на предварително компилирани модули, в т.ч. на други езици (`C`, `Fortran` или `Java`), каквото по принцип е допустимо и е честа практика при разработването на модулите за `R`.

Конкретната реализация плътно следва инструкциите в Pedroni (1999), разбира се с отчитане на програмните особености на `R`, пакетът изисква да бъде предварително инсталиран пакетът `stats`.

Резултатите се визуализират в таблица с размери 7×2 , като първата колонка е с емпиричните стойности на статистиките, а втората - с нормираните им значения, които при нулевата хипотеза са $N(0,1)$ разпределени. Нормирането на тестовите статистики се извършва с помощта на стойностите, приведени за целта в Pedroni (1999).

За илюстриране на възможностите на панелните тестове пакетът включва данни за инвестициите и спестяванията в развитите страни, така че да се провери валидността на загадката "Фелдщайн-Хориока"; използвани са данни от WDI на СБ. Панелни тестове за коинтеграция са популярни и в други области - тестване на PPP хи-

потезата, тестване на устойчивостта на бюджетните политики и т.н.

Бъдещото развитие на пакета *рсо* ще осигури наличието на тестовете Kao (1999), McCoskey and Kao (1998) и Breitung (2005).

Литература:

Bai, J. and S. Ng (2004), "A Panic Attack on Unit Roots and Cointegration" *Econometrica*, 72, 1127-1177.

Barbieri, L. (2006) "Panel Unit Root Tests: A Review", Quaderni del Dipartimento di Scienze Economiche e Sociali, Università Cattolica del Sacro Cuore - Piacenza, Serie Rossa: Economia – Quaderno N. 43 ottobre 2006.

Breitung, J. (2005). A parametric approach to the estimation of cointegration vectors in panel data. *Econometric Reviews*, 24(2), 151-173.

Choi, In (2012), "Panel Cointegration," Working Papers 1208, Research Institute for Market Economy, Sogang University.

Hadri, K. (2000), "Testing for Unit Roots in Heterogeneous Panel Data", *Econometrics Journal*, 3, 148-161.

Hurlin, Chr. et V. Mignon, "Une synthèse des tests de racine unitaire sur données de panel", *Economie et prévision* 2005/3 (no. 169-170-171), p.

Im K.S., M.H. Pesaran and Y. Shin (1997), "Testing for Unit Roots in Heterogeneous Panels", mimeo, Department of Applied Economics, University of Cambridge.

Im K.S., M.H. Pesaran and Y. Shin (2003), "Testing for Unit Roots in Heterogeneous Panels", *Journal of Econometrics*, 115, 53-74.

Johansen, S. (1988). "Statistical Analysis of Cointegration Vectors". *Journal of Economic Dynamics and Control* 12: 231–254.

Kao, C. (1999). Spurious regression and residual-based tests for cointegration in panel data. *Journal of econometrics*, 90(1), 1-44.

Larsson, R., Lyhagen, J., and Löthgren, M. (2001). Likelihood-based cointegration tests in heterogeneous panels. *The Econometrics*

Journal, 109-142.

Levin, A. and C.F. Lin (1992), "Unit Root Test in Panel Data: Asymptotic and Finite-Sample Properties", Discussion Paper, 92-93, Department of Economics, University of California at San Diego.

Levin, A., C.F. Lin and C.S.J. Chu (2002) "Unit root tests in panel data: asymptotic and finite-sample properties", Journal of Econometrics, 108, 1-24.

McCoskey, S., and Kao, C. (1998). A residual-based test of the null of cointegration in panel data. *Econometric reviews*, 17(1), 57-84.

Maddala, G. and S. Wu (1999), "A Comparative Study of Unit Root Tests and a New Simple Test", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 61, 631-652.

Moon, H.R. and B. Perron (2004), "Testing for a Unit Root in Panel with Dynamic Factors", *Journal of Econometrics*, 122, 81-126.

Pedroni, P. (1999), "Critical Values for Cointegration Tests in Heterogeneous Panels with Multiple Regressors," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Department of Economics, University of Oxford, vol. 61(0), pages 653-70, Special I.

Маринов, Г. (2013), "Панелни единични корени и коинтеграция", Онгъл, Варна.

СЪПОСТАВКА НА ДВА МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛА ЗА ОПТИМИЗИРАНЕ НА МОРСКИТЕ ПРЕВОЗИ ОТ ГЛЕДНА ТОЧКА НА ТРАНСПОРТНИТЕ ОПЕРАТОРИ

*Гл. ас. д-р Радан Мирянов
Икономически университет – Варна*

Със стъпването на световната икономика и глобалната търговия на крака след рецесията, морските превози отбелязаха стабилен растеж през последните години. В още по-голяма степен това важи за контейнерните превози. Пред транспортните оператори със все по-голяма сила стои въпросът как да управляват потоците по различните маршрути, така че изгодата за тях да бъде максимална, т.е. себестойността и разходите да са сведени до минимум.

Целта на настоящия доклад е да се съпоставят, изтъквайки техните предимства и недостатъци, два икономико-математически модела, минимизиращи разходите на транспортните оператори, като по този начин се подпомогнат тези оператори във взимането на най-правилните решения.

За постигане на така поставената цел авторът решава следните **задачи**:

1. Чрез конструирането на линеен икономико-математически модел се описва сравнително лек от изчислителна гледна точка начин за определяне на оптималния брой и тип на използваните за транспорт морски съдове.

2. Чрез доразвиването на модела в нелинеен се осъществява една по-прецизна оптимизация, даваща възможност да се определи и оптималната средна скорост на всеки от използваните морски съдове.

Да преминем към конкретната постановка на задачата. Нека даден транспортен оператор обслужва n на брой маршрути и нека бъдещият период, който се разглежда, е достатъчно обозрим, за да има компанията пълна яснота относно необходимите количества,

които трябва да превози. Това по принцип не ограничава общността, тъй като съвременните оператори имат ясни договорни отношения за сравнително дълги срокове и изключително рядко, само при извънредни обстоятелства, взимат решения в последния момент. При гореописаните условия, транспортният оператор трябва да реши колко и какви съдове да използва по всеки от маршрутите, така че едновременно с постигането на удовлетвореността на клиентите си да успее да минимизира цената на превозите. Ако приемем, отново почти без ограничение на общността, че става дума за контейнеровози, то въпросът „какви” при тях се свежда до техните размери, като пределно ясно е, че именно те влияят на цената на транспорта.

Нека, освен това, контейнеровозите, с които разполага даденият транспортен оператор могат да бъдат диференцирани в m на брой типа. Както вече стана дума, практически е оправдано съдовете да бъдат профилирани по тяхната големина. Да въведем следните означения:

a_{ij} – цена на едно плаване на контейнеровоз от i -тия тип по j -тия маршрут, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$;

x_{ij} – брой контейнеровози от i -тия тип, плаващи по j -тия маршрут, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$;

d_{ij} – брой дни чакане на рейд на кораб от i -тия тип, плаващ по j -тия маршрут, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$;

r_i – цена на еднодневен рейд на контейнеровоз от i -тия тип, $i = \overline{1, m}$;

c_i – капацитет в контейнери на кораб от i -тия тип, $i = \overline{1, m}$;

S_i – брой на наличните контейнеровози от i -тия тип, $i = \overline{1, m}$;

T_j – общ брой контейнери, които трябва да бъдат транспортирани по j -тия маршрут, $j = \overline{1, n}$.

Целевата функция, която ще бъде подложена на минимизация, трябва да включва сумарните разходи по транспортирането на товарите. Те ще бъдат оформени в две „пера” – разходи по превоза на контейнерите и разходи по престой на корабите на рейд. Според въведените означения, първите могат да бъдат изразени по следния начин:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} , \quad (1)$$

докато за разходите по рейдуване на корабите ще имаме:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_i d_{ij} x_{ij} . \quad (2)$$

Събирайки изразите в (1) и (2) получаваме целевата функция, която ще бъде подложена на минимизация:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_i d_{ij} x_{ij} . \quad (3)$$

Да разгледаме сега евентуалните рестрикции, които ще ни доведат до ограничителните условия на модела. На първо място, товарите трябва да бъдат транспортирани, т.е. всички контейнери трябва да бъдат натоварени на съдове със съответната вместимост по конкретните маршрути. Оттук получаваме зависимостите:

$$\sum_{i=1}^m c_i x_{ij} \geq T_j , \quad \forall j \in [1, n] . \quad (4)$$

Освен това е ясно, че корабите от всеки тип не могат да надхвърлят бройката подобни съдове, които компанията притежава. Това ни води до неравенствата:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq S_i , \quad \forall i \in [1, m] . \quad (5)$$

Разбира се, трябва да бъде отчетена и неотрицателността на променливите x_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Нещо повече, те трябва да са естествени числа или нула. При изчисленията за удобство ще игнорираме тяхната целочисленост, като ще закръгляме крайния резултат

до най-близката цяла стойност. Условията за неотрицателност са:

$$x_{ij} \geq 0, \forall i \in [1, m], \forall j \in [1, n]. \quad (6)$$

И така, имайки предвид казаното дотук, получаваме долуописаната задача на линейното оптимизиране.

Да се определи минимумът на линейната форма

$$Z(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_i d_{ij} x_{ij}$$

при ограничителни условия

$$\sum_{i=1}^m c_i x_{ij} \geq T_j, \forall j \in [1, n],$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq S_i, \forall i \in [1, m],$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall i \in [1, m], \forall j \in [1, n].$$

Практическото решаване на описаната линейна оптимизационна задача не е трудно със съвременните софтуерни възможности, дори и при големи стойности на m и n .

Дотук бе описан един идеализиран линеен модел за оптимизиране на разходите на транспортните оператори. В следващите редове този модел ще бъде доразвит, с цел още по-голямото му приближаване до съвременните реалности и постигането на още по-значителна прецизност при оптимизацията. Разбира се, това от своя страна ще доведе до известни изчислителни трудности, дължащи се най-вече на нелинейността на новата оптимизационна задача.

Множество специалисти по морска логистика биха оспорили детерминираността на стойностите a_{ij} и d_{ij} , използвани в предишния модел, както и факта, че те зависят само от маршрута и типа на морския съд. Наистина, линейният модел, който изградихме дотук, макар и много близък до реалността, би могъл да бъде доразвит именно в тази посока.

Да разгледаме, например, цената a_{ij} на плаване на контейнеро-

воз от i -тия тип по j -тия маршрут. Ясно е, че тя зависи от някои трудно предвидими и оразмерими фактори като условията по съответния маршрут, както и моментното техническо състояние на дадения морски съд, а те далеч не винаги са едни и същи. Има, обаче, и други фактори, за които все повече на брой специалисти твърдят, че могат и би трябвало да се вземат под внимание. Това досега това не бе отчетено, което не е сериозен минус на модела, тъй като повечето кораби се движат с предварително установена средна скорост, която като цяло нарушават доста рядко. За пълнота на изложението, обаче, тук ще отчетем това, добавяйки от своя страна и някои нови съображения.

Наистина, един от сериозните разходи по превозването на товарите е разхода на гориво от контейнеровозите. Разбира се, той е пряко свързан със средната скорост на кораба. В своите разработки много автори, сред които Стопфорд¹ и Перакис² обосновано твърдят, че цената на плаване на контейнеровоз от i -тия тип по j -тия маршрут a_{ij} зависи правопрпорционално от квадрата на средната скорост v_{ij} на съответния тип кораби по този маршрут – нещо, което тук ще приемем наготово. Това, което ще добавим от своя страна към линейния модел е зависимостта и на дните рейдуване d_{ij} от същата тази скорост. Но докато зависимостта на цената от скоростта е очевидно правопрпорционална, то тук това не е така. В общия случай, както посочихме и за цената, d_{ij} зависи от множество фактори, голяма част от които – случайни. Все пак, да отчетем, че при едно добро проучване и точна налична информация, в повечето случаи d_{ij} би зависило по-скоро обратно-пропорционално от скоростта, тъй като, за да се нареди по-рано на опашката от рейдуващи кораби

¹ Stopford, M., *Maritime Eco*, 2nd ed., London: Routledge, 1997.

² Perakis, A.N. and Jaramillo, D.I., *Fleet deployment optimization for liner shipping*, Maritime Pol, 2011.

(макар това да не гарантира по презумпция по-малък престой на рейд) на контейнеровоза ще му се наложи да се движи с по-висока средна скорост.

Да опитаме все пак да намерим по-точна и по-ясна зависимост на дните на рейд d_{ij} от средната скорост v_{ij} . При съвременните навигационни и комуникационни средства, за транспортните оператори става все по-лесно да проучат предварително в детайли не само маршрута, но и всичко, свързано с него, което би могло да ги касае. Факторите, които влияят на броя дни изчакване на рейд и трябва задължително да се вземат предварително под внимание, са основно метеорологичната обстановка и потоците от морски съдове около пристанищните комплекси по съответния маршрут. Доброто проучване и на двата фактора не е сериозно препятствие пред транспортна компания, разполагаща със съвременна информационна и комуникационна техника. Именно след анализ на данните, постъпващи за тези два фактора, модерният транспортен оператор лесно би могъл обосновавано да изготви една оптимална (от гледна точка на минимизиране дните на рейд) скорост u_{ij} , която корабът да спазва. Отдалечаването на v_{ij} в едната от двете посоки от u_{ij} несъмнено би повишило броя дни изчакване на рейд d_{ij} .

Нека отново типовете кораби, с които разполага компанията са m на брой, а обслужваните маршрути – n на брой. Както и в предходния модел, съдовете ще бъдат различавани по големината, т.е. вместимостта им. Въвеждаме отново означенията:

a_{ij} – цена на едно плаване на контейнеровоз от i -тия тип по j -тия маршрут, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$;

x_{ij} – брой контейнеровози от i -тия тип, плаващи по j -тия маршрут, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$;

v_{ij} – средна скорост на кораб от i -тия тип, плаващ по j -тия

маршрут, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$;

$v_{ij}^{\max}$ – максимална средна скорост на кораб от i -тия тип, плаващ по j -тия маршрут, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$;

$v_{ij}^{\min}$ – минимална средна скорост на кораб от i -тия тип, плаващ по j -тия маршрут, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$;

u_{ij} – оптимална скорост на кораб от i -тия тип, плаващ по j -тия маршрут с цел минимално изчакване на рейд, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$;

d_{ij} – брой дни изчакване на рейд на контейнеровоз от i -тия тип, плаващ по j -тия маршрут, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$;

r_i – цена на еднодневен рейд на контейнеровоз от i -тия тип, $i = \overline{1, m}$;

c_i – капацитет в контейнери на кораб от i -тия тип, $i = \overline{1, m}$;

S_i – брой на наличните контейнеровози от i -тия тип, $i = \overline{1, m}$;

T_j – общ брой контейнери, които трябва да бъдат транспортирани по j -тия маршрут, $j = \overline{1, n}$.

Целевата функция, която тук ще бъде минимизирана, отново ще включва сумарните разходи по транспортирането на товарите. Разликата е, че тук тя не е линейна. Разходите отново ще бъдат обособени като две събираеми – за превоз на контейнерите и за изчакване на рейд. Имайки предвид въведените означения и гореописаните разсъждения, първите могат да бъдат изразени по следния начин:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} (v_{ij}^2) \cdot x_{ij}, \quad (7)$$

а за разходите по престой на рейд на корабите ще имаме:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_i \cdot d_{ij} (|v_{ij} - u_{ij}|) \cdot x_{ij}. \quad (8)$$

Целевата функция получаваме като сбор от изразите в (7) и (8):

$$Z(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} (v_{ij}^2) \cdot x_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_i \cdot d_{ij} (|v_{ij} - u_{ij}|) \cdot x_{ij} . \quad (9)$$

Да разгледаме и новите ограничителни условия на тази задача, които несъмнено трябва да бъдат прибавени към описаните в линейния модел.

Те касаят нововъведените скорости v_{ij} и u_{ij} . Логично за тях имаме:

$$v_{ij}^{\min} \leq v_{ij} \leq v_{ij}^{\max}, \forall i \in [1, m], \forall j \in [1, n] \quad (10)$$

и

$$v_{ij}^{\min} \leq u_{ij} \leq v_{ij}^{\max}, \forall i \in [1, m], \forall j \in [1, n]. \quad (11)$$

И така, имайки предвид изложеното дотук, получаваме долуописаната задача на нелинейното оптимизиране.

Да се определи минимумът на целевата функция

$$Z(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} (v_{ij}^2) \cdot x_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_i \cdot d_{ij} (|v_{ij} - u_{ij}|) \cdot x_{ij}$$

при ограничителни условия

$$v_{ij}^{\min} \leq v_{ij} \leq v_{ij}^{\max}, \forall i \in [1, m], \forall j \in [1, n],$$

$$v_{ij}^{\min} \leq u_{ij} \leq v_{ij}^{\max}, \forall i \in [1, m], \forall j \in [1, n],$$

$$\sum_{i=1}^m c_i x_{ij} \geq T_j, \forall j \in [1, n],$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq S_i, \forall i \in [1, m],$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall i \in [1, m], \forall j \in [1, n].$$

Практическото решаване на тази нелинейна оптимизационна задача е значително по-трудоемко в сравнение с линейния модел, но има своята изключителна теоретична стойност и е за сметка на нарастване на прецизността и на по-точното отразяване на реалността.

От всичко казано дотук могат да бъдат направени следните

ценни и практически приложими изводи.

1. Предложеният линеен оптимизационен модел има предимствата на по-семплите изчисления, като за сметка на това ни дава като резултат само броя и типа на корабите, които ще бъдат използвани за съответния транспорт.

2. Доразвит до по-комплицирания нелинеен модел, той става далеч по-трудно изчислим от техническа гледна точка, давайки ни обаче изключително ценна допълнителна информация, а именно оптималната средна скорост на всеки от корабите.

НЯКОИ ПРЕДПОСТАВКИ ЗА ПРИЛОЖЕНИЕ НА МАТЕМАТИКАТА В ИКОНОМИКАТА

Гл.ас д-р Велина Йорданова
Икономически университет-Варна

Резюме. В настоящото изследване се прави опит да се покаже връзката на математиката с икономиката. Извеждат се някои основни предпоставки за приложението на математически инструменти в икономическите изследвания, както и възможности, които те предоставят.

Ключови думи: математика, икономика, математически инструменти, икономически изследвания.

Математическият апарат е универсален инструмент за решаването на редица проблеми, пред които са изправени учените от различни области на знанието: икономика, биология, медицина, социология и др., които на пръв поглед са съвсем далеч от математиката. Една от основните причини за проникването на математиката в различните науки е, че тя предлага ясен модел за изследване на реалността. Въпреки че математиката и икономиката са две отделни области на знанието, всяка от които има свой обект и предмет на изследване, връзката между тези две науки става все по-силна и осезаема.

Основната цел, която авторът преследва в настоящия доклад, е да се даде аргументирана обосновка за необходимостта от приложение на математиката в икономиката, както и да се изведат някои възможности, които тя предоставя при провеждането на икономически изследвания.

Без да се спираме на историческия обзор, свързан с развитието

на математиката, който обхваща различни периоди¹, ще отбележим, че в настоящия етап от нейното развитие, тя има възможности значително по-добре да формализира многообразните отношения на действителността, да описва и моделира това многообразие с помощта на натрупания богат арсенал от теоретични знания. Математиката е наука, която създава универсални аналитични инструменти за изследване на връзките и получаването на тази основа на нова информация за обкръжаващата среда. Предмет на нейното изследване се явява най-вече търсенето на количествено описание на абстрактните връзки, които могат да възникнат в реалната действителност. В този ред на мисли според видния американски учен Норберт Винер „целта на математиката е да намери скрития ред в хаоса, който ни заобикаля“².

В днешно време най-голям успех постигат тези области на знанието, които широко използват математическия апарат в своите изследвания. Разбира се един от основните въпроси е свързан с това какви са причините поради които използването на математиката води до постигането на огромни успехи при изучаването на различни процеси и явления. В крайна сметка математиката оперира с такива понятия, които на пръв поглед нямат никаква връзка с реалния живот: вектори, интеграли, диференциални уравнения и т.н.

Математиката, като специфична област на знанието, притежава характеристики, които я правят уникална. Някои от тях са:

- строгост – не позволява никакво отклонение от определените правила за изграждане на връзки (отношения) – математически формули;

¹ В свое изследване Б. Атанасов предлага и разглежда пет периода на развитие на математиката: период на зараждането на математиката; период на елементарната математика; период на математиката на променливите величини; период на класическата математика; период на кибернетичната математика. Вж. Атанасов, Б., Пл. Илиев. Математика и икономика. Годишник, Том 81, Издателство “Наука и икономика”, 2009, с. 22-31.

² Цит. по: Канторович, Л.В. Оптимальные решения в экономике ,М.: Наука, 1972, с. 6.

- при извеждането на съответните формули първоначално се използва система от аксиоми и след това, на базата на строги правила, се конструират подходящите математически формули;

- възможност за опериране с едни или други понятия, без да се разкрива тяхната същност, т.е. получените изводи (заключения) са абстрактни и напълно независими от особеностите на обекта.

Именно тези характеристики правят математическия апарат универсален аналитичен инструмент за всички области на знанието. Следователно, основавайки се на определени хипотези и използвайки строги логически правила, се дава възможност да се получат нови знания за изучавания обект. С други думи казано, с помощта на математически преобразувания, въз основа на определени предположения (условия) и строги логически правила, могат да бъдат определени нови свойства и отношения (връзки) на реалните обекти, които след това могат да се потвърдят емпирично.

В настоящото си развитие макро- и микроикономиката използват дисциплини, които се характеризират с висока степен на формализация. Именно това полага основите за напредъка на приложната математика: математическо програмиране, теория на игрите, математическа статистика, теория на масовото обслужване и др., както и напредъка в областта на информационните технологии, позволяващи обработката и съхранението на огромни информационни масиви (без приложението на математиката в икономическата практика това би било невъзможно).

Общото между математиката и икономиката е в това, че те се занимават и изучават абстрактни обекти с висока степен на сложност. Това означава, че както в математиката всички формули са абстрактни, така и в икономиката процесите, явленията и отношенията между тях са икономически абстракции без пространствени характеристики. Ето защо можем да твърдим, че икономиката е подходящо поле за приложение на математиката. Необходимостта от нейното използване в икономиката бихме могли да обясним с това, че:

1. Икономическите системи са едни от най-сложните, характеризиращи се с множество взаимодействащи си елементи, вътрешни и външни отношения, които определят тяхното състояние и поведение, неопределеност и динамика, качествени характеристики и т.н. Икономическите процеси и явления, които се приемат за обекти на изследване от страна на икономиката като наука (а те, от своя страна, характеризират икономическите отношения между субектите, резултатите от които се характеризират с количествени параметри), са абстрактни и тяхното управление става все по-трудно поради огромното разнообразие на възможните управленски решения, взети на различни равнища. От особено значение в това отношение е въпросът за научно-обоснованото търсене на оптимални решения в различни икономически ситуации, които повишават ефективността и намаляват риска.

2. В икономиката е невъзможно да се използват методи за получаване на нова информация, характерни за други науки. Следователно изучаването на икономическите процеси и явления е невъзможно без математиката, която дава възможност за количествено описание на причинно-следствените връзки на икономическите обекти, тяхното поведение, и на тази основа да се получи нова информация за механизма на тяхното функциониране. Освен това, като се свържат заедно условията за функциониране на обекта, неговата вътрешна структура, управляващите параметри, последиците от решенията, математическите модели дават възможност да се разработят многовариантни решения и да се избере оптималното, провеждайки експеримент не в реална ситуация, а с осъществяването например на компютърни симулации, които подобряват качеството на решенията, намаляват степента на риска и позволяват да се установят нови закономерности в поведението и свойствата на икономическия обект.

3. В икономиката има два вида връзки – детерминирани (определени) и стохастични. Както показва практиката, класическата математика, изучаваща детерминирани връзки, има ограничено при-

ложение в икономиката (детерминирани модели се използват главно на макро ниво: междуотраслов баланс, модели на икономически растеж). В икономиката и особено на микроравнище преобладават стохастични връзки, т.е. поведението на микроикономическите системи се отличава с голяма неопределеност, която изисква създаването на математически апарат, който да отчита тази неопределеност – математическа статистика, теория на игрите, теория на масовото обслужване, невронни мрежи и др. Процесите на глобализация, интеграция, интернационализация, въвеждането на високи технологии, диференциацията на потребностите, увеличаването на турбуленцията на стоковите пазари засилват неопределеността в поведението на икономическите системи. Всичко това води до необходимостта от използването в икономиката на математическия апарат, който дава възможност да се опишат стохастичните връзки.

Бихме могли да посочим следните възможности, които се предоставят от приложението на математиката в икономиката:

1. Математическите инструменти (като напр. моделът) са изключително удобни за изучаване на дадена икономическа система, като се изведат нейните структурни особености и вътрешни функционални връзки, връзките ѝ с другите стопански системи, като се обхване и измери влиянието на основните фактори и условия върху нея и т.н.

2. Предоставят се големи възможности за провеждане на икономически експерименти.

3. Позволява да се подходи комплексно към сложните икономически проблеми, т.е. разкриват се не само количествените връзки между отделните процеси и явления, но и се задълбочават качествените представи за закономерностите, произтичащи в икономиката.

Въпреки че настоящото изследване акцентира върху приложението на математиката в икономиката, е редно да отбележим, че връзката математика – икономика не е едностранна, т.е. между тези две науки има както пряка, така и обратна връзка. Създаването на нов математически апарат и неговото използване дава възможност

на икономиката да разрешава по нов начин съществуващите проблеми. Математическото моделиране позволява да се разширят и задълбочат възможностите за търсенето на управленски решения по няколко критерия за оптималност. От своя страна икономиката поставя нови проблеми в областта на математиката и стимулира търсенето на методи за тяхното решение. В тази връзка икономическата практика е повлияла за появата на цели нови направления в областта на приложната математика като теория на игрите, теория на масовото обслужване, невронни мрежи, програмиране и т.н. На свой ред, въз основа на математиката са разработени такива методи за икономически изследвания като мрежови, корелационен, регресионен анализ и др. По този начин бихме могли да посочим, че математиката и икономиката са в непрекъснато взаимодействие и постоянно се обогатяват една друга. Нещо повече с развитието на информационните технологии това взаимодействие преминава от областта на икономическите изследвания в реалната икономическа практика за управление на съвременния бизнес.

В заключение на изложеното по-горе ще отбележим, че математиката е „изключително удобна проста среда, в която могат да се моделират същностните характеристики на процесите и явленията от заобикалящата ни действителност“³. В съвременната икономическа наука тече процес на математизация, който разкрива нови възможности пред учените. Със средствата на математиката се търсят нови свойства и зависимости, които не могат да бъдат получени чрез чисто икономически подход.

³ Атанасов, Б., Пл. Илиев. Математика и икономика. Цит. съч., с.21.

ПРОЕКТИРАНЕ И ОЦЕНЯВАНЕ НА СИСТЕМАТА ЗА ВЪТРЕШЕН КОНТРОЛ

*Гл. ас. д-р Пламена Недялкова
Икономически университет – Варна*

Системата за вътрешен контрол във всяка организация е стоже-рът за конструктивно градиране на всички останали организацион-ни елементи като счетоводство, маркетинг, планиране и прогнозира-не и др. От тази гледна точка, проблемите относно правилното про-ектиране и последващото оценяване на системата за вътрешен конт-рол винаги си били в обсега на дебатиране, изследване и анализира-не, не само от страна на мениджмънта на организацията, но така също и от страна на счетоводители и вътрешни одитори. Във връзка с това, целта на доклада е да се предложи примерен метод за проек-тиране и оценяване на системата за вътрешен контрол, като се пос-тавят следните задачи:

1. Да се представят утвърдените англосаксонски математичес-ки методи за проектиране и оценяване на системата за вътрешен контрол.

2. Да се разкрият силните и слабите страни на утвърдената до момента практика по оценяване на системите за вътрешен контрол в България, като се направи сравнителен анализ между утвърдените методи в англосаксонските страни и прилаганите методи за оценя-ване системите за вътрешен контрол в България.

Научни изследвания, насочени към въвеждането и утвърждава-нето на математическото проектиране и оценяване на системите за вътрешен контрол, са извършвани от Американския институт на дипломираните експерт счетоводители (IACPA - *The American Institute of Certified Public Accountants*) още през 50-те години на миналия век. Работейки в тази насока, пред IACPA се разкриха множество проблеми от практиката на вътрешният контрол за орга-низациите, в които се правиха проучванията и изследванията. По

онова време Американският институт на дипломираните експерт счетоводители установи, че липсата на точна концептуална визия на вътрешния контрол се дължи, от една страна, на неточното разбиране за същността и значението на вътрешния контрол, а от друга страна, на неправилното проектиране и оценяване на системата за вътрешен контрол. Една част от проблемите, се решиха нормативно, чрез утвърждаването на конкретни стандарти, а именно приети-ят през 1958 г. стандарт *SAP No 29 Обхват на независимия одитор и преглед на вътрешния контрол* (*SAP No 29 Scope of the Independent Auditor's Review of Internal Control*). *SAP No 29* разграничи счетоводния (accounting) от административния контрол (administrative control). Също така в тази насока през 1972 г. е приет нов стандарт, а именно *SAP No 54 Одиторско проучване и оценка на вътрешния контрол* (*The Auditor's Study and Evaluation of Internal Control*)¹. Част от понятията, които не бяха изяснени в *SAP No 29*, намериха своето дефинитивно значение в *SAP No 54*.² Иновативността на *SAP No 54* е, че въвежда изискването за оценяване на вътрешния контрол с помощта на въпросници, контролни листове, блок-схеми или други методи, които според преценка на одитора, са подходящо допълнение на така посочените за оценяване състоянието и качеството на вътрешния контрол. Следователно, *SAP No 54* не ограничава прилагането на математическите методи в контролната практика.

Според **Barry Cushing**, във всяка форма под която се проявява контролът в една организация (предварителен, текущ и последващ), може да се приложи даден математически метод. Съгласни сме с тезата на Barry Cushing, че математическите методи имат своето място и приложение в контролната практика, но считаме, че за да се

¹ Eisenberg, M., The Board of Directors and Internal Control, 19 Cardozo L. Rev. 237 (1997), <http://scholarship.law.berkeley.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1363&context=facpubs>

² Eisenberg, M., The Board of Directors and Internal Control, 19 Cardozo L. Rev. 237 (1997), <http://scholarship.law.berkeley.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1363&context=facpubs>

приложи математическият апарат за решаването не само на важни управленски проблеми, но и за постигането на редица контролни цели и задачи, е необходимо много добро познаване на математическия инструментариум. Всеки математически метод е с конкретно предназначение, което се дължи на обхвата на изследваната от него информация, на спецификите на изследвания обект, а така също и на значението на резултатите, които се извеждат от него.

Изследването на утвърдения математически метод на Barry Cushing, има за цел да разграничи контролната процедура от системата за вътрешен контрол. Контролната процедура се представя „като единична мярка за контрол, докато системата за вътрешен контрол се състои от една или повече свързани процедури. В рамките на системата за вътрешен контрол, една контролна процедура може да е насочена към предотвратяване на един тип грешки, докато други процедури да са предназначени за предотвратяването на няколко типа счетоводни грешки.”³ Във връзка с това, в доклада, насочваме вниманието си само на едно от значенията на вътрешният контрол, а именно възможността му за предотвратяване на финансови загуби на дружествата, чрез разкриването на умишлени или неумишлени счетоводни грешки, допуснати от обработката на счетоводната информация.

Системата за вътрешен контрол обхващаща различни сложни контролни процеси и това определя математическия подход за нейното проектиране. Теоретично е утвърдено, че една система е проста тогава, когато се състои от една контролна дейност. Когато системата се състои от няколко контролни дейности, се приема, че системата е сложна. В контролната практика, т.нар. примитивна (проста) контролна система не може да се наблюдава. Причината е, че дори в най-ниското структурирано микро-организационно ниво, възникват ситуации, които не могат да бъдат контролно изследвани

³ Cushing, B. A Mathematical Approach to the Analysis and Design of Internal Control Systems, The Accounting Review, Vol. 49, No. 1 (Jan., 1974), pp. 24-41

само с помощта на една контролна дейност. Към контролните дейности се отнасят политики и процедури, които имат за цел постигане на разумна увереност, че рисковете са ограничени в допустими граници. Контролните дейности са разнообразни по своя вид и характер. Към тях се отнасят:

- процедурите по разрешаване и одобряване;
- разделяне на отговорностите по начин, който не позволява един служител едновременно да има отговорност по одобряване, изпълняване, осчетоводяване и контрол;
- процедурите за наблюдение;
- приемането и утвърждаването на правила за документиране на всички операции и действия, свързани с функционирането на отчетната единица;
- извършването на предварителен контрол за законосъобразност;
- други контролни дейности.

Специалисти като *Akira Ishikawa*, *Barry E. Cushing*, *Joel Demski* и др., изследват вътрешната система за контрол, като тестват нейната дейност чрез въздействието на контролни дейности върху счетоводните процеси в една организация. Иновативността, която тази група специалисти въвеждат е конкретно практическо и математическо извеждане на системата за вътрешен контрол, чрез един конкретен контролен обект, какъвто е счетоводният процес. Проявлението на системата за вътрешен контрол е представено като част от счетоводния процес и е насочено към установяване, разкриване и предотвратяване (елиминирание) на счетоводните грешки. Математическият метод, приложен за моделиране на действието на системата за вътрешен контрол върху счетоводния процес, е *прост стохастичен модел (a simple stochastic model)*. Становището на американските специалисти е, че този „модел е средство за изчисляване на надеждността на контролния процес, представляващ вероятност-

та, че процесът ще бъде приключен без грешка”.⁴ Математически надеждността на контролния процес, се представя по следния начин:

$$R = pP(s) + p(1 - P(s))P(d) + (1 - p)P(e)P(c)$$

където:

p - вероятността, че счетоводният процес е приключен, точно преди да се приложи процедурата за контрол;

$P(e)$ - вероятността, че вътрешният контрол ще открие и ще сигнализира за грешка, при положение, че тя наистина съществува в счетоводния процес;

$P(s)$ - вероятността, че по време на контролните дейности, няма да се сигнализира за нереални грешки, тъй като такива въобще не съществуват в счетоводния процес;

$P(c)$ – вероятността, че ще коригира грешката при положение, че такава съществува и тя е установена;

$P(d)$ – вероятността, че ще бъдат открити слабости в контролните действия, които ще бъдат отстранени по време на контролния процес.

$pP(s)$ - вероятността, че процесът се изпълнява правилно и контролните действия се реализират без наличието на предварителен подаден сигнал за грешка (злоупотреба);

$p(1-P(s))P(d)$ – вероятността, че процесът се изпълнява правилно, чрез контролните действия се установяват допуснати нарушения в счетоводните процеси;

$(1-p)P(e)P(c)$ – вероятността, че съществува грешка в самия счетоводен процес и е подаден сигнал за наличието на такава грешка, а така също могат да се предприемат съответните действия за нейното отстраняване.

Предложеният от *Barry E. Cushing* метод за проектиране на контролната система е демонстративно онагледен с цифрови данни,

⁴ David K. Lloyd and Myron Lipow, *Reliability: Management, Methods, and Mathematics* (Prentice-Hall, 1962), especially Chapter 9, pp. 220-78

по следния начин:

$pP(s) = (0.8) * (0.9)$	$=0.7200$
$p(1 - P(s))P(d) = (0.8)*(0.1)*(0.99)$	$=0.0792$
$(1-p)P(e)P(c) = (0.2)*(0.95)*(0.98)$	<u>$=0.1862$</u>
R	= 0.9854

От представените изчисления, се установява, че надеждността на системата за вътрешен контрол, според предложеният модел на *Barry E. Cushing* е в размер на 0.9854 единици. Задълбочен анализ на представения модел не може да се направи, тъй като данните относно извършеното емпирично изследване и тестване на предложения метод за проектиране на системата за вътрешен контрол, са непълни и дори и ограничени. В книгата си *A Mathematical Approach to the Analysis and Design of Internal Control Systems*,⁵ *Barry Cushing* представя изведените крайни резултати от предложените от него методи. В представената научна разработка не е посочена информационната осигуреност, въз основа на която се извършват изследванията и тестванията на предложените методи. Може да се приеме, че изследванията на *Cushing* са изведени въз основа на хипотези и предположения, отколкото на действителни факти и данни.

Друго научно изследване, насочено към математическото моделиране на контролната система е това на *Joel S. Demski*, направено през 1969 г. Контролната система е представена като възможност за предоставянето на управленски решения. Според *Demski*, контролната система не следва да се разглежда като дихотомна. Тя е смесица от установяване на редица информационни патологични процеси, които въздействат върху управлението на една организация. Когато тези патологични процеси се игнорират или минимизират, се забе-

⁵Gushing, B. *A Mathematical Approach to the Analysis and Design of Internal Control Systems*, College of Commerce and Business Administration University of Illinois at Urbana-Champaign, 1973, p. 47

лязва подобряване на състоянието на организацията.⁶

Joel S. Demski представя значението на контролната система, чрез процесите на вземане на управленски решения. Контролната система е представена като организационна структура състояща се от две нива. Първото ниво, предоставя т.нар. първоначални решения, които имат по-скоро целенасочен характер за обръщане на вниманието към даден проблем, отколкото реално реализиране на качествено и адекватно управленско поведение за отстраняването на възникналия проблем. Този етап на контролната система се приема за „задаващ” етап, тъй като решенията, които се вземат тук, са на база сегашното състояние и според наличната към момента информация. Второто ниво на контролната система е насочено към предоставянето на т.нар. вторични (последващи) решения, чрез които се постигат конкретни действия, които имат отражение в бъдещето развитие на организацията. По време на второто ниво от контролната система реално се постига обратната връзка с подадената информация от първото информационно ниво, което изгражда контролната система. **Joel S. Demski** демонстрира действието на контролната система, като прилага следните символни означения, а именно:⁷

$$\underset{x}{\text{Min}} \pi = \pi (X, Y)$$

$$g_i (X, Y) = \theta, i = 1.....n$$

където:

X - набор от решения, които са формулирани чрез влиянието на контролируеми променливи;

Y – набор от решения, които са взети чрез влиянието на неконтролируеми променливи;

$\pi (X, Y)$ – минимизиране на обективната функция (minimizing objective function)

⁶ Demski, J. Decision-Performance Control, The Accounting Review, Vol. 44, No. 4 (Oct., 1969), pp. 669-679

⁷ Demski, J. Decision-Performance Control, The Accounting Review, Vol. 44, No. 4 (Oct., 1969), pp. 669-679

$g_i(X, Y) = 0, i = 1 \dots n$ - ограничаващите функции на контролната система, които се поставят предварително, като ограничаващи обхвата ѝ на въздействие.

Представена по този начин, контролната система **Joel S. Demski** не изключва възможността контролната система да открива значителни нарушения и грешки, независимо, че представеният модел, се базира на контролируеми и неконтролируеми променливи. **Demski** не изключва възможността разкриването на грешки да води до подобряването на модела. Предложеният модел за представяне на контролната система е по-сложен, отколкото представянето на контролната система, чрез конкретно изпълнение. Самият създател на модела отчита факта, че предложеният модел е „една абстракция от реални явления, които чрез модела се опитват да се моделират по някакъв начин. Абстракцията се дължи на очакванията за грешки и нарушения, а така също и от обстоятелствата, че става въпрос за подбиране на явленията и процесите, които ще подлежат на контрол.“⁸

Проектирането на контролната система е сложен процес, но нейното оценяване като надеждно или ненадеждно е още по-комплицирано. Представените два модела имат както общи (сходни) положения, така и значително се различат. Считаме, че общото между моделите на **Joel S. Demski** и **Barry Cushing** е, че демонстрират разнообразието от възможности за представяне на системите за вътрешен контрол. Също така и двата модела разглеждат разкриването на грешки и злоупотреби, като вероятност, т.е. и двата модела допускат, че е възможно да не бъдат разкрити някои злоупотреби, поради факта, че се обхващат конкретни явления и процеси. Двата метода са представени теоретично, без да се онагледят с конкретни цифрови данни тяхното проявление.

Различията, които откриваме между представените модела са

⁸ Demski, J. Decision-Performance Control, The Accounting Review, Vol. 44, No. 4 (Oct., 1969), pp. 669-679

доста съществени и те са:

1. Предложеният моделът на **Barry Cushing**, е базиран изцяло на теория на вероятностите. Самият изследовател посочва, че тогава когато се постигнат предварително планираните вероятности в действието на контролната система, вече се приема, че системата е надеждна. Предложеният модел е насочен към обхващане и изследване на влиянието и въздействието на контролните действия и въз основа на тях се извежда оценката за надеждност на системата.

2. Моделът на **Joel S. Demski** за проектиране на контролната система е насочен към контролните решения. Самата система се разглежда на две основни нива, при които информационните процеси са обвързани. Приема се, че контролната система е надеждна тогава, когато има добър кумулативен ефект при разкриването на грешки и злоупотреби.

Като се има предвид всичко изложено до тук, по така представените модели, също така вземайки под внимание утвърдените нормативни актове в страната, предлагаме контролната система да се проектира с помощта на следната функционална зависимост, а именно:

$$Cs = f(A, S, R, I, M)$$

където:

Cs – контролната система

A – контролните действия (control actions)

S - контролната среда (control setting)

R – оценка на риска (risk assessment)

I – информация и комуникация (information and communication)

M – мониторинг (monitoring)

Считаме, представеният модел за проектиране на контролната система е най-приемлив и отразява цялостната концепция на една организация. Така посоченият модел, отговаря на общо приетата рамка за вътрешен контрол COSO, също така, чрез него се онагледява зависимостта на крайното оценяване на системата на вътрешния контрол от нейните независими една от друга променливи, които са:

контролните действия; контролната среда; управлението и оценяването на рисковете; информацията и комуникацията и мониторингът.

Приемаме, че не е необходимо да се представят други виждания и методи за проектиране на системата за вътрешен контрол, за да се изведе един основен извод, а той е, че в теорията и практиката съществуват различни подходи и методи за представяне на системата за вътрешен контрол в една организация, но реално това не е толкова от съществено значение. Фактически действителната същност и значение на проектирането на системата за вътрешен контрол е да може с негова помощ да се онагледят структурно–организационните различия на предприятията и спецификите на вътрешната контролна среда. Проектирането на системата за вътрешен контрол има предимство при навременното оценяване на контролните ситуации, с цел извеждането на правилните контролни решения. Когато в организациите липсва структурирана системата за вътрешен контрол, с течение на времето се откриват и се проявяват много слабости в прилаганите управленските подходи, които е можело да не се допускат от мениджмънта на дружествата.

ПОЛИТИЧЕСКАТА ИКОНОМИЯ И МАТЕМАТИКАТА ВЪВ ФРАНЦИЯ (XIX И НАЧАЛОТО НА XX ВЕК)

Ас. д-р Маргарита Борисова

Университет за национално и световно стопанство

Резюме. Целта на настоящият доклад е да представи общ поглед върху историята на математическото направление в политическата икономика във Франция в периода XIX – началото на XX в. Резултатът от връзката между двете науки води до раждането на иконометрията, която предизвиква интереса на икономисти, математици, инженери от Дружеството по иконометрия, Института по статистика и по-късно – на Политехническият център за икономически науки.

Ключови думи: политическа икономика, математика, иконометрия, Франция.

Традиционно се смята, че понятието „политическа икономика“ има своите дълбоки корени във Франция, поставени от Антоан дьо Монкретиен в научния му труд, озаглавен „Трактат по политическа икономика“. Първоначално понятието е било свързвано с богатството в една държава и неговото разпределение, а произходът му е от гръцки език и означава „изучаване на управлението (на гр. ‘икономика’) на държавата (на гр. ‘политика’)“.

Според един от създателите на Енциклопедията, видният френски математик и физик Жан льо Рон д’Аламбер (1717 – 1783), математиката има връзка с икономиката, тъй като предмет и на двете науки са величините, т.е. изучават въпроси, които в по-малка или в по-голяма степен се отнасят за количества.

Връзката със и мястото на математиката в политическата икономика води до развитието на иконометрията, която има капацитета да реши редица икономически проблеми.

Настоящият кратък доклад предлага общ поглед върху историята на математическото направление в политическата икономика във

Франция в периода XIX – началото на XX в., което предизвиква значителен интерес от страна на известни френски икономисти и математици.

Първи крачки в използването на математиката в политическата икономия във Франция

Историята на групата френски икономисти математици започва с Александър Вандермонд и включва имената на още шестима други автори.

Александър Вандермонд (1735 – 1796) – юрист, математик, музикант, физик и икономист – е един от ярките примери за енциклопедичен, мултидисциплинарен ум, „един от най-забележителните учени, които допринасят за значителния прогрес в науката през втората половина на XVIII в.“¹

Интересът му е привлечен от политическата икономия през 1780 г. Според учения нейният предмет е свързан с теорията за богатството и обществения просперитет, „осигурявайки благополучието на сегашното и бъдещото поколение“².

Вандермонд е един от първите френски учени, които обръщат внимание на възможността за използване на математиката. В рамките на първата съществуваща катедра по политическа икономия, създадена през 1795 г. във висшето училище „Екол Нормал“ в Париж, известният математик застъпва в своите лекции по политическа икономия тезата, според която „математиката, и най-вече статистиката, могат да бъдат в полза на икономистите“.

Първото есе, допринесло в значителна степен за използването на математиката в политическата икономия, принадлежи на Никола Франсоа Канард (1750 – 1833). Професор по математика в „Екол

¹ A.S. de Montferrier. Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées, Paris, 1835, p. 598-599.

² Faccarello, Gilbert. L'évolution de l'économie politique pendant la Révolution. Alexandre Vandermonde ou la croisée des chemins. Essai publié dans l'ouvrage collectif intitulé Politische Ökonomie und Französische Revolution, Trèves: Schriften aus dem Karl-Marx-Haus, 1989, p. 75-121 <http://ggjjff.free.fr/textes/Vandermonde_1989.pdf>

Сентрал дьо Мулен“, през 1801 г. Канард публикува изследването си „Принципи на политическата икономия“, в което очертава математическата теория за пазара. В това свое произведение той разглежда проблема за икономическото равновесие, което дава основание да бъде считан за предшественик на Курно.

Огюстен Курно (1801 – 1877) е пионер в математическата формулировка на политическата икономия. В своята „История на икономическия анализ“ самият Йозеф Шумпетер (1883 – 1950) го признава за един от най-големите икономисти в историята. Ще споменем и мнението на Леон Валрас, основателят на Лозанската школа, който през 1873 г. в парижката Академия за морални и политически науки дава висока оценка на Курно, квалифицирайки го като първия сериозен автор, който действително прилага математиката в политическата икономия.

Специалният принос на Курно е свързан с използването на маржиналния анализ в учението на монополите. Така той става предшественик на К. Менгер и Л. Валрас, основоположници на „маржиналната революция“.

Във въведението на своя труд „Изследване върху математическите принципи на теорията на богатството“ (1838) Курно подчертава: „Използването на математически знаци е нещо естествено, когато става дума за връзките между определени величини“³.

Инженерът Жул Дюпюи (1804 – 1866), възпитаник на престижното национално училище „Понт е Шосе“, използва математиката в своята статия „Измерване на полезността на обществените дейности“, добила популярност през втората половина на 1844 г. Приносът му за политическата икономия се базира на анализа на разходите и ползите при обществените дейности. Поставяйки акцента повече върху полезността, отколкото върху разходите, той подчертава, че ползата за потребителя надвишава платежната цена.

³ Cournot Antoine-Augustin. Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses, 1838, p. 8 <<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6117257c/f15.image>>

Трима са възпитаниците на „Екол политехник“ – висше инженерно училище във Франция, основано през 1794 г. – с които се свързва използването на математиката от политическата икономия.

Първият от тях е К. Есменард дьо Мазе (1802 – 1871), който през 1849 г. публикува своите „Нови принципи на политическата икономия“. В „Преглед в полза на свободната размяна“ (1857) Жул дьо Мезнил-Марини (1810 – 1885) открива математическа формула, която позволява да бъде оценено богатството на една нация чрез различни величини като средна цена, лихвен процент, устойчиво и текущо потребление и др. Гюстав Фово (1834 – ...) публикува няколко статии в „Журнал дез економист“, в които прави опит чрез диференциално и интегрално смятане да изясни някои икономически противоречия по отношение на стойността и данъците. Можем да посочим също така и Матьо Уолкоф, преводач и ученик на Ж. Х. фон Тунен, който през 1842 г. формулира брилянтно идеите на Д. Рикардо за стойността и рентата, а през 1861 г. публикува „Лекции по рационална политическа икономия“.

Зараждане и развитие на иконометрията

Социално-икономическото развитие и кризата от края на 1920 г. доказват неспособността на политическата икономия сама да анализира икономическата действителност. Според икономиста Рагнар Фриш (1895 – 1973) това е грешка, водеща началото си от самостоятелното използване на икономическата теория, статистиката и математиката. През 1926 г. той определя синхронното прилагане на изброените дисциплини като „иконометрия“, чието развитие не би било достатъчно без появата на математическата статистика.

Важна стъпка в развитието на иконометрията е статистическата теория (метод на най-малките квадрати, частична или цялостна корелация и др.) на англичаните Е. Галтън (1822 – 1911), К. Пиърсън (1857 – 1936) и Фр. Еджуърт (1845 – 1926). Това ново знание, което предлага интересни приложни методи, остава непознато във Фран-

ция до 1914 г.⁴

Първата научна разработка, в която са направени изследвания по математическа статистика и която бележи раждането на иконометрията, е една докторска дисертация на тема „Изследвания върху формирането и движението на цените“, защитена през януари 1913 г. от възпитаника на „Екол политехник“ Марсел Леноар (1881 – 1927). Пионер на иконометрията във Франция, Леноар, който работи за „Статистик женерал“, признава, че в основата си неговите познания по математическа статистика са придобити чрез четене на статиите на Люсиен Марх (1850 – 1933) и произведението на Юдни Юле (1871 – 1951) „Въведение в теорията на статистиката“ (1919).

След създаването на Института по статистика към Парижкия университет (26 юли 1922 г.) математическата статистика става предмет на систематично обучение във Франция. В това отношение следва да се отбележи приносът на статистика Люсиен Марх и социолога Морис Халбваш. Въпреки че до началото на Втората световна война броят на приетите студенти не е особено голям (10 – 20 на година), обучението в учебното заведение поддържа високо академично ниво.

Между преподавателите в Института по статистика могат да бъдат открити имената на Люсиен Марх, математиците Ж. Дармуа, М. Хюбер и Р. Рой. Съществена роля в развитието на математическата статистика играе А. Афталион (1874 – 1956) със своите „Курсове по политическа икономия“ (1927) и преподавателската си дейност във Факултета по право в Парижкия университет. Френските инженери Е. Шейсон, А. Фовил, К. Колсон, А. Фонтен също имат своя значим принос в развитието на това научно направление.

В произведението си „От физическите до социалните науки“ (1922) Рюеф представя своята идея, според която откриването на икономическите закони може да се сравни с откриването на физи-

⁴ Това развитие на статистиката е отбелязано от Ч. Рист в „История на икономическите доктрини от физиократите до наши дни“, 2. изд. 1913: 481.

ческите закони. Този факт в голяма степен свидетелства за неговото желание да предаде на политическата икономия научен статут, еквивалентен на този на физиката.

В началото на XX в. започва програма и по прилагането на иконометрията. Важна стъпка в този план е създаването на Дружеството по иконометрия (1930) и издаването на тримесечното списание „Иконометрия“ (1933). Тези проекти се реализират благодарение на двама френски икономисти – Ж. Рюеф и Фр. Дивизия, норвежкият и американският икономист Р. Фриш и И. Фишер, които споделят и разработват сходни научни идеи.

През 1933 г. по инициатива на Дружеството главният редактор на научното списание „Иконометрия“ Р. Фриш публикува манифест, в който се казва, че Дружеството по иконометрия е международно дружество за напредъка на икономическата теория в нейните връзки със статистиката и математиката, а основната му цел е да насърчава изследванията, насочени към обединение на количествените, теоретичните и емпиричните въпроси, към икономическите проблеми, при условие че са вдъхновени от конструктивна мисъл, аналогична на тази в естествените науки.

Развитието и задълбочаването на икономическата криза във Франция и Европа през 30-те години на XX в. е в основата на създаването през октомври 1931 г. на Груп Х-Криз (*Групата Икс-Криз*), формирана от бивши възпитаници на „Екол Политехник“. Две години по-късно Групата се превръща в Политехнически център за икономически науки. По мнението на своите основатели подобна институционална формация, посветена на точните науки, е единственият начин да се подпомогне развитието на политическата икономия.

В своето произведение „Принос на иконометричните открития“ (1936 г.) Роберт Гибра заявява, че е налице необходимост в политическата икономия да се използват обичайните научни методи, тъй като без прилагането на математическия метод въпросната дисциплина се сблъсква със стени, които не може да преодолее.

Въпросът за ролята и мястото на математиката в политическата

икономия, поставен още през XVIII в. във Франция, добива актуалност най-вече през XIX в. и след Първата световна война. Резултатът от връзката между двете науки води до раждането на иконометрията, която предизвиква интереса на икономисти, математици, инженери от Дружеството по иконометрия, Института по статистика и по-късно – на Политехническият център за икономически науки. Въпреки това понастоящем не може да се отрече, че проблемът за отношенията между политическата икономия и математиката не престава да стои във фокуса на редица методологични дебати.

Литература

1. A.S. de Montferrier. Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées, Paris, 1835, p. 598-599.
2. Cournot Antoine-Augustin. Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses, 1838, p. 8
<<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6117257c/f15.image>>
3. Faccarello, Gilbert. L'évolution de l'économie politique pendant la Révolution. Alexandre Vandermonde ou la croisée des chemins. Essai publié dans l'ouvrage collectif intitulé Politische Ökonomie und Französische Revolution, Trèves: Schriften aus dem Karl-Marx-Haus, 1989, p. 75-121 <http://ggjjff.free.fr/textes/Vandermonde_1989.pdf>
4. Gide Charles, Rist Charles. Histoire des doctrines économiques depuis les physiocrates jusqu' à nos jours. Paris : L. Larose & L. Tenin, 2^{éd.}, 1913: 481.
5. Zylberberg André. L'économie mathématiques en France 1870-1914. Economica, 1990, p. 23-133.

ИНТЕГРАЛЕН КОЕФИЦИЕНТ НА КОНКУРЕНТОСПОСОБНОСТ НА СПОРТНИЯ АНИМАЦИОНЕН ПРОДУКТ В МОРСКИТЕ ХОТЕЛСКИ КОМПЛЕКСИ

Ст. пр. д-р Димитър Димитров
Икономически университет - Варна

Резюме. Целта на настоящата разработка е да се предложи авторски модел за изчисляване на интегрален коефициент на конкурентоспособност на спортния анимационен продукт в морските хотелски комплекси по Българското Черноморие. Чрез емперично изследване е представен подходящ начин за оценка на конкурентоспособността на спортния анимационен продукт, както и детерминантите, които и оказват влияние.

Ключови думи: интегрален коефициент, конкурентоспособност, спортно-анимационен продукт, хотелски комплекси, емперично изследване.

Въведение

Туристическият сектор се асоциира с развитието на нови технологии и непрекъснатото използване на организационни и структурни иновации с цел достигане на по-висока конкурентоспособност днес. Конкурентоспособността на дадена индустрия или компания се превръща в значима тема за научни търсения и обект на редица изследвания през последните години. Още Портър през 1990г. засяга темата за конкурентоспособността на отделните нации¹, а по-късно и други автори се фокусират върху тази проблематика.

В научната литература в сферата на туризма конкурентоспособността на отделни дестинации е значима тема, особено за държави и региони, за които развитието на устойчив туризъм е от изк-

¹ **Porter, M. E.** (1990). The competitive advantage of Nations. New York: Macmillan Business.

лючително значение.² Конкурентоспособността на спортния анимационен продукт в хотелски комплекси обаче е проблемна област, която все още не е широко застъпена в научната литература. Общото впечатление е, че литературата не разполага с достатъчно емпирични изследвания относно най-подходящ начин за оценка на конкурентоспособността на спортния анимационен продукт за различни хотелски комплекси, както и детерминантите, които и оказват влияние. В тази връзка в настоящия доклад ще бъде предложен и изчислен коефициент на конкурентоспособност (ИКК) на спортния анимационен продукт в наблюдаваните морски хотелски комплекси по Българското Черноморие.

Методика на изследването

Морските хотелски комплекси, в които е проведено настоящото изследване, са висококатегорийни - 4 и 5 звезди, подбрани на случаен принцип. Всички те използват външни доставчици, които са специализирани в предлагането на анимационни продукти и имат квалифицирани кадри. Поради конфиденциалната информация, която хотелските комплекси ни предоставиха, техните реални имена заменихме с познати математически символи, заимствани от гръцката азбука. За нуждите на изследването представяме основните им характеристики, както следва (вж. табл. 1):

² Gooroochurn, N. & Sugiyarto, G. (2005). Competitiveness indicators in the travel and tourism industry. *Tourism Economics*, 11 (1), p. 25-43

Таблица 1

Основни характеристики на изследваните хотелски комплекси

Хотел	Категория	Местоположение	Експлоатационен период	Условия за пребиваване	Основни сегменти	Капацитет (бр. легла)	Организация на управлението
Алфа	5*	к. к. „Златни пясъци“	сезонен	Ол Инклузив	българоговорящи; рускоговорящи, англоговорящи, немскоговорящи	300	Част от ваканционен клуб
Бета	4*	к. к. „Златни пясъци“	сезонен	Хотел & СПА - Ултра Ол Инклузив	българоговорящи; рускоговорящи, англоговорящи, немскоговорящи;	400	Самостоятелен независим
Гама	4*	к. к. „Златни пясъци“	сезонен	Хотел - Smartline Ол Инклузив	българоговорящи; рускоговорящи, англоговорящи, немскоговорящи	350	Самостоятелен независим
Делта	5*	к. к. „Златни пясъци“	сезонен	Хотел & СПА - Ултра Ол Инклузив	българоговорящи; рускоговорящи, англоговорящи, немскоговорящи;	600	Част от корпоративна верига

За осигуряване на необходимата първична информация за изследване на конкурентоспособността на спортния анимационен продукт в морските хотелски комплекси методиката включва провеждане на емпирично проучване със следния изследователски инструментариум:

➤ Дълбочинно (свободно, неструктурирано) интервю за проучване на експертното мнение на мениджъри на хотелски комплекси и анимационни фирми относно факторите на конкурентоспособност

на спортния анимационен продукт и тяхната степен на важност.

➤ Структурирано (стандартизирано) допитване³ чрез персонална анкета за мениджъри на хотелски комплекси и на анимационни фирми.

➤ Анкетно проучване, като при изследването се прилага извадков подход за служители и за туристи. Моделът на извадката е от типа неслучайна нецелева извадка според отзовалите се (извадка на доброволците), която намира широко приложение при изучаване на потребителската удовлетвореност на гостите на даден хотел.

Въз основа на проведено научно изследване, чрез комбинирано дълбочинно интервю, е проучено експертното мнение на мениджъри – управители на висококатегорийни хотели, съвместно с управители на анимационни фирми за определяне на факторите, имащи решаващо значение за конкурентоспособността на спортния анимационен продукт в МХК. Като определящи фактори, подредени по значимост, бяха посочени: човешките ресурси; материално-спортната база; разнообразието на формите за развлечения и разновидностите на спортно-анимационните дейности; управлението и ресурсното осигуряване на спортно анимационната дейност.

По наше мнение изчисляването на отделните коефициенти следва да се основава на следните препоръки:

✓ При образуването на Коефициента за броя спортни аниматори се взема количествения показател на общия брой спортни аниматори, обслужващи всеки хотелски комплекс, съотнесен към броя на леглата в хотелския комплекс.

✓ При образуването на Коефициента за материално-спортната база се вземат количествените показатели за площта на спортните зони, съотнесени към легловата база на хотелския комплекс.

Външни спортни зони, измерени в ара за едно легло.

³ При структурираното (стандартизирано) допитване въпросникът съдържа изключително закрити или полузакрити въпроси. Вж. **Желев, С.** Маркетингови изследвания, Университетско издателство „Стопанство”, 2008 г., с.107

Вътрешни спортни зони, измерени в ара за едно легло.

Външни басейни, измерени в ара за едно легло.

Вътрешни басейни, измерени в ара за едно легло.

По този начин се изчислява общ Интегрален Коефициент за размера на материално-спортната база за всеки хотел.

✓ При образуването на Коефициента за броя предлагани спортни дейности се вземат количествените показатели за броя на спортно-анимационните дейности практикувани в съответната среда, съотнесени към легловата база на хотелския комплекс.

Брой предлагани земни спортове.

Брой предлагани водни спортове.

Брой предлагани въздушни спортове.

По този начин се изчислява общ Интегрален Коефициент за разнообразието и броя на спортно-анимационните дейности за всеки хотел.

✓ При образуването на Коефициента на разходите за спортна анимация се вземат количествените показатели за:

Общо изразходвана сума за анимация / отнесена към общите приходи от цялата леглова база.

Обща сума за поддръжка на МСБ / отнесена към общите приходи от цялата леглова база.

Обща сума за маркетинг на спортно-анимационни дейности / отнесена към общите приходи от цялата леглова база.

Изчисляване на Интегрален Коефициент на Конкурентоспособност

Коефициентът на конкурентоспособност (**Кк**) е равен на сбора от Коефициента на спортни аниматори (**Кса**), Коефициента на материално-спортната база (**Кмсб**), Коефициента на предлаганите спортни дейности (**Кпсд**) и Коефициента на разходите за спортна анимация (**Крса**):

$$\mathbf{K_k = K_{ca} + K_{msb} + K_{psd} + K_{rsa}.}$$

С цел осигуряване на съпоставимост всеки от коефициентите се разделя на броя легла за съответния хотел.

При формирането на средния коефициент на тежест за всеки един от факторите бяха използвани теглата, определени от изследваните експерти. Крайните стойности на коефициента се определиха, след като се изчисли средната оценка за всеки фактор поотделно. Тя се равнява на сбора от тежести, дадени за всеки фактор от експертите, разделен на броя участвали респонденти:

$$K_T = \frac{E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 + E_7 + E_8 + E_{19} + E_{10}}{OE},$$

K_T – коефициент за тежест;

E_{1,2,...10} – стойност на тежест от всеки експерт за конкретен фактор;

OE - общ брой експерти.

След извършените изчисления тежестта на факторите, имащи решаващо значение за повишаване на конкурентоспособността на спортния анимационен продукт в МХК, получиха следното изражение:

- Човешки ресурси – **0,4**.
- Материално-спортна база – **0,3**.
- Разнообразие и брой спортно-анимационни дейности – **0,1**.
- Управление и ресурсно осигуряване – **0,2**.

Чрез използване на коефициентите за тежест на отделните фактори пресмятаме интегралния коефициент на конкурентоспособност на спортния анимационен продукт в МХК. Интегралният коефициент включва сумата от коефициентите на изведените фактори и се пресмята по формулата:

$$k_K = c_1 \cdot k_{CA} + c_2 \cdot k_{MCB} + c_3 \cdot k_{ICD} + c_4 \cdot k_{PCA}.$$

На тегловите коефициенти задаваме съответно стойности: $c_1 = 0,4$, $c_2 = 0,3$, $c_3 = 0,1$ и $c_4 = 0,2$.

Получените от проучването данни за хотелски комплекс “Алфа” за нуждите на изчисляването на коефициента на конкурентос-

пособност на неговия анимационен продукт са поместени в таблица 2.

Таблица 2

Количествени параметри на спортно-анимационния продукт на хотелски комплекс “Алфа”

Показател	мярка	Колич.
Общ брой спортни аниматори	Бр.	5
Нормален капацитет на легловата база	Бр.	300
Общ капацитет на МСБ – зони за спортно-анимационна дейност	ара	26,1
Общ брой предлагани спортно-анимационни дейности	Бр.	18
Общо предвидени разходи за спортно-анимационни дейности	Хил. лв	55
Среден сумарен приход на приходите от едно легло за цял сезон	Лв.	5600

Коефициентът на конкурентоспособност на хотелски комплекс “Алфа”, пресметнат по възприетата формула, е:

$$k_{\kappa}^{\alpha} = 0,4 \cdot \frac{5}{300} + 0,3 \cdot \frac{26,1}{300} + 0,1 \cdot \frac{18}{300} + 0,2 \cdot \frac{55000}{5600 \cdot 300} \approx \\ \approx 0,0067 + 0,0261 + 0,0060 + 0,0065 \approx 0,0453.$$

Получените от проучването данни за хотелски комплекс “Бета” за нуждите на изчисляването на коефициента на конкурентоспособност на неговия анимационен продукт са поместени в таблица 3.

Таблица 3

Количествени параметри на спортно-анимационния продукт на хотелски комплекс “Бета”

Показател	мярка	Колич.
Общ брой спортни аниматори	Бр.	5
Нормален капацитет на легловата база	Бр.	400
Общ капацитет на МСБ – зони за спортно-анимационна дейност	ара	7,8
Общ брой предлагани спортно-анимационни дейности	Бр.	15

Общо предвидени разходи за спортно-анимационни дейности	Хил. лв	60
Среден сумарен приход на приходите от едно легло за цял сезон	Лв.	5

Коефициентът на конкурентоспособност на хотелски комплекс “Бета”, пресметнат по възприетата формула, е:

$$k_K^{\beta} = 0,4 \cdot \frac{5}{400} + 0,3 \cdot \frac{7,8}{400} + 0,1 \cdot \frac{15}{400} + 0,2 \cdot \frac{60000}{5100 \cdot 400} \approx \\ \approx 0,0050 + 0,0056 + 0,0038 + 0,0059 \approx 0,0205.$$

Получените от проучването данни за хотелски комплекс “Гама” за нуждите на изчисляването на коефициента на конкурентоспособност на неговия анимационен продукт са поместени в таблица 4.

Таблица 4

Количествени параметри на спортно-анимационния продукт на хотелски комплекс “Гама”

Показател	мярка	Колич.
Общ брой спортни аниматори	Бр.	2
Нормален капацитет на легловата база	Бр.	350
Общ капацитет на МСБ – зони за спортно-анимационна дейност	ара	14,2
Общ брой предлагани спортно-анимационни дейности	Бр.	10
Общо предвидени разходи за спортно-анимационни дейности	Хил. лв	38
Среден сумарен приход на приходите от едно легло за цял сезон	Лв.	4800

Коефициентът на конкурентоспособност на хотелски комплекс “Гама”, пресметнат по възприетата формула, е:

$$k_K^{\gamma} = 0,4 \cdot \frac{2}{350} + 0,3 \cdot \frac{14,2}{350} + 0,1 \cdot \frac{10}{350} + 0,2 \cdot \frac{38000}{4800 \cdot 350} \approx \\ \approx 0,0023 + 0,0122 + 0,0029 + 0,0045 \approx 0,0218.$$

Получените от проучването данни за хотелски комплекс “Делта” за нуждите на изчисляването на коефициента на конкурентоспособност на неговия анимационен продукт са поместени в таблица 5.

Таблица 5

Количествени параметри на спортно-анимационния продукт
на хотелски комплекс “Делта”

Показател	мярка	Колич.
Общ брой спортни аниматори	Бр.	5
Нормален капацитет на легловата база	Бр.	600
Общ капацитет на МСБ – зони за спортно-анимационна дейност	ара	17,8
Общ брой предлагани спортно-анимационни дейности	Бр.	14
Общо предвидени разходи за спортно-анимационни дейности	Хил. лв	60
Среден сумарен приход на приходите от едно легло за цял сезон	Лв.	5800

Коефициентът на конкурентоспособност на хотелски комплекс “Делта”, пресметнат по възприетата формула, е:

$$k_K^{\delta} = 0,4 \cdot \frac{5}{600} + 0,3 \cdot \frac{17,8}{600} + 0,1 \cdot \frac{14}{600} + 0,2 \cdot \frac{60000}{5800 \cdot 600} \approx \\ \approx 0,0033 + 0,0089 + 0,0023 + 0,0034 \approx 0,0180.$$

Според получените резултати при прилагане на предложената методология за оценка на конкурентоспособността на спортния анимационен продукт в морските хотелски комплекси можем да посочим като най-силно конкурентоспособна услугата, предлагана от хотелски комплекс „Алфа“, с комплексен интегрален коефициент на конкурентоспособност на спортния анимационен продукт 0,0453. На второ място от разглежданите хотелски комплекси се подрежда „Гама“ със стойност на комплексния интегрален коефициент на конкурентоспособност на спортния анимационен продукт 0,0218. Третата позиция по същия показател заема хотелски комплекс „Бета“, чийто комплексен интегрален коефициент на конкурентоспособност на спортния анимационен продукт е 0,0205. Последната, четвърта позиция в това изследване заема хотелски комплекс „Делта“ с комплексен интегрален коефициент на конкурентоспособност на спортния анимационен продукт 0,0180.

Така получените оценки на конкурентоспособността на спортния анимационен продукт в изследваните морски хотелски комплекси дават възможност да се направят и някои изводи в посока сравнителен анализ на състоянието на изследваните услуги във всеки от тях:

– Хотелски комплекс „Алфа“ се характеризира със 121% по-висока конкурентоспособност на предлагания спортно анимационен продукт спрямо хотелски комплекс „Бета“, което обосновава едно значително предимство на „Алфа“ пред „Бета“:

$$\frac{k_K^{\alpha} - k_K^{\beta}}{k_K^{\beta}} = \frac{0,0453 - 0,0205}{0,0205} = 1,21 \text{ или в проценти } 121\%.$$

– При хотелски комплекс „Алфа“ е налице 108% по-висока конкурентоспособност на предлагания спортно анимационен продукт спрямо хотелски комплекс „Гама“, което отново го характеризира с наличие на едно значително предимство и пред хотелски комплекс „Гама“:

$$\frac{k_K^{\alpha} - k_K^{\gamma}}{k_K^{\gamma}} = \frac{0,0453 - 0,0218}{0,0218} = 1,08 \text{ или в проценти } 108\%.$$

– Доста съществени са предимствата на хотелски комплекс „Алфа“ и спрямо последния в класацията по комплексен интегрален коефициент на конкурентоспособност хотелски комплекс „Делта“, тъй като се разкрива по-висока конкурентоспособност на предлагания спортно анимационен продукт от хотелски комплекс „Алфа“ спрямо „Делта“ със 152%:

$$\frac{k_K^{\alpha} - k_K^{\delta}}{k_K^{\delta}} = \frac{0,0453 - 0,0180}{0,0180} = 1,52 \text{ или в проценти } 152\%.$$

Тези изводи непосредствено следват от обстоятелството, че комплексният интегрален коефициент на конкурентоспособност на спортния анимационен продукт на хотелски комплекс „Алфа“ е значително по-голям от същите коефициенти на останалите три хотела. Направените изследвания показват, че тези интегрални коефициенти

за хотелските комплекси „Бета“, „Гама“ и „Делта“ са доста близки по своите стойности, което предопределя следните изводи:

– Хотелски комплекс „Гама“ може да се определи като равносетен на хотелски комплекс „Бета“ по показателя конкурентоспособност на предлагания спортно анимационен продукт, тъй като го превъзхожда само с 6%:

$$\frac{k_K^\gamma - k_K^\beta}{k_K^\beta} = \frac{0,0218 - 0,0205}{0,0205} = 0,06 \text{ или в проценти } 6\%.$$

– Хотелски комплекс „Гама“ се характеризира отново с несъществени предимства по отношение на конкурентоспособността на предлагания спортно анимационен продукт спрямо хотелски комплекс „Делта“, тъй като го превъзхожда с 21%:

$$\frac{k_K^\gamma - k_K^\delta}{k_K^\delta} = \frac{0,0218 - 0,0180}{0,0180} = 0,21 \text{ или в проценти } 21\%.$$

– Съпоставянето на интегралните коефициенти на конкурентоспособност на спортно анимационния продукт на хотелските комплекси „Бета“ и „Делта“ показва, отново незначително превъзходство на „Бета“ над „Делта“ с 14%:

$$\frac{k_K^\beta - k_K^\delta}{k_K^\delta} = \frac{0,0205 - 0,0180}{0,0180} = 0,14 \text{ или в проценти } 14\%.$$

Проведеното анкетиране на туристите е основа за изчисляване на крайна оценка за качеството на САП в наблюдаваните хотели.

Участниците в нашето изследване бяха гости от различни националности, почиващи в произволно избрани четири висококатегорийни хотелски комплекса, намиращи се в КК „Златни пясъци“. За да бъде по-голяма достоверността от получените резултати, определихме да изследваме до 1000 респондента. За реализирането на нашата цел раздадохме на управителите на всеки един от хотелите по 250 анкети, написани на български, английски, руски и немски език. При нас постъпиха обратно попълнени от гостите на съответните хотелски комплекси общо 930 анкети. На тази база обработихме и

обобщихме резултатите, получени за качеството на спортно-анимационната дейност, предоставяна във всеки един от хотелските комплекси.

При регистрирането на отговорите на анкетираните беше предоставена цифрова скала за оценяване, която имаше следните значения: 1 - много лошо; 2 – лошо; 3 – нито лошо, нито добро; 4 – добро; 5 – много добро; 0 – нямам мнение.

След направения обстоен анализ за всеки един от изследваните хотели се получи настоящата крайна потребителска оценка за качеството на спортно-анимационната дейност (вж. табл. 6).

Таблица 6

Потребителската оценка за качеството на САД в МХК

Хотел	Крайна оценка за качеството на САД
Алфа	4,52
Бета	3,80
Гама	4,28
Делта	4,20

Използвайки цифровата скала за оценяване, можем да обобщим получените резултати по следния начин. Хотел „Алфа“ е с най-висока средна крайната оценка от 4,52, което според оценъчната скала е „много добро“ качество на предлаганата спортно-анимационната дейност. При хотелите „Гама“ и „Делта“ наблюдаваме малко по-ниски стойности в сравнение с хотел „Алфа“, те са в порядъка на 4,28 за хотел „Гама“ и 4,20 за хотел „Делта“. Тази тяхна получена оценка им отрежда по-скоро „добро“ качеството на предлаганата САД. С най-ниски стойности от изследваните хотели е хотел „Бета“ с оценка от 3,80, която обаче също е в категорията „добро“ качество на предлаганата САД.

От така направения анализ можем да обобщим, че гостите, пребивавали в изследваните от нас хотелски комплекси, по-скоро считат, че качеството на предлаганата спортно-анимационна дейност е на „добро“ ниво.

В таблица 7 е представена съпоставка на Интегралния коефициент за конкурентоспособност с Крайната потребителска оценка на туристите за качеството на спортно-анимационната дейност за всеки от морските хотелските комплекси.

Таблица 7

*Сравнителен план на Кк с потребителската оценка
за качеството на САД в МХК*

Хотелски комплекс	Коефициент на конкурентоспособност	Получена оценка за качеството на САД
Алфа	0,0453	4,52
Бета	0,0205	3,80
Гама	0,0218	4,28
Делта	0,0180	4,20

С оглед на потребността от идентифициране на степента на значение на факторите, отчитани при определяне на интегралния коефициент на конкурентоспособност на спортния анимационен продукт в морските хотелски комплекси следва да се отчетат и резултатите от анкетните проучвания сред потребителите, които разкриват степента на удовлетвореност и оценката на туристите за качеството на този продукт в различните хотелски комплекси.

Резултатите от извършените анкетни проучвания сочат, че най-висока е оценката за качество на спортния анимационен продукт в хотелски комплекс „Алфа“, а именно 4,52, което е в унисон и със степенуването на изследваните хотелски комплекси чрез интегралните коефициенти на конкурентоспособност на този продукт. Хотелски комплекс „Бета“ се оказва най-ниско оценен от туристите, с оценка 3,80, въпреки че по показателя интегрален коефициент на конкурентоспособност той заема трета позиция. Освен това се забелязва една обратна зависимост, че хотелски комплекс „Бета“ е с 14% по-конкурентоспособен от хотелски комплекс „Делта“, но според субективната оценка за качество на спортно анимационния продукт на анкетираните туристи „Делта“ се нарежда на трето място с оцен-

ка 4,20, което е 0,40 по-високо от оценката за хотелски комплекс „Бета“. Можем да посочим също така, че интегралният коефициент на конкурентоспособност на предлагания спортно анимационен продукт от хотелски комплекс „Алфа“ повече от два пъти превъзхожда този на хотелски комплекс „Гама“, а оценката на туристите за качество на услугата в „Гама“ е 4,28, което е само с 0,24 по-малко от оценката за „Алфа“.

Всичко това ни дава основание да направим извода, че независимо от условията за осъществяване на спортна анимация от голямо значение е субективният фактор, който се свързва преди всичко с качество на обслужване на туристите, желаещи да се възползват от спортно анимационния продукт.

С оглед задълбочаване на анализа на получените резултати от приложената методика за определяне на конкурентоспособността на спортния анимационен продукт в морските хотелски комплекси и субективната оценка на туристите за качеството на предлаганата спортно анимационна услуга беше извършен корелационен анализ. Резултатите показват силна корелационна зависимост (коефициент на корелация 0,71) между субективната оценка на туристите за качеството на услугата и интегралния коефициент на конкурентоспособност, отчитащ обективни фактори като създадените условия на материално-спортната база, разходите извършвани за спортна анимация и др. Въпреки тази силна корелационна зависимост, коефициентът на детерминация е приблизително 0,50, което от своя страна показва, че удовлетвореността на туристите до голяма степен се определя и от субективни фактори, какъвто имаме основания да считаме, че е качественото осъществяване на комплекса от спортно анимационни услуги, а това е тясно свързано с уменията и компетенциите на спортните аниматори.

Заключение

Така получените резултати и извършеният анализ ни дават основание да считаме, че предложения авторски модел за изчисляване на интегрален коефициент на конкурентоспособност на спортния анимационен продукт в морските хотелски комплекси по Българското Черноморие, е приложим. Разработената методиката за изчисляване на ИКК на спортния анимационен продукт, може да обслужва морските хотелски комплекси в дадена туристическа дестинация, на национално или локално равнище. Също така тя може да послужи като инструмент за самооценка на конкурентоспособността на спортния анимационен продукт в морския хотелски комплекси от самите собственици /мениджъри/ и съответно поддържане на определено равнище на качество.

Използвана литература

1. **Желев, С.** Маркетингови изследвания, Университетско издателство „Стопанство”, 2008 г
2. **Porter, M. E.** (1990). The competitive advantage of Nations. New York: Macmillan Business.
3. **Gooroochurn, N. & Sugiyarto, G.** (2005). Competitiveness indicators in the travel and tourism industry. Tourism Economics

МОДЕЛИРАНЕ ДИНАМИКА НА ПОПУЛАЦИИ ЧРЕЗ РАЗКЛОНЯВАЩИ СЕ СТОХАСТИЧНИ ПРОЦЕСИ С ТРИ ТИПА ЧАСТИЦИ

Ас. Антоанела Терзиева
МГУ "Св. Иван Рилски"

Резюме. Разклоняващите се стохастични процеси имат разнообразно приложение в биологията, генетиката, демографията, медицината и т.н.. Разглежда се динамика на популация, която може да се опише с разклоняващ се процес на Белман-Харис с три типа частици. Получени са в явен вид индивидуалните пораждателни функции и от тях някои резултати, зависещи и от вероятностния закон на възпроизводство на частиците

Ключови думи: разклоняващи се стохастични процеси, динамика на популации.

1. Описание на модела

Разглеждаме разклоняващ се процес, представящ развиваща се популация от частици и имащ за пространство на състоянията целите неотрицателни числа. Процесът започва в момент $t=0$ със $\check{Z}(0)$ на брой частици от първи тип, означени като частици от тип T_1 . След случайно дълги периоди от време, приблизително с дължина една година, родначалниците пораждат случаен брой потомци съгласно вероятностния закон $\{p_k\} := P\{\xi = k\}$, $k=0,1,2,\dots$. След като втори път изминат аналогични периоди от време, родначалниците се възпроизвежда отново по същия начин и скоро след това умират. Всички частици в популацията еволюират независимо една от друга.

За краткост вместо "частица от тип T_i " ще казваме " T_i ".

Нека над вероятностното пространство (Ω, F, P) са дефинирани случайните величини τ и ξ . В момента на раждането си всяка частица е T_1 и запазва характеристиките на този тип докато достигне момента, в който поражда поколение. Точно след момента, в който

то T_1 генерира потомство, ние предполагаме, че частицата е преминала в T_2 . И точно след момента, в който T_2 произведе наследници, тя преминава към T_3 . Броят на частиците в момент t е обозначен със $\check{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t), Z_3(t))$, където $Z_i(t)$ е броят на частиците T_i в момент t , $i=1, 2, 3$. Така частиците на $(\check{Z}(t) | \check{Z}(0) = (1, 0, 0); t \geq 0)$ могат да принадлежат към един от три възможни типа. Частиците от първи тип се пораждат от T_1 и T_2 , частиците от втори тип се пораждат от T_1 и частиците от трети тип се пораждат от T_2 .

Нулата е поглъщащо състояние. Ако за някое t е изпълнено $\check{Z}(t) = (0, 0, 0)$, $\check{Z}(t+h) = (0, 0, 0)$ за всяко $h \geq 0$. Първият момент, в който е изпълнено $\check{Z}(t) = (0, 0, 0)$ е моментът на окончателно изчезване на цялата популация. Това е многотипов процес на Белман-Харис.

2. Пораждащи функции

Нека за $i=1, 2$ приемем, че T_i има продължителност на живот равна на случайната величина (сл.в.) τ и в края на живота си с вероятност p_k тя оставя k на брой частици като потомство, $k=0, 1, 2, \dots$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1. \text{ Съгласно казаното по-горе точно след момента, в който } T_i$$

генерира потомство, ние предполагаме, че е преминала в T_{i+1} . По този начин всяка T_i в края на своя живот поражда една T_{i+1} и случаен брой (означен с ξ) частици T_1 съгласно вероятностния закон $\{p_k\} := P\{\xi = k\}$, $i=1, 2$; $k=0, 1, 2, \dots$. T_3 не дава потомство и отново има живот с дължина сл.в. τ .

Нека за краткост в тримерния случай означаваме $\check{s} := (s_1, s_2, s_3)$. Индивидуалната пораждаща функция на процеса $\check{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t), Z_3(t))$ е означена с $\hat{h}(\check{s}) = (h_1(\check{s}), h_2(\check{s}), h_3(\check{s}))$, чиито компоненти дефинираме както следва за $r=1, 2$ и 3 : $h_r(\check{s}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{rk} \check{s}^k$, $|\check{s}| \leq 1$.

Вероятностната пораждаща функция (в.п.ф.) ще означаваме с $F := (F_1, F_2, F_3)$. Ясно е, че $\check{Z}, F, \check{s} \in R_3^+$.. Съгласно теорията представяме компонентите на в.п.ф. по следния начин:

$$F_1(t, \check{s}) = E(s_1^{Z_1(t)}, s_2^{Z_2(t)}, s_3^{Z_3(t)} | \check{Z}(t) = e_1) \quad (1)$$

$$F_2(t, \check{s}) = E(s_1^{Z_1(t)}, s_2^{Z_2(t)}, s_3^{Z_3(t)} | \check{Z}(t) = e_2) \quad (2)$$

$$F_3(t, \check{s}) = E(s_1^{Z_1(t)}, s_2^{Z_2(t)}, s_3^{Z_3(t)} | \check{Z}(t) = e_3) \quad (3)$$

Съгласно казаното по-горе T_3 не дава поколение и следователно:

$$F_3(t, \check{s}) = \begin{cases} 1 & \tau_3 > t \\ 0 & \tau_3 \leq t \end{cases} \quad (4)$$

Твърдение 1.

Компонентите на индивидуалната пораждаща функция $\hat{h}(\check{s})$ на процеса $\check{Z}(t)$ удовлетворяват следните уравнения:

$$h_1(\check{s}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s_1^k s_2, |\check{s}| \leq 1 \quad (5)$$

$$h_2(\check{s}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s_1^k s_3, |\check{s}| \leq 1 \quad (6)$$

$$h_3(\check{s}) \equiv 1, |\check{s}| \leq 1 \quad (7)$$

Доказателство. Твърдението следва непосредствено от дефиницията на индивидуална пораждаща функция на разклоняващ се процес, приложена спрямо характеристиките на разглеждания тук модел $\Rightarrow$ (Твърдение 1).

Съгласно основното свойство на разклоняващите се процеси за преходните вероятности е в сила:

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j = \left(\sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(t) s^j \right)^i \quad (8)$$

Ето защо е достатъчно да разгледаме случая, когато в началния момент, който означаваме с t_0 , имаме точно една новородена частица и тя се явява прародител на всички останали частици. Останали-

те случай се свеждат към него.

Забележка. Процес, започнал с една T_2 в начален момент t_0 би могъл да се сведе до аналогичен процес, започнал с една T_1 в начален момент $t_0 - \tau$ и тя е имала нулево поколение. Проблемът е, че τ е случайна величина.

Можем да приемем, че T_1, T_2 и T_3 са с една и съща продължителност на живота $\tau \in N(365, 1)$. За $i=1, 2, 3$ функциите на разпределение са еднакви: $G(t) := G_i(t) = P(\tau \leq t)$.

Означаваме $m_{ij}(t) = E(Z_j(t) | Z_0 = e_i)$, това е очакваният брой генерирани потомци от тип j , живеещи в момента t , ако в началния момент процесът започва точно с една T_i . Съответно $U(t) = \|m_{ij}(t)\|$ е матрицата, съставена от очакванията в момент t . Съгласно приетите в литературата означения $\|A\| := \max(|a_{ij}|; i=1, 2, \dots, l, j=1, 2, \dots, n)$ за всяка $l \times n$ -мерна матрица A и цели положителни числа l и n .

Нека с M означим матрицата от очакваните наследници на T_i , $i=1, 2, 3$ точно за едно поколение, асоциирана с многомерната индивидуална пораждаща функция $\hat{h}(\xi)$. За $i, j = 1, 2, 3$ ще означим с m очаквания брой наследници T_j на T_i за $i = 1, 2$. Следователно

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} p_k k.$$

Твърдение 2.

Матрицата M има вида:

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Доказателство. Непосредствено от дефиницията на индивидуална пораждаща функция на разклоняващ се процес за елементите $m_{ij}; i, j = 1, 2, 3$ на матрицата M е изпълнено:

$$m_{ij} = \left. \frac{\partial h_i}{\partial s_j} \right|_{s=(1,1,1)}$$

От горното уравнение и от уравненията (5),(6),(7) на Твърдение 1 непосредствено се вижда, че за матрицата M на разглеждания процес $\tilde{Z}(t)$ е изпълнено уравнение (9) $\Rightarrow$ (Твърдение 2).

Съгласно теорията ако $\|M\| < \infty$, то $\|U(t)\|$ е ограничена върху крайни интервали и $U(t)$ удовлетворява матричното уравнение

$$U^t(t) = D[1 - G(t)] + \int_0^t U^t(t-y)M^t d[G(y)] \quad (10)$$

Където с $D[x]$ е означена диагонална матрица, при която на i -тото място по диагонала стои x_i , и с $d[G(y)]$ - диагонална матрица с $d[G_i(y)]$ на i -то място.

Да припомним, че $\Phi(x)$ е функцията на Лаплас,

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du; \lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = 1$$

От литературата е известно [6], че общият вид на едно линейно интегрално уравнение има вида :

$$g(t)\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_{a(t)}^{b(t)} K(t,u)\varphi(u)du \quad (11)$$

за някоя комплексна константа λ .

При $a(t) \equiv a$, $b(t)=t$ това уравнение се свежда до интегрално уравнение на Волтера и за $g(t) \equiv 1$ има вида:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,u)\varphi(u)du \quad (12)$$

Твърдение 3.

За матрицата от математическите очаквания в произволен момент t $U(t) = \|m_{ij}(t)\|$; $i, j = 1, 2, 3$, можем да получим в явен вид

$m_{ij}(t)$, които са решения на една система линейни интегрални уравнения на Волтера.

Доказателство. От казаното по-горе е очевидно, че транспонираната на $U(t)$ има вида:

$$U^t(t) = \begin{pmatrix} m_{11}(t) & m_{21}(t) & 0 \\ m_{12}(t) & m_{22}(t) & 0 \\ m_{13}(t) & m_{23}(t) & 1-G(t) \end{pmatrix} \quad (13)$$

Разглежданото по-горе уравнение (10) е изпълнено и представлява в случая матричен запис на една система от девет интегрални уравнения. Последователно за $U^t(t)$ получаваме:

$$U^t(t) = \begin{pmatrix} 1-G(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1-G(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1-G(t) \end{pmatrix} + \\ + \int_0^t U^t(t-y) \begin{pmatrix} m & m & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dG(y) & 0 & 0 \\ 0 & dG(y) & 0 \\ 0 & 0 & dG(y) \end{pmatrix}$$

Стандартните означения за елементите на матрицата $U(t)$ са $u_{ij}(t)$. Ще ги използваме за повече яснота при опасност от евентуално погрешно смесване на $m_{ij}(t)$ с очакваното m .

$$U^t(t) = D[1-G(t)] + \\ + \int_0^t \begin{pmatrix} mu_{11}(t-y) + u_{21}(t-y) & mu_{11}(t-y) + u_{31}(t-y) & 0 \\ mu_{12}(t-y) + u_{22}(t-y) & mu_{12}(t-y) + u_{32}(t-y) & 0 \\ mu_{13}(t-y) + u_{23}(t-y) & mu_{13}(t-y) + u_{33}(t-y) & 0 \end{pmatrix} dG(y) \\ U^t(t) = D[1-G(t)] + \\ + \int_0^t \begin{pmatrix} u_{11}(t-y) & u_{11}(t-y) & 0 \\ u_{12}(t-y) & u_{12}(t-y) & 0 \\ u_{13}(t-y) & u_{13}(t-y) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{21}(t-y) & u_{31}(t-y) & 0 \\ u_{22}(t-y) & u_{32}(t-y) & 0 \\ u_{23}(t-y) & u_{33}(t-y) & 0 \end{pmatrix} d[G(y)]$$

$$\begin{aligned}
U^t(t) &= \begin{pmatrix} 1-G(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1-G(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1-G(t) \end{pmatrix} + \\
&+ m \int_0^t \begin{pmatrix} u_{11}(t-y) & u_{11}(t-y) & 0 \\ u_{12}(t-y) & u_{12}(t-y) & 0 \\ u_{13}(t-y) & u_{13}(t-y) & 0 \end{pmatrix} d[G(y)] + \\
&\int_0^t \begin{pmatrix} u_{21}(t-y) & u_{31}(t-y) & 0 \\ u_{22}(t-y) & u_{32}(t-y) & 0 \\ u_{23}(t-y) & u_{33}(t-y) & 0 \end{pmatrix} d[G(y)]. \\
\text{От } u_{ij}(t) = m_{ij}(t) \text{ и } d[G(y)] &= \begin{pmatrix} dG(y) & 0 & 0 \\ 0 & dG(y) & 0 \\ 0 & 0 & dG(y) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

непосредствено получаваме:

$$m_{11}(t) = 1 - G(t) + m \int_0^t m_{11}(t-y) dG(y) + \int_0^t m_{21}(t-y) dG(y)$$

$$m_{21}(t) = m \int_0^t m_{11}(t-y) dG(y) + 0$$

$$m_{31}(t) = 0$$

$$m_{12}(t) = m \int_0^t m_{12}(t-y) dG(y) + \int_0^t m_{22}(t-y) dG(y)$$

$$m_{22}(t) = 1 - G(t) + m \int_0^t m_{12}(t-y) dG(y) + 0$$

$$m_{32}(t) = 0$$

$$m_{13}(t) = m \int_0^t m_{13}(t-y) dG(y) + \int_0^t m_{23}(t-y) dG(y)$$

$$m_{23}(t) = m \int_0^t m_{13}(t-y) dG(y) + \int_0^t m_{33}(t-y) dG(y)$$

$$m_{33}(t) = 1 - G(t)$$

Изваждаме петото уравнение от четвъртото:

$$m_{12}(t) - m_{22}(t) = G(t) - 1 + \int_0^t m_{22}(t-y) dG(y) \quad (14)$$

Изваждаме 8-мо от 7-мо и след това заместваме 9-то уравнение в така полученото:

$$m_{13}(t) - m_{23}(t) = \int_0^t m_{23}(t-y) dG(y) - G(t) + G(0) + \int_0^t G(t-y) dG(y)$$

Изключваме вероятността за мъртвородени частици, т.е. $G(0+) = 0$ и получаваме:

$$m_{13}(t) - m_{23}(t) = \int_0^t m_{23}(t-y) dG(y) - G(t) + \int_0^t G(t-y) dG(y) \quad (15)$$

За стойностите на функцията на Лаплас $\Phi(x)$ има съставени таблици и е изпълнено :

$$G(t) = G_i(t) := P(\tau \leq t) = \Phi(t - 365) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x-365} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

В (14) след полагане $(t-y)=u$ получаваме:

$$m_{12}(t) - m_{22}(t) = G(t) - 1 + \int_0^t m_{22}(t-y) dG(y) =$$

$$= \Phi(t - 365) - 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(t-u-365)^2}{2}} m_{22}(u) du$$

$$m_{22}(t) = m_{12}(t) + 1 - \Phi(t - 365) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(t-u-365)^2}{2}} m_{22}(u) du$$

Горното уравнение е уравнение на Волтера. След като извадим второто уравнение от първото получаваме аналогично у-е на Волтер(а) за m_{11} и m_{21} .

Исходната система от девет интегрални уравнения е система от уравнения на Волтера.

$\Rightarrow$ (Твърдение 3).

Библиография

[1] Athreya K.B., Ney P.E.. Branching processes. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1972).

[2] Mitov K., Yanev N.. Branching Stochastic Processes: Regulation, Regeneration, Estimation, Applications, (2008)

[3] Mode Ch.J.. Multitype Branching Processes. Theory and applications. American Elsevier Publishing Company, Inc. New York, (1971)

[4] Славчова-Божкова М., Янев Н.. Разклоняващи се стохастични процеси. УИ "Св. Климент Охридски", 2008.

[5] Vatutin V.. Branching Bellman-Harris processes, Lekts. Kursy NOC, 12, Steklov Math. Inst., RAS, Moscow, (2009), 3-111

http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jmid=lkn&paperid=12&option_lang=eng

[6] Bronstein, Semendjajew, Musiol, Muehling. Taschenbuch der Mathematik

ПРЕДПОСТАВКИ ЗА ПРИЛАГАНЕ МЕТОДИТЕ НА ИКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОТО МОДЕЛИРАНЕ ПРИ ОПТИМИЗИРАНЕТО НА БИЗНЕС ПРОЦЕСИ

Ас. Невена Господинова
Икономически университет – Варна

Резюме. Концепцията за оптимизиране на бизнес процесите добива все по-голяма значимост и актуалност в съвременните икономически условия. За организациите, постигащи добро управление на процесите, е характерно по-бързото приспособяване към динамиката на средата. В тази връзка, в настоящата разработка се изследват предпоставките за прилагане методите на икономико-математическото моделиране при количествения анализ и усъвършенстването на бизнес процесите в съвременното предприятие.

Ключови думи: бизнес процес, предприятие, управление, оптимизация, икономико-математическо моделиране.

В съвременната икономическа реалност успехът на предприятията до голяма степен зависи от възможността им да реагират бързо и адекватно на динамичните промени в средата. В условията на пазарни отношения за всяка организация е от жизненоважно значение постигането на определено ниво на конкурентоспособност. Актуалността на концепцията за оптимизиране на бизнес процесите, протичащи в предприятията, се обуславя преди всичко от нейната значимост за компаниите във връзка с оцеляването им в силно конкурентните икономически условия.

Целта в настоящия доклад е да се изследват предпоставките за прилагане методите на икономико-математическото моделиране в насока оптимизиране на бизнес процесите в съвременното предприятие.

Известно е, че същността на процесно-ориентирания подход се състои в оптимизиране на корпоративното управление и способ-

ността за гъвкаво реагиране на измененията във външната среда¹. При това се постигат следните ключови предимства²:

- по-ниски разходи и по-кратки производствени цикли чрез ефективно използване на ограничените ресурси;
- по-добри, последователни и предвидими резултати;
- възможности за приоритетно усъвършенстване дейността на организацията.

В специализираната литература съществуват много дефиниции за понятието “бизнес процес”. Като фундаментално се е утвърдило определението в стандарта ISO 9001, представящо бизнес процеса като съвкупност от взаимосвързани дейности, които използват ресурси за трансформирането на входовете в изходи³. В тази дефиниция се поставя акцент върху това, че бизнес процесите представляват дейности, подлежащи на стандартизация, свързани с осигуряване получаването на предварително зададен изход от определени входни данни. При това се стандартизира както наборът от изпълнявани действия, така и тяхната последователност.

Основният критерий за класификация на бизнес процесите ги групира от гледна точка на съответствието им с веригата на стойността на М. Портьър⁴. Според това дали добавят стойност те се делят на първични (основни) и поддържащи (спомагателни). Първичните процеси добавят ценност и са в основата на създаването на готовите продукти. Те засягат цялото предприятие, започвайки от доставчиците и завършвайки с потребителите. Поддържащите процеси не създават непосредствено добавена ценност, но увеличават себестойността на произвежданото изделие. Протичането на тези процеси не засяга основния продукт, но по този начин се създават

¹ Козлова, А. Особенности процессного подхода при управлении бизнесом. Вестник Оренбургского государственного университета №13 (132) / 2011, с. 228.

² ISO 9001:2008 - Quality Management Principles. http://www.iso.org/iso/home/standards/management-standards/iso_9000.htm (юли, 2015).

³ ISO 9001:2015 Definition. <http://www.praxiom.com/iso-definition.htm> (юли, 2015).

⁴ Porter, M. Competitive Advantage: Creating and Sustaining Superior Performance. New York, The Free Press, and London, Macmillan Publishers, 1985, p. 36-53.

ресурси за основните процеси, поради което те са необходими за изпълнението на последните.

Към основните бизнес процеси, като правило, се отнасят процесите на производство, търговия и снабдяване, т.е. това са всички процеси, добавящи ценност в хода на създаването на основния продукт (услуга):

- осигуряване на дейността на предприятието – осигуряване на материали, планиране на поръчките, съхраняване на продуктите, транспорт;
- производствени процеси – производство, опаковане на продукта, техническо обслужване на оборудването;
- осигуряване на продажби – доставка до клиента, обработване на поръчките, обслужване;
- маркетинг – покупко-продажба на продукта, рекламна стратегия, анализ на удовлетвореността на клиентите и др.

Към спомагателните бизнес процеси могат да се отнесат поддръжката на инфраструктурата, техническата поддръжка, информационното осигуряване, управлението на персонала, документооборотът и др. Очевидно е, че разделянето на процесите на основни и спомагателни до голяма степен е условно и се определя от спецификата на дейността на конкретното предприятие.

Важна концепция, свързана с бизнес процесите и получаваща все по-голямо разпространение, е радикалното им реструктуриране – реинженеринг. Той се свързва с фундаменталното преосмисляне и препроектиране на процесите в предприятията с цел постигане на радикални подобрения в ключови показатели за тяхната дейност: цена, качество и услуги⁵. Основната задача на реинженеринга е реструктурирането на бизнес процесите по такъв начин, че да се максимизира добавената ценност, а останалите показатели да се

⁵ Хаммер, М., Дж. Чампи. Реинженеринг корпорации: Манифест революции в бизнесе. Пер. с англ. — СПб.: Издателство С.-Петербургского университета. 1997.

минимизират. Следва да отбележим, че стремежът на предприятията в този контекст е насочен към:

- системно реорганизиране на материалните, финансовите и информационните потоци с цел преразпределение и рационално използване на наличните ресурси;
- съкращаване на производствените цикли, разходите и времето за удовлетворяване на потребителските изисквания;
- повишаване на качеството на обслужване като цяло.

Необходимо е да се посочи, че за организациите, които съумяват да постигнат добро управление и реинженеринг на бизнес процесите, е характерно по-бързото и успешно приспособяване към динамиката на променящата се икономическа среда.

Според нас основната причина, насърчаваща предприятията да подходят в своето развитие към управление на бизнес процесите, е стремежът поръчките да се изпълняват надеждно, по-бързо от конкурентите, при ниски разходи. При това следва на основата на определен набор от критерии постоянно да се оценява ефективността на процесите, а на база анализа на получените данни да се разработват и провеждат мероприятия за подобряването и оптимизирането им. В този контекст считаме, че за целите на количествения анализ на бизнес процесите особена роля могат да изпълняват оптимизационните икономико-математически модели.

Известно е, че икономико-математическото моделиране представлява процес на построяване, верификация, интерпретация и използване на математически модели за решаването на изследователски или приложни задачи в областта на икономиката⁶. В контекста на настоящата разработка тези модели следва да се възприемат като концептуални инструменти, ориентирани към задълбочен анализ на изследваните бизнес процеси с цел оптималното им управление.

Основният резултат от прилагането на оптимизационните ико-

⁶ Клейнер, Г. Экономико-математическое моделирование и экономическая теория. Журнал «Экономика и математические методы», 2001, т. 37, № 3, с. 3.

номико-математически модели е възможността за осъществяване на оптимален избор, който се състои в намирането на най-добрия план от многото възможни. При това най-доброто разпределение на ресурсите се извършва в зависимост от избран критерий за оптималност⁷, съответстващ на икономическите цели на предприятието. Като цяло търсенето на оптимални решения в този контекст може да бъде сведено до две основни постановки на задачите:

- получаване на даден икономически ефект при минимални разходи;
- получаване на максимален ефект при зададени ограничени ресурси.

Предимствата на моделирането се състоят в това, че се отделят най-важните характеристики на изследвания процес, които се отразяват в модела, като по този начин се определят главните тенденции за развитието му. На тази база, чрез по-нататъшното усъвършенстване на бизнес процеса, се постига повишаване степента на удовлетвореност на потребителите и оптимизация на процеса по установени критерии.

В заключение бихме могли да обобщим, че стремежът за получаване на по-добри резултати от дейността на предприятията изисква провеждането на дълбок анализ на бизнес процесите с цел разработване на ефективни решения. В тази връзка считаме, че анализът и моделирането на бизнес процесите представляват важен инструмент за повишаване ефективността на бизнеса на база реорганизация на процесите в направления съкращаване на разходите за производство на продукти и услуги, оптимално използване на оборотния капитал и др. Процесите в съвременните предприятия следва да се разглеждат като обекти на постоянно реструктуриране и управление. Те се характеризират с висока степен на комплицираност и

⁷ Такива критерии могат да бъдат приходите, рентабилността, разходите и др., т.е. оптимален е този план, който осигурява, например, максимална печалба или минимални разходи.

многоаспектност, което налага необходимостта от разработването и прилагането на специфичен инструментариум за тяхното изследване. Според нас една добра възможност за анализ и усъвършенстване на бизнес процеси се предоставя от методите на икономико-математическото моделиране. В следващи разработки на автора ще бъде направен опит за доразвиване на изследваната проблематика чрез конструиране на подходящи икономико-математически модели.

Секция III

МЕТОДИЧЕСКИ ПРОБЛЕМЫ ПРИ ОБУЧЕНИИ ПО МАТЕМАТИКА

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ: ЭФФЕКТЫ И РИСКИ

*Профессор, доктор педагогических наук, Мария Шабанова
Северный (Арктический) федеральный университет имени
М.В. Ломоносова*

Резюме. Экспериментальная математика - новая область современной математики. Главной ее особенностью является получение результатов с помощью компьютерных экспериментов. Эксперименты, проводимые в компьютерной среде, открыли дорогу не только новым результатам в науке, но и исследовательскому подходу в обучении математике. Цель данной статьи показать, что компьютерные эксперименты – источник не только новых возможностей, но и новых проблем для математического образования. Наиболее опасные риски: утрата учащимися способности к теоретическому поиску, мотивов и навыков дедуктивных рассуждений и навыков построения циркулем и линейкой.

Ключевые слова: экспериментальная математика, исследовательское обучение математике, компьютерный эксперимент, системы динамической геометрии.

В последние годы все чаще говорят о развитии нового направления в математике, особенностью которого является широкое использование возможностей компьютерной техники для экспериментирования с математическими объектами, а точнее с их виртуальными моделями. Методологические особенности исследований в данной области раскрыты в трудах

основоположников данного направления Дж. Борвей и Д. Бейли [1]. Представления о специфике задач экспериментальной математики, можно получить из публикаций, представленных журнале «Experimental Mathematics» [2], который начал издаваться в Нью-Йорке с 1992 года.

Благодаря появлению программного обеспечения для постановки и проведения компьютерных экспериментов, адаптированных к возможностям любителей математики и обучающихся, методология экспериментальной математики стала проникать в область математического образования. Она используется для:

- постановки и обобщения олимпиадных задач (ярким примером являются интересные обобщения, опубликованные в монографии Р. Манчески, С. Гроздева и К. Аневск [3]);

- решения исследовательских задач учащимися во внеучебной деятельности (примеры таких работ можно найти в сборниках материалов ученической конференции «Исследовательская деятельность учащихся в области математики, прикладной математики и информатики [4]);

- организации турниров по экспериментальной математике для учащихся разных возрастов (в качестве примера можем привести турнир, организованный в рамках Российско-Болгарского проекта «Методики и информационные технологии в образовании» на базе САФУ имени М.В. Ломоносова [5]).

Наиболее проблемным является применение методологии экспериментальной математики для реализации исследовательского подхода к обучению математике в общеобразовательной школе.

На выявление этих проблем и путей их решения направлен Российско-Болгарский проект «Методики и информационные технологии в образовании (MITE)», руководителями которого являются Сава Гроздев (Болгария) и Татьяна Сергеева (Россия). Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова принимает участие в реализации этого проекта с

2010 года. На официальном сайте проекта представлены результаты, полученные участниками проекта из Архангельской области [6].

В этой статье мы хотим, во-первых, обозначить основные эффекты и риски, связанные с переносом методологии экспериментальной математики в условия образовательной практики, а, во-вторых, опираясь на опыт учителей-экспериментаторов, дать некоторые рекомендации по профилактике возникновения этих рисков при обучения в стиле экспериментальной математики.

1. Формирование опыта исследовательской деятельности в области математики и риск деформации исследовательского стиля

До не давнего времени считалось, что математика, как образовательная область, закрыта для организации исследовательского обучения, а, следовательно, не может рассматриваться как предметная основа формирования опыта исследовательской деятельности учащихся.

Приведем в доказательство цитату из доклада «Научное образование сегодня: новая педагогика для будущего Европы» члена Европейского парламента и бывшего премьер-министра Франции Мишеля Рокара:

“In mathematics teaching, the education community often refers to “Problem-Based Learning” (PBL) rather than to IBSE. In fact, mathematics education may easily use a problem based approach while, in many cases, the use of experiments is more difficult. Problem-Based Learning describes a learning environment where problems drive the learning. That is, learning begins with a problem to be solved, and the problem is posed in such a way that children need to gain new knowledge before they can solve the problem. Rather than seeking a single correct answer, children interpret the problem, gather needed

information, identify possible solutions, and evaluate options and present conclusions.” [7]

Дело в том, что научные представления об исследовательском обучении тесно связываются с возможностью освоения учащимися экспериментального способа познания, который считается нехарактерным для математики. Следует заметить, что, экспериментальные методы применялись на всем протяжении истории развития математической науки, однако экспериментирование с математическими объектами чаще всего носило умозрительный характер, что говорит в пользу отнесения мысленного эксперимента скорее к теоретическим, чем к экспериментальным методам. Появление компьютерных средств (систем динамической геометрии: Cabri, Geometry Sketchpad, GeoGebra и др.), для создания динамических изображений математических объектов и проведения компьютерных экспериментов устранило все преграды для реализации исследовательского подхода в обучении математике.

Учащиеся получили возможность проверять существование математических объектов с заданными свойствами построением их виртуальных моделей, устанавливать свойства, инвариантные относительно заданной динамики изменения параметров модели, исследовать характер зависимости одних свойств модели от других, контролировать аналитические выкладки компьютерными расчетами, верифицировать выдвинутые гипотезы экспериментальными данными, ставить новые задачи на базе решенных, модифицируя исследовательскую модель. Все это служит основой для формирования опыта исследовательской деятельности математика-экспериментатора. Однако при этом возникает риск деформации стиля математического мышления учащихся – освоение экспериментального подхода в отрыве от теоретического.

Экспериментальный подход к познанию окружающего мира является врожденным, реализация представленных возможностей

лишь переносит его в область математических абстракций, но не обогащает его теоретическим подходом. Более того, нами экспериментально установлено, что его привлекательность настолько сильна, что даже учителя математики с большим стажем работы быстро отказываются от применения более трудных теоретических методов при собственном решении задач и объяснении нового материала школьникам.

Для снижения данного риска, по нашему мнению, желательно насытить школьную программу задачами, решение которых делает экспериментальный поиск бесполезным, или требует привлечения теоретических соображений для его реализации. Приведем примеры таких задач.

Пример 1. Существуют ли нетождественные нулю функции, композиция которых тождественна нулю? Если существуют, то каковы ориентиры для подбора таких пар функций?

Решение данной задачи начинается с перебора пар известных функций, т.е. с мысленного эксперимента. Результатом этой работы является обнаружение примеров, положительно решающих вопрос о существовании. Например, $y = [x]$ и $y = \{x\}$. Следующий этап – это попытки сконструировать для каждой известной функции парную известными учащимся способами: сужением естественной области определения или созданием кусочно-заданной функции. Результатом этой работы является обнаружение функций, для которых сконструировать парную функцию не удалось. Например, $y = x^2$. Это направляет мысль на собственно теоретический поиск, поиск необходимых и достаточных условий, обеспечивающих возможность подбора парной функции: $y(0) = 0$, $E_f \neq R$, $\exists x_0 \neq 0: y(x_0) = 0$.

Пример 2. Найти геометрическое место точек (ГМТ) равноудаленных от данной окружности и точки.

Решение этой задачи требует от учащихся предварительного генерирования определения понятия «расстояние от точки до

окружности» с учетом различного взаимного расположения данной точки и окружности. Затем, им необходимо придумать способ построения точки, принадлежащей искомому ГМТ, который может быть реализован при создании конструктивного инструмента программы (рис.1). И только после этого ими может быть проведен эксперимент, позволяющий выдвинуть гипотезы о виде ГМТ и зависимости вида ГМТ от взаимного расположения точки и окружности.

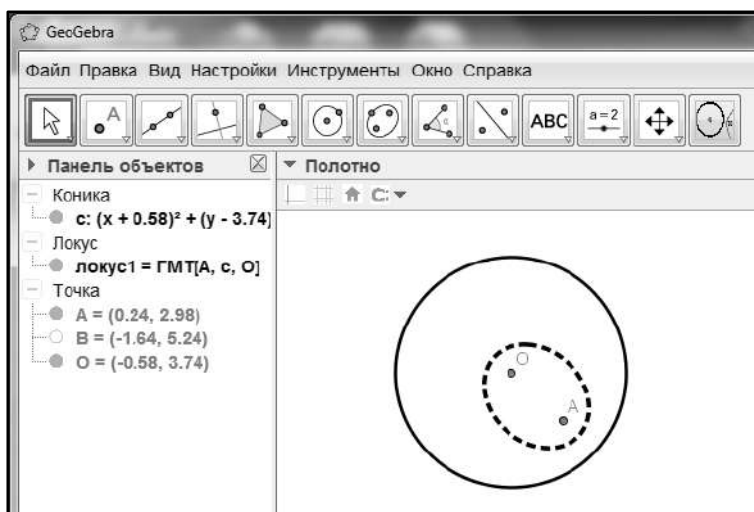


Рис. 1. Инструмент «ГМТ, равноудаленных от точки и окружности»

2. Расширение математического кругозора учащихся и риск утраты потребности к дедуктивному обоснованию математических утверждений

Средства экспериментальной математики в науке наиболее часто привлекаются к решению тех задач, попытки решения которых аналитическими методами долгое время оставались безуспешными. Яркими историческими примерами этого являются:

- гипотеза о Четырех красках, сформулированная Ф. Гутни в 1852 г., верифицированная («компьютерно доказанная»)

К. Аппелем и В. Хакеном в 1976 г., затем Н. Робертсоном, Д. Сандерсом, Р. Сеймуром и Р. Томасом в 1995; последнее доказательство проверено Дж. Гонтир в 1998 г.;

- гипотеза Кеплера об оптимальной плотности упаковки шаров, сформулированная в 1611 г., доказанная с применением компьютерных средств Т. Халесом в 1998 г. с последующей проверкой представленного доказательства, которая продолжалась до 2005 г.

Подобное использование компьютерных средств особенно соблазнительно в педагогических ситуациях, когда учителям недостаточно учебного времени или уровня базовой математической подготовки учащихся для представления дедуктивного доказательства утверждения. Компьютерные динамические визуализации не только делают утверждения легко воспринимаемыми, но и убеждают учащихся в их истинности.

Пример 3. Теорема о сумме углов треугольника

Учитель просит детей изобразить в GeoGebra произвольный треугольник, измерить его углы и создать на панели объектов функцию, вычисляющую их сумму (рис. 2). Он просит нескольких учащихся сообщить ему результат вычисления суммы углов треугольника. Затем просит всех убедиться в справедливости гипотезы, проведя эксперимент со свободным перемещением вершин построенного треугольника, изменением в каждой серии экспериментов настроек точности отображения данных. Для того чтобы развеять последние сомнения и скорректировать формулировку утверждения он просит найти и прочитать теорему в учебнике.

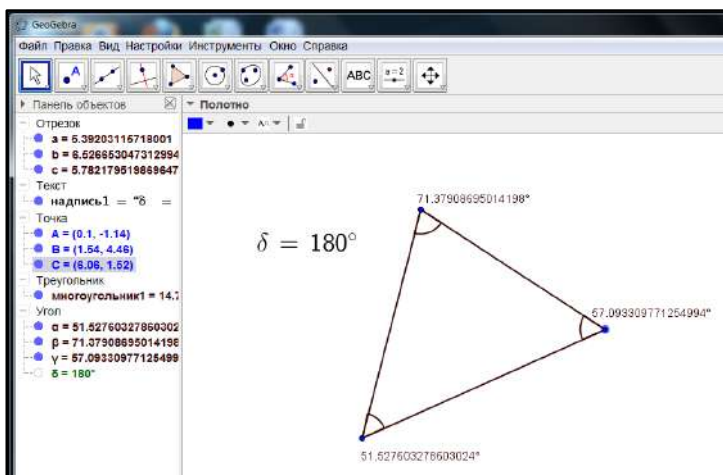


Рис. 2. Компьютерная визуализация теоремы о сумме углов треугольника

Психологические критерии убедительности, к которым учитель обращался в представленном сценарии сродни тем, которые использовались в древнем Египте и Индии: авторитетный источник и наглядность. Однако, массовость полученных таким образом экспериментальных данных и степень их согласованности столь высока, что создается иллюзия превалирования этих критериев над дедуктивным доказательством. Ситуация усугубляется низким уровнем строгости представляемых в некоторых учебниках дедуктивных выводов данного утверждения, искусственностью предлагаемых дополнительных построений.

Несмотря, на очевидность опасности, частого обращения к таким сценариям для формирования потребности и навыков дедуктивных доказательств, учителя часто злоупотребляют ими. Свои действия они объясняют тем, что введение математических утверждений посредством компьютерных визуализаций и контрольных экспериментов позволяет:

- экономить учебное время, высвобождая его для обучения решению задач;
- значительно расширить спектр известных учащимся опорных

утверждений без существенной потери учебного времени;

- расширить математический кругозор учащихся за счет ознакомления с красивыми утверждениями, которые ранее могли быть включены в программу лишь школ и классов с углубленным изучением математики.

Уменьшению обозначенных рисков, на наш взгляд будут способствовать несколько профилактических мероприятий:

- демонстрация везде, где это возможно, неполной согласованности экспериментальных данных (рис 3);

- представление зависимости выводов от степени адекватности модели объекту исследования;

- расширение представлений учащихся о спектре функций дедуктивных рассуждений в математике: объяснение экспериментально установленных фактов, систематизация утверждений, логический контроль алгоритмов деятельности и т.п.

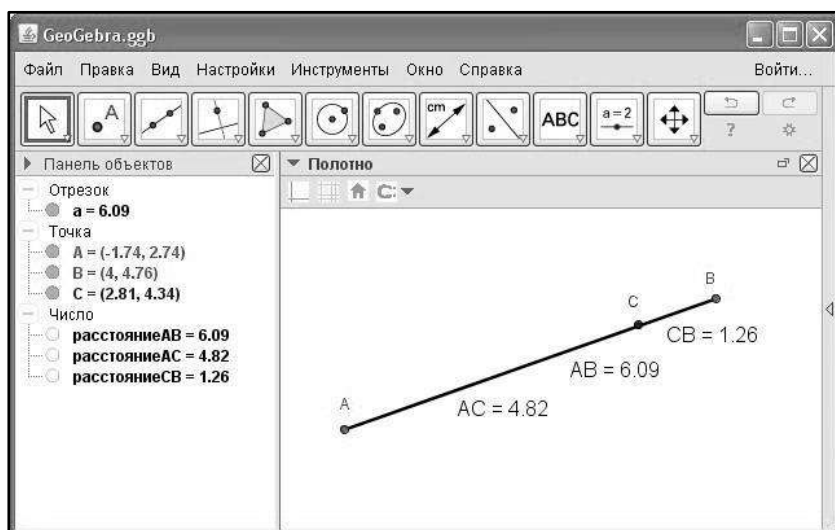


Рис. 3. Пример наличия выбросов среди данных компьютерного эксперимента

3. Помощь математическому видению учащихся и риск деградации визуального мышления

Системы динамической геометрии часто привлекаются к образовательному процессу не только для обеспечения возможности организации исследовательского обучения, но и в качестве средств создания динамической наглядности, которая позволяет компенсировать недостаток развития способности учащихся к математическому видению.

Так, например, разработчики программного продукта 1С: Математический конструктор включают в комплект электронных образовательных ресурсов не только саму среду, но и коллекцию готовых динамических листов, анимаций для постановки задач, а также наглядного представления аксиом и теорем. Подобные коллекции размещены и на официальных сайтах аналогичных программных продуктов [8], [9], а также в блогах учителей математики [10], [11], на сайтах профессиональных сообществ [12].

Динамическая наглядность, в отличие от статической, позволяет учащимся преодолеть сложившиеся стереотипы воображения, обнаружить множественность и многовариантность ситуаций, определяемых условием задачи, сделать видимой динамику реконструкции образов объекта исследования в ходе решения задачи.

Приведем конкретный пример, иллюстрирующий преимущества динамической наглядности над статической.

Пример 4. ABCD - параллелограмм, $AB = 1$, $BC = 2$, а угол ABC - тупой. BE и DF перпендикулярны BC, BF и DE – стороне BC. Найти площадь параллелограмма BFDE, подобного ABCD.

Стереотипным для учащихся является образ, представленный рисунком 4.

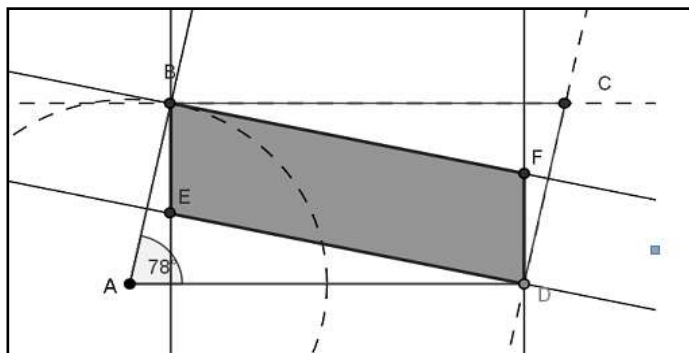


Рис. 4. Стереотипный образ задачной ситуации

Использование стереотипного чертежа приводит к уравнению: $\frac{1}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2 - \cos \alpha}$, где $\alpha = \widehat{ABC}$. Результат решения этого уравнения противоречит условию «угол ABC – тупой». Обнаружить другую возможность образного представления задачной ситуации помогает динамический чертеж (рис. 5).

Однако, увлечение учителей использованием готовой динамической наглядности, как показали проведенные нами исследования, негативно сказывается на развитии собственного визуального мышления учащихся. Понятие визуального мышления было введено в научный оборот Р. Арнхеймом [13]. Визуальное мышление он определил как невербальное (не языковое) мышление, которое направлено на переработку информации, полученной от зрительных каналов восприятия. Несмотря на то, что математика имеет дело с абстракциями, высокий уровень развития визуального мышления имеет большое значения для математической деятельности и успешного овладения математикой. Этот факт убедительно доказан исследованиями В.А. Далингера [14]. В своей монографии В.А. Далингер показывает, что визуальное мышление выполняет в математической деятельности ряд важнейших операций: подбор зрительных образов для оказания помощи вербальному мышлению, создание чувственно не воспринимаемых образов или их частей под воздействием информации, хранящейся в

памяти, упорядочивание, оценка и переоценка значимости образов, варьирование их структуры, перекодирование образов и др.

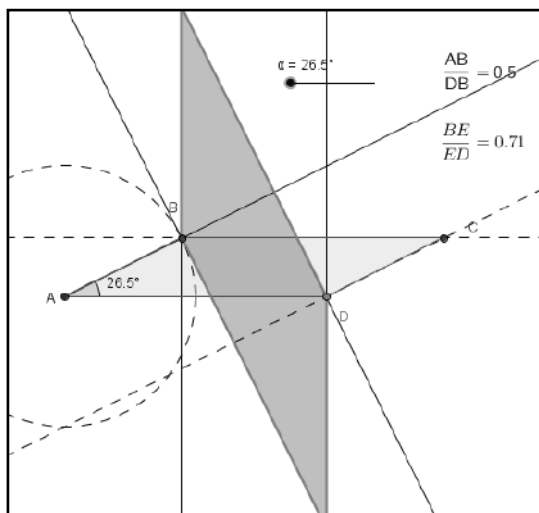


Рис. 5. Динамический чертеж для выделения ситуаций, соответствующих условию задачи

Снижению риска деградации визуального мышления, на наш взгляд, способствует уменьшение доли готовых динамических изображений в системе средств обучения математике. Замещение их заданиями на самостоятельного создание динамических визуализаций и постановка задач, требующих внесения изменений в готовый динамический чертеж для решения задачи: изменения набора скрываемой части элементов, введение дополнительных построений, варьирование динамики изменений чертежа.

4. Формирование навыков компьютерного моделирования математических объектов и риск утраты навыков построения классическими конструктивными инструментами.

Системы динамической геометрии обладают богатым набором инструментов для построения моделей геометрических объектов и

геометрической интерпретации математических объектов иной природы. Они удобны и просты в использовании. Так, например, для построения графика функции достаточно записать ее уравнение в строке ввода. Для построения правильного многоугольника достаточно указать две его соседние вершины и общее количество вершин. Кроме того, большинство программ этого класса допускают создание собственных инструментов на базе уже выполненных построений. Один из таких инструментов представлен на рисунке 1. Однако, набор инструментов среды, не исчерпывает многообразие всех учебных объектов, поэтому наиболее часто визуализация объектов изучения требует построения собственных динамической моделей с использованием комплекса инструментов. Создание таких моделей в большинстве своем требует от учащихся знаний определений и признаков математических понятий.

Пример 5. Построить график производной функции $y = f(x)$, представленной своим графиком.

Решение задачи начинается с построения точки D, принадлежащей графику производной функции и опирается на знания учащихся о том, что координатами такой точки являются: $(x_0; tg\alpha)$, где α - угол наклона касательной к графику функции в точке A с абсциссой x_0 (рис. 6).

Идея состоит в построении вспомогательной точки C с координатами $(1; tg\alpha)$ как точки пересечения прямой, параллельной касательной к графику функции и проходящей через начало координат, и прямой, заданной уравнением: $x = 1$. После того, как точка D построена, достаточно задать для нее опцию «оставлять след» и перемещать точку A по графику заданной функции. График производной получается как след движения точки D. Можно также воспользоваться инструментом «локус».

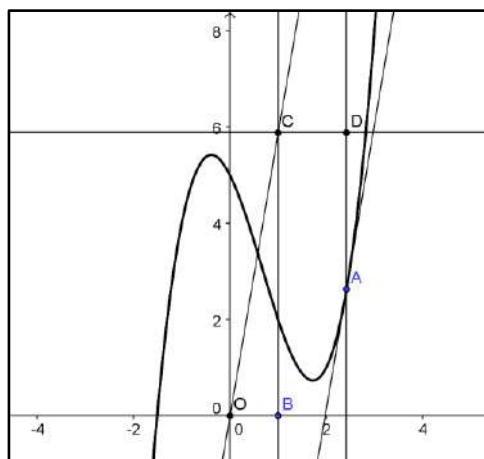


Рис. 6. Построение точки D, принадлежащей графику касательной заданной функции.

Постановка подобных заданий очень полезна для освоения теоретических положений, поэтому изучение приемов построения динамических моделей, целесообразнее всего осуществлять на уроках изучения нового материала или формирования навыков использования изученных фактов. Проведенные нами исследования показывают, что такая работа не требует больших затрат учебного времени. Однако, обучение компьютерному моделированию не должно подменять обучение использованию классических конструктивных инструментов, так как в основе использования инструментов среды лежат принципы построения циркулем и линейкой. Полезно начинать осваивать инструменты среды с обучения построению циркулем и линейкой, затем освоенные приемы учиться реализовывать виртуальными инструментами. И лишь только после того, как сформированы прочные навыки использования приема, можно разрешить учащимся создать и применять виртуальный инструмент, представляющий собой результат решения базовой задачи на построение.

Снижению риска утраты способности учащихся к построению

классическими инструментами способствуют также задачи, где построения в среде носят лишь вспомогательный характер.

Пример 6. Построить окружность, которая проходит через точки A и B , и касается окружности c .

Компьютерное решение данной задачи весьма просто. Достаточно отметить на заданной окружности произвольную точку C , построить окружность с центром в точке A , проходящую через эту точку, а затем найти положения, при котором точки пересечения данной и построенной окружностей совместятся. Проблема состоит в использовании этого построения для обнаружения идеи построения циркулем и линейкой. На рисунке 7 представлен компьютерный эксперимент, позволяющий обнаружить неподвижную точку F , которая будет использована для построения классическими инструментами.

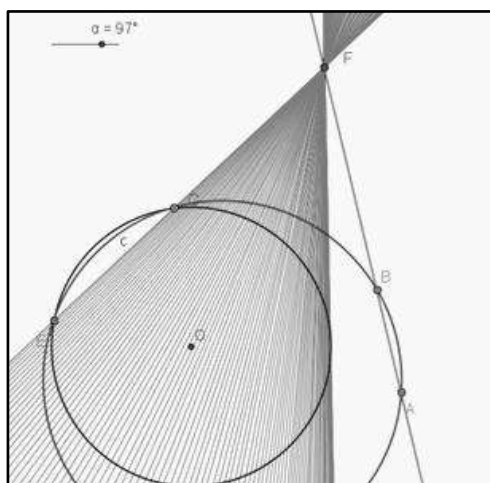


Рис. 7. Обнаружение неподвижной точки F в ходе компьютерного эксперимента

Подведем итог представленному обзору эффектов и рисков переноса в условия массового обучения методологии экспериментальной математики. Мы их намеренно представили

попарно, для того, чтобы обратить внимание на то, что вовсе не нужно отказываться от возможностей, предоставляемых новой методологией, из-за опасения негативных последствий. Нужно лишь разумно ее применять, помня о том, что «лучшее враг хорошего». Поиск способов адаптации методов и средств экспериментальной математики к условиям обучения это открытая область методических исследований. Представленные в статье рекомендации – это лишь некоторые наброски для ее решения.

Библиография

1. Borwein, J. & Bailey, D. (2004). Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century (<http://www.austms.org.au/Gazette/2005/Jul05/bookreviews.pdf>).
2. Экспериментальная математика: официальный сайт журнала <http://www.emis.de/journals/EM/expmath>
3. Risto Malcheski, Sava Grozdev & Katerina Anevska (2015) Geometry of complex numbers – Bulgarian, Arhimed, 2015-238p.
4. Исследовательская деятельность учащихся в области математики, прикладной математики и информатики: сборник материалов региональной научно-практической конференции школьников – Архангельск, издательский дом САФУ, 2012 – 2014 гг.
5. Турнир по экспериментальной математике: официальный сайт турнира (<http://itprojects.narfu.ru/turnir/task.php>)
6. Методики и информационные технологии в образовании: официальный сайт Российско-Болгарского проекта MITE (<http://itprojects.narfu.ru/mite/>)
7. Rocard M, Csermely P., Jorde D., Lenzen D., Walberg-Henriksson H. & Hemmo V. (2007). Scientific education now: a renewed pedagogy for the future of Europe. Commission Européenne, Direction générale de la recherche, science, économie et société – P.9.
8. Официальный сайт программы GeoGebra <http://www.geogebra.org/cms/>

9. Официальный сайт программы Geometry Expressions
<http://www.geometryexpressions.com>
10. Блог учителя математики М.А. Метс «Копилка»
<http://marinmets.blogspot.com>
11. Блог И.С. Храповицкого «Живой журнал»
<http://jankax.livejournal.com/53212.html>
12. Сайт электронных образовательных ресурсов
<http://eorhelp.ru/>, раздел «Творческая конструктивная среда и интерактивные модели в МАТЕМАТИКЕ».
13. Arnheim, R. (1969) Visual thinking. Berkley: Univ. of California Press
14. Далингер, В.А. (2006) Теоретические основы когнитивно-визуального подхода к обучению математике: монография – Омск – 73 с.

EXPERIMENTAL MATHEMATICS AT SCHOOL: EFFECTS AND RISKS

*Professor, DSc in Pedagogy, Maria Shabanova
Northern (Arctic) Federal University, m.shabanova@narfu.ru*

Abstract. Experimental mathematics is a new area of modern mathematics. The main feature of this area is obtaining mathematical results by dint of computer experiments. Computer experiments open the way for inquiry based learning in mathematics education. The purpose of the paper is to show that computer experiments are a source not only for new opportunities, but also for new risks at mathematics education. The most important risks are the following: students can lose the ability for theoretical search and visual thinking, motives and skills of deductive reasoning, constructive skills.

Keywords: experimental mathematics, inquiry based learning in mathematics education, computer experiments, dynamic geometry software.

ОТНОСНО НЯКОИ СПЕЦИАЛНИ ВИДОВЕ ОКРЪЖНОСТИ В РАВНИНАТА НА ТРИЪГЪЛНИКА И ТЕХНИТЕ ОБОБЩЕНИЯ ЧРЕЗ КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ

Проф. дпн Сава Гроздев¹, доц. д-р Веселин Ненков²
¹ВУЗФ – София, ²ТК – Ловеч

Резюме. Описаната окръжност Γ на даден $\triangle ABC$ е свързана с важни свойства на Евклидовата геометрия на триъгълника. Освен това вписаните окръжности и окръжността на Ойлер за $\triangle ABC$ притежават редица забележителни свойства, свързани с Γ . Тези окръжности са частни случаи на широките класове от педални окръжности и окръжности на Чева в равнината на $\triangle ABC$. Следователно някои от скритите връзки на педалните окръжности и окръжностите на Чева за $\triangle ABC$ с Γ се разкриват чрез Ойлеровата и вписаните окръжности на $\triangle ABC$. От друга страна Γ е само един елемент от множеството на описаните за $\triangle ABC$ конични сечения. Затова е интересно с всяко описано около $\triangle ABC$ конично сечение (ако е възможно) да се свържат такива конични сечения, които обобщават вписаните окръжности, окръжността на Ойлер, педалните окръжности и окръжностите на Чева на $\triangle ABC$.

Ключови думи: триъгълник, Ойлерова окръжност, педална окръжност, окръжност на Чева, конично сечение.

Разглеждаме произволен триъгълник ABC . Спрямо $\triangle ABC$ ще използваме барицентрични координати, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ [8]. Означаваме с $M_a\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $M_b\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ и $M_c\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ средите съответно на страните BC , CA и AB , а с $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ – медицентъра $\triangle ABC$.

1. Описани криви. Описаната за $\triangle ABC$ окръжност е само

един елемент на безкрайното множество конични сечения, описани около $\triangle ABC$. Произволна описана за $\triangle ABC$ крива от втора степен може да се определи еднозначно с уравнение от вида

$$(1) \quad a_{23}yz + a_{31}zx + a_{12}xy = 0.$$

За да намерим коефициентите a_{23} , a_{31} и a_{12} в (1) при конкретна крива, ще използваме, че всяко описано около $\triangle ABC$ конично сечение $\bar{k}(O)$ е напълно определено с центъра си O . В зависимост от положението на центъра O са възможни три случая.

1.1. Центърът $O(x_0, y_0, z_0)$ ($x_0 + y_0 + z_0 = 1$) на $\bar{k}(O)$ е точка, различна от M_a , M_b и M_c . Върховете A , B , C и съответните им симетрични спрямо O точки $A'(2x_0 - 1, 2y_0, 2z_0)$, $B'(2x_0, 2y_0 - 1, 2z_0)$, $C'(2x_0, 2y_0, 2z_0 - 1)$ лежат на $\bar{k}(O)$ [5]. От координатите на A' , B' и C' се получава, че уравнението (1) се преобразува във вида:

$$(2) \quad \bar{k}(O): (1 - 2x_0)x_0yz + (1 - 2y_0)y_0zx + (1 - 2z_0)z_0xy = 0.$$

1.2. Центърът O на $\bar{k}(O)$ е някоя от точките M_a , M_b и M_c . Нека $O \equiv M_c$. В този случай съществуват безброй много описани за $\triangle ABC$ конични сечения, които минават през точката $C'(1, 1, -1)$. С помощта на точката C' и равенството $a_{12} = 1$ уравнението (1) се преобразува във вида $a_{23}yz + (1 - a_{23})zx + xy = 0$. Това равенство показва, че ако положим $a_{23} = l$ и $m = 1 - a_{23} = 1 - l$, точката $C_1(l, m, 0)$ (която е от правата AB) определя еднозначно крива $\bar{k}(M_c, C_1)$ с център M_c , описана за $\triangle ABC$. Освен това, ако $C_1 \equiv M_c$ ($l = m = \frac{1}{2}$), кривата с уравнение $\frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}zx + xy = 0$ има допира телна в точката C' , която е успоредна на AB . Обратно, нека върху правата AB изберем точка $C_1(l, m, 0)$ ($l + m = 1$). Симетричната на

С спрямо C_1 е точката $C_2(2l, 2m, -1)$. Кривата $\bar{k}(M_c, C_1)$ минава през C_2 тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $(m-l)a_{23}=l(m-l)$. Тъй като C_2C' е успоредна на AB , то, когато C_1 клони към M_c , правата C_2C' ще клони към допирателната в точката $C_2 \equiv C'$, успоредна на AB . Затова при $l=m=\frac{1}{2}$ се получава единствената крива $\bar{k}(M_c, C_1)$, която има допирателна, успоредна на AB . Когато $l \neq m$, получаваме $a_{23}=l$. Така във всички случаи заключаваме, че всяка крива с център в точката M_c се определя с уравнението

$$(3) \quad \bar{k}(M_c, C_1): lyz + mzx + xy = 0, (l+m=1).$$

Случаите, в които $O \equiv M_a$ и $O \equiv M_b$, се разглеждат по аналогичен начин.

1.3. Центърът $O(x_0, y_0, z_0)$ ($x_0 + y_0 + z_0 = 0$) на $\bar{k}(O)$ е безкрайна точка. В този случай $\bar{k}(O)$ е парабола с ос, колинеарна с вектора $\vec{O}(x_0, y_0, z_0) \equiv O(x_0, y_0, z_0)$ [5]. Параболата $\bar{k}(\vec{O})$ минава през точките A , B , C и се допира до безкрайната права $x+y+z=0$ на равнината в безкрайната точка $O(x_0, y_0, z_0)$ [5]. Тези факти привеждат уравнението (1) във вида:

$$(4) \quad k(\vec{O}): x_0^2yz + y_0^2zx + z_0^2xy = 0.$$

Уравненията (2) и (4) могат да се обединят по следния начин:

$$(5) \quad \bar{k}(O): (-x_0 + y_0 + z_0)x_0yz + (x_0 - y_0 + z_0)y_0zx + (x_0 + y_0 - z_0)z_0xy = 0.$$

2. Ойлерова крива. Една забележителна окръжност за $\triangle ABC$, която е тясно свързана с описаната му окръжност, е така наречената Ойлерова окръжност ω . Тази окръжност минава през средите на страните и петите на височините на $\triangle ABC$ [8], [9]. Следователно ω

зависи от ортоцентъра и центъра на описаната окръжност на $\triangle ABC$. Затова обобщение на ω ще получим в зависимост от центъра на описаната крива $\bar{k}(O)$ и една специална точка H , която е аналог на ортоцентъра. Уравнението на кривата Ω , обобщаваща окръжността ω , ще търсим във вида

$$(6) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 0.$$

Кривата Ω определяме като минаваща през средите M_a , M_b и M_c . Оттук следва, че за коефициентите в (6) са изпълнени равенствата:

$$(7) \quad \begin{aligned} a_{22} + a_{33} + 2a_{23} &= 0, \quad a_{33} + a_{11} + 2a_{31} = 0, \\ a_{11} + a_{22} + 2a_{12} &= 0. \end{aligned}$$

За да намерим други зависимости за коефициентите в (6), ще определим други точки върху Ω , които зависят от една специална точка H , а тя от своя страна зависи от положението на центъра O в равнината на $\triangle ABC$.

2.1. Центърът $O(x_0, y_0, z_0)$ ($x_0 + y_0 + z_0 = 1$) на $\bar{k}(O)$ е точка, различна от M_a , M_b и M_c . Определяме правите h_a , h_b и h_c като минаващи съответно през върховете A , B и C и успоредни съответно на правите OM_a , OM_b и OM_c . Тези прави се пресичат в една точка $H(1-2x_0, 1-2y_0, 1-2z_0)$, която се получава от O посредством равенството $\overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$. Ако $h_a \cap BC = A_1$, $h_b \cap CA = B_1$ и $h_c \cap AB = C_1$, то

$$(8) \quad \begin{aligned} &A_1\left(0, \frac{1-2y_0}{2x_0}, \frac{1-2z_0}{2x_0}\right), \quad B_1\left(\frac{1-2x_0}{2y_0}, 0, \frac{1-2z_0}{2y_0}\right), \\ &C_1\left(\frac{1-2x_0}{2z_0}, \frac{1-2y_0}{2z_0}, 0\right). \end{aligned}$$

Точките A_1 , B_1 , C_1 , M_a , M_b и M_c лежат на едно конично се-

чение, което е желаната крива Ω [5] (Фиг. 1). От координатите (8) и равенствата (7) следва, че уравнението (6) може да се представи във вида

(9) $\Omega(O)$:

$$(1-2y_0)(1-2z_0)x^2 + (1-2z_0)(1-2x_0)y^2 + (1-2x_0)(1-2y_0)z^2 - 2(1-2x_0)x_0yz - 2(1-2y_0)y_0zx - 2(1-2z_0)z_0xy = 0.$$

Уравнението (9) може да се запише и във вида:

$\Omega(O)$:

$$4[(1-2x_0)x_0yz + (1-2y_0)y_0zx + (1-2z_0)z_0xy] - [(1-2y_0)(1-2z_0)x + (1-2z_0)(1-2x_0)y + (1-2x_0)(1-2y_0)z](x+y+z) = 0.$$

2.2. Центърът O на $\bar{k}(O)$ е някоя от точките M_a , M_b и M_c .

Нека $O \equiv M_c$ и $C_1(l, m, 0)$ ($l+m=1$) е точка от правата AB . В този случай разглеждаме точката H като съвпадаща с C . Кривата Ω определяме като минаваща през C и C_1 (тази крива е единствена, защото минава през пет точки). От тези условия и равенствата (7) за уравнението (6) получаваме

$$(10) \quad \Omega(M_c, C_1): mx^2 + ly^2 - lyz - mzx - xy = 0.$$

Уравнението (9) може да се запише и във вида:

$$\Omega(M_c, C_1): 2(lyz + mzx + xy) - (mx + ly)(x + y + z) = 0.$$

Забележка. От формулите (8) се вижда, че когато центърът O клони към средата M_c , точката $C_1(l, m, 0)$ съвпада с $C_1\left(\frac{1-2x_0}{2z_0}, \frac{1-2y_0}{2z_0}, 0\right)$, т.е. при $x_0 \rightarrow \frac{1}{2}$, $y_0 \rightarrow \frac{1}{2}$ и $z_0 \rightarrow 0$ се получава, че $\frac{1-2x_0}{2z_0} \rightarrow l$ и $\frac{1-2y_0}{2z_0} \rightarrow m$. Освен това точките A_1 и B_1 клонят към върха C , затова от (8) следва, че $\frac{1-2y_0}{2x_0} \rightarrow 0$,

$\frac{1-2z_0}{2x_0} \rightarrow 1, \frac{1-2x_0}{2y_0} \rightarrow 0, \frac{1-2z_0}{2y_0} \rightarrow 1$. Като приложим тези граници

към общия случай, лесно можем да получим зависимостите, които са ни необходими при крива с център точката M_c . Затова по-нататък няма да разглеждаме тези случаи.

2.3. Центърът $O(x_0, y_0, z_0)$ ($x_0 + y_0 + z_0 = 0$) на $\bar{k}(O)$ е безкрайна точка. Определяме правите h_a , h_b и h_c като минаващи съответно през върховете A , B и C и колинеарни с вектора $\bar{O}(x_0, y_0, z_0) \equiv O(x_0, y_0, z_0)$. В този случай разглеждаме точката H като съвпадаща с O . Ако $h_a \cap BC = A_1$, $h_b \cap CA = B_1$ и $h_c \cap AB = C_1$, то

$$(11) \quad A_1 \left(0, -\frac{y_0}{x_0}, -\frac{z_0}{x_0} \right), B_1 \left(-\frac{x_0}{y_0}, 0, -\frac{z_0}{y_0} \right), \\ C_1 \left(-\frac{x_0}{z_0}, -\frac{y_0}{z_0}, 0 \right).$$

Точките A_1 , B_1 , C_1 , M_a , M_b и M_c лежат на една парабола, която е желаната крива Ω [5] (Фиг. 2). От координатите (8) и равенствата (7) следва, че уравнението (6) може да се представи във вида

$$(12) \quad \Omega(\bar{O}): \\ y_0 z_0 x^2 + z_0 x_0 y^2 + x_0 y_0 z^2 + x_0^2 yz + y_0^2 zx + z_0^2 xy = 0.$$

Тъй като във всички разгледани случаи Ω е аналог на окръжността ω , то за Ω ще използваме понятието *Ойлерова крива, асоциирана с описаната крива $\bar{k}(O)$* [5].

3. Вписани криви. Други забележителни окръжности за ΔABC са неговите вписани окръжности. Характерно свойство на центровете на тези окръжности е, че всеки три от тях образуват спрегнат триъгълник на четвъртия център. Ще използваме това свойство, за да получим обобщение на вписаните окръжности. Нека

$I(x_I, y_I, z_I)$ е произволна точка

$$(x_I + y_I + z_I = 1 \text{ или } x_I + y_I + z_I = 0),$$

която не лежи върху никоя от правите BC , CA , AB , $M_b M_c$, $M_c M_a$ и $M_a M_b$, а точките

$$\begin{aligned} I_A & \left(\frac{-x_I}{-x_I + y_I + z_I}, \frac{y_I}{-x_I + y_I + z_I}, \frac{z_I}{-x_I + y_I + z_I} \right), \\ I_B & \left(\frac{x_I}{x_I - y_I + z_I}, \frac{-y_I}{x_I - y_I + z_I}, \frac{z_I}{x_I - y_I + z_I} \right), \\ I_C & \left(\frac{x_I}{x_I + y_I - z_I}, \frac{y_I}{x_I + y_I - z_I}, \frac{-z_I}{x_I + y_I - z_I} \right) \end{aligned}$$

определят триъгълника $I_A I_B I_C$, който е спрегнат на I спрямо $\triangle ABC$ [8]. В зависимост от точката I имаме два случая.

3.1. Точката I е крайна. В този случай е изпълнено равенството $x_I + y_I + z_I = 1$. Точките I , I_A , I_B и I_C са центрове съответно на конични сечения $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$, вписани в $\triangle ABC$. Средите на отсечките Π_A , Π_B , Π_C , $I_B I_C$, $I_C I_A$ и $I_A I_B$ лежат на крива $\bar{k}(O)$, която е описана за $\triangle ABC$. Координатите на центъра O се изразяват чрез координатите на центъра I по следния начин:

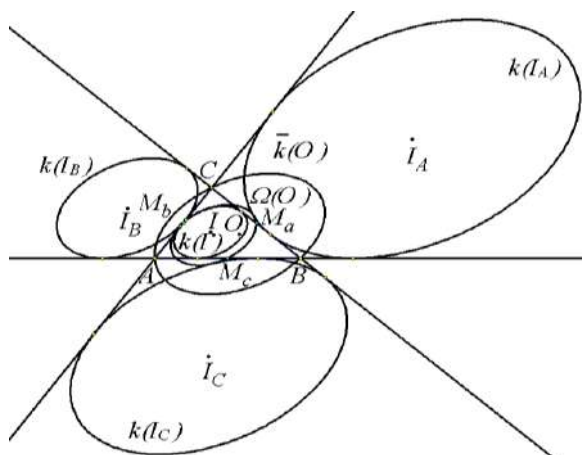
$$(13) \quad O \left(\frac{(1-2x_I-2y_I z_I)x_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)}, \frac{(1-2y_I-2z_I x_I)y_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)}, \frac{(1-2z_I-2x_I y_I)z_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)} \right) [7].$$

След заместване на (13) в (2) за уравнението на $\bar{k}(O)$ се получава

$$(14) \quad \bar{k}(O): x_I^2 y z + y_I^2 z x + z_I^2 x y = 0.$$

Забележително свойство на кривата $k(I)$ (както и на $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$) е, че допирните точки на $k(I)$ с правите BC , CA , AB са успоредни съответно на правите OM_a , OM_b и OM_c [7]. Друго забележително свойство на кривите $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$

е, че те са допирателни за Ойлеровата крива $\Omega(O)$ (Фиг. 1), както това се случва, когато съответните криви са окръжности (теорема на Фойербах) [7]. Затова казваме, че $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$, $\bar{k}(O)$ и $\Omega(O)$ принадлежат на една *Фойербахова конфигурация*. Ако точката I е такава, че O съвпада с някоя от точките M_a , M_b и M_c , казваме, че кривите $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$, $\bar{k}(O)$ и $\Omega(O)$ принадлежат на *специална Фойербахова конфигурация*.

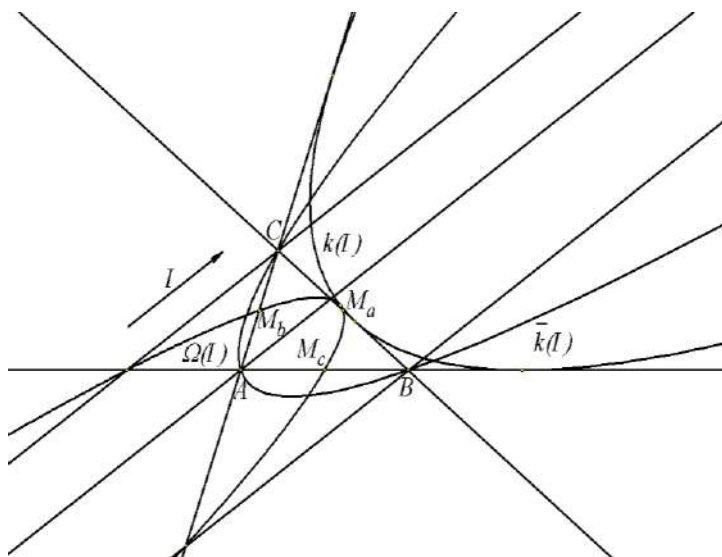


Фигура 1

Накрая трябва да се отбележи, че всяка от точките I , I_A , I_B и I_C определя еднозначно центъра O , но има случаи, в които центърът O не може да определи точките I , I_A , I_B и I_C . Това се получава, когато O е център на описана за $\triangle ABC$ хипербола от специален вид. Следователно има описани за $\triangle ABC$ криви, които не пораждат вписани за $\triangle ABC$ криви, което означава, че те не пораждат Фойербахови конфигурации.

3.2. Точката I е безкрайна. В този случай е изпълнено равенството $x_I + y_I + z_I = 0$. Сега точката I поражда само едно конично

сечение $k(I)$, вписано в $\triangle ABC$. Същата безкрайна точка I поражда и единствена описана за $\triangle ABC$ парабола $\bar{k}(I)$, а също така и Ойлерова парабола $\Omega(I)$. Параболите $k(I)$ и $\Omega(I)$ са допирателни [7], затова казваме, че кривите $k(I)$, $\bar{k}(I)$ и $\Omega(I)$ принадлежат на една *Фойербахова конфигурация от параболи*.



Фигура 2

4. Педални криви. Ойлеровата окръжност и вписаните окръжности на $\triangle ABC$ могат да се обобщят с окръжности, които са описани около триъгълниците, получени от петите на перпендикулярите от произволна точка (нележаща върху описаната окръжност на $\triangle ABC$) върху правите BC , CA и AB . Затова е логично да определим криви, които обобщават Ойлеровата и вписаните криви по такъв начин, че те от своя страна да обобщават педалните окръжности.

4.1. Педални криви спрямо Фойербахови конфигурации. Разглеждаме Фойербахова конфигурация, образувана от кривите

$k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$, $\bar{k}(O)$. Ако $P(x_P, y_P, z_P)$ ($x_P + y_P + z_P = 1$) е произволна точка, нележаща върху никоя от правите BC , CA , AB и кривата $\bar{k}(O)$, въвеждаме означенията $A_1 = AP \cap BC$, $B_1 = BP \cap CA$ и $C_1 = AC \cap AB$. Нека AA_2 ($A_2 \in BC$) е хармонично спрегната на AA_1 спрямо AI и $I_B I_C$, BB_2 ($B_2 \in CA$) е хармонично спрегната на BB_1 спрямо BI и $I_C I_A$ и CC_2 ($C_2 \in AB$) е хармонично спрегната на CC_1 спрямо CI и $I_A I_B$. В [1] е показано, че правите AA_2 , BB_2 и CC_2 минават през една точка $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, координатите на която се изразяват с равенствата:

$$(15) \quad \begin{aligned} x_Q &= \frac{x_I^2 y_P z_P}{\mathcal{G}(P)} = \frac{(-x_0 + y_0 + z_0) x_0 y_P z_P}{\mathcal{G}(P)}, \\ y_Q &= \frac{y_I^2 z_P x_P}{\mathcal{G}(P)} = \frac{(x_0 - y_0 + z_0) y_0 z_P x_P}{\mathcal{G}(P)}, \\ z_Q &= \frac{z_I^2 x_P y_P}{\mathcal{G}(P)} = \frac{(x_0 + y_0 - z_0) z_0 x_P y_P}{\mathcal{G}(P)}, \end{aligned}$$

където

$$(16) \quad \begin{aligned} \mathcal{G}(P) &= x_I^2 y_P z_P + y_I^2 z_P x_P + z_I^2 x_P y_P = \\ &= (-x_0 + y_0 + z_0) x_0 y_P z_P + (x_0 - y_0 + z_0) y_0 z_P x_P + (x_0 + y_0 - z_0) z_0 x_P y_P. \end{aligned}$$

Равенствата (15) задават изображение в равнината на $\triangle ABC$, което на точката P съпоставя единствена точка Q . В [1] точките P и Q са наречени *спрегнати спрямо $\bar{k}(O)$* . Тъй като кривата $\bar{k}(O)$ е елемент на разглежданата Фойербахова конфигурация, можем да казваме още, че точките P и Q са *спрегнати спрямо Фойербаховата конфигурация, на която принадлежи $\bar{k}(O)$* . От резултатите, получени в [1], следва, че двойните елементи спрямо произволна Фойербахова конфигурация са точките I , I_A , I_B и I_C .

Нека правите p_a , p_b и p_c минават през P и са съответно успоредни на OM_a , OM_b и OM_c , като $P_a = p_a \cap BC$, $P_b = p_b \cap CA$ и $P_c = p_c \cap AB$. След това през спрегнатата точка Q построяваме правите q_a , q_b и q_c , които са успоредни съответно на OM_a , OM_b и OM_c , като $Q_a = q_a \cap BC$, $Q_b = q_b \cap CA$ и $Q_c = q_c \cap AB$ лежат на една крива от втора степен π_P . Координатите на точките P_a , P_b , P_c , Q_a , Q_b и Q_c са следните

$$\begin{aligned}
 (17) \quad & P_a \left(0, \frac{(x_0 - y_0 + z_0)x_P + 2x_0y_P}{2x_0}, \frac{(x_0 + y_0 - z_0)x_P + 2x_0z_P}{2x_0} \right), \\
 & P_b \left(\frac{(-x_0 + y_0 + z_0)y_P + 2y_0x_P}{2y_0}, 0, \frac{(x_0 + y_0 - z_0)y_P + 2y_0z_P}{2y_0} \right), \\
 & P_c \left(\frac{(-x_0 + y_0 + z_0)z_P + 2z_0x_P}{2z_0}, \frac{(x_0 - y_0 + z_0)z_P + 2z_0y_P}{2z_0}, 0 \right), \\
 (18) \quad & Q_a \left(0, \frac{[(1 - 2z_I - 2x_Iy_I)y_P + 2y_I^2x_P]z_P}{2g(P)}, \frac{[(1 - 2y_I - 2z_Ix_I)z_P + 2z_I^2x_P]y_P}{2g(P)} \right), \\
 & Q_b \left(\frac{[(1 - 2z_I - 2x_Iy_I)x_P + 2x_I^2y_P]z_P}{2g(P)}, 0, \frac{[(1 - 2x_I - 2y_Iz_I)z_P + 2z_I^2y_P]x_P}{2g(P)} \right), \\
 & Q_c \left(\frac{[(1 - 2y_I - 2z_Ix_I)x_P + 2x_I^2z_P]y_P}{2g(P)}, \frac{[(1 - 2x_I - 2y_Iz_I)y_P + 2y_I^2z_P]x_P}{2g(P)}, 0 \right).
 \end{aligned}$$

След като заместим тези координати в (6), използваме (13) и извършим на някои преобразувания, се установява, че шестте точки P_a , P_b , P_c , Q_a , Q_b и Q_c удовлетворяват уравнението

$$(19) \quad \pi_P :$$

$$4.g(P).(x_I^2yz + y_I^2zx + z_I^2xy) - (a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z)(x + y + z) = 0,$$

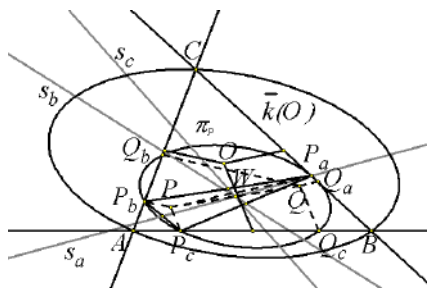
където

$$a_{11} = [(1 - 2x_I - 2y_Iz_I)y_P + 2y_I^2z_P][[(1 - 2x_I - 2y_Iz_I)z_P + 2z_I^2y_P]x_P,$$

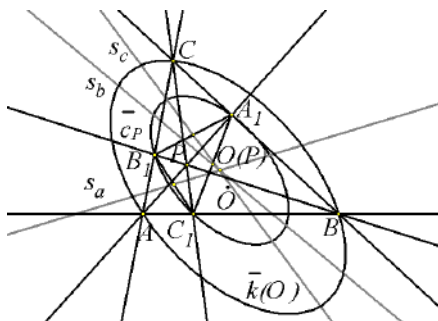
$$a_{22} = [(1 - 2y_I - 2z_Ix_I)z_P + 2z_I^2x_P][[(1 - 2y_I - 2z_Ix_I)x_P + 2x_I^2z_P]y_P,$$

$$a_{33} = \left[(1 - 2z_I - 2x_I y_I) x_P + 2x_I^2 y_P \right] \left[(1 - 2z_I - 2x_I y_I) y_P + 2y_I^2 x_P \right] z_P,$$

а $\mathcal{G}(P)$ се изразява с равенството (16).



Фигура 3



Фигура 4

Кривата π_P , определена с уравнението (19), ще наричаме *педална крива на P и Q спрямо разглежданата Фойербахова конфигурация* или *спрямо описаната крива $\bar{k}(O)$* [6] (Фиг. 3). Центърът W на педалната крива π_P е средата на отсечката PQ и има следните координати

$$(20) \quad x_W = \frac{\mathcal{G}(P)x_P + x_I^2 y_P z_P}{2\mathcal{G}(P)}, \quad y_W = \frac{\mathcal{G}(P)y_P + y_I^2 z_P x_P}{2\mathcal{G}(P)},$$

$$z_W = \frac{\mathcal{G}(P)z_P + z_I^2 x_P y_P}{2\mathcal{G}(P)} [6].$$

4.2. Общ случай на педални криви. Както беше отбелязано, не всяка описана за $\triangle ABC$ централна крива участва във Фойербахова конфигурация. От друга страна вторите части на равенствата (15) и (16) определят напълно еднозначно точката Q . Следователно спрямо всяка описана крива $\bar{k}(O)$ точката Q съществува за всяка точка P , нележаща на $\bar{k}(O)$, но разглежданата конструкция на точката Q е неприложима при нефойербахова конфигурация. Зато ва се появява необходимост от геометрична конструкция на точката

Q , която е валидна спрямо всяка централна описана около $\triangle ABC$ крива $\bar{k}(O)$. Такава конструкция ще получим, като определим центъра на π_p в зависимост само от кривата $\bar{k}(O)$. За да извършим това, построяваме правите s_a , s_b и s_c , които минават съответно през средите на отсечките P_bP_c , P_cP_a и P_aP_b , така че да са спрегнати съответно с правите P_bP_c , P_cP_a и P_aP_b спрямо $\bar{k}(O)$. От (17) и резултатите, получени в [2], за уравнения на правите s_a , s_b и s_c намираме параметричните уравнения на тези прави във вида

$$\begin{aligned} s_a : \begin{cases} x = \frac{4y_0z_0x_p + (1-2x_0)z_0y_p + (1-2x_0)y_0z_p}{4y_0z_0} + [(1-2y_0)y_0z_p + (1-2z_0)z_0y_p]t_a, \\ y = \frac{2z_0y_p + (1-2y_0)z_p}{4z_0} - (1-2y_0)y_0z_pt_a, \\ z = \frac{(1-2z_0)y_p + 2y_0z_p}{4y_0} - (1-2z_0)z_0y_pt_a, \end{cases} \\ s_b : \begin{cases} x = \frac{2z_0x_p + (1-2x_0)z_p}{4z_0} - (1-2x_0)x_0z_pt_b, \\ y = \frac{(1-2y_0)z_0x_p + 4z_0x_0y_p + (1-2y_0)x_0z_p}{4z_0x_0} + [(1-2x_0)x_0z_p + (1-2z_0)z_0x_p]t_b, \\ z = \frac{(1-2z_0)x_p + 2x_0z_p}{4x_0} - (1-2z_0)z_0x_pt_b, \end{cases} \\ s_c : \begin{cases} x = \frac{2y_0x_p + (1-2x_0)y_p}{4y_0} - (1-2x_0)x_0y_pt_c, \\ y = \frac{(1-2y_0)x_p + 2x_0y_p}{4x_0} - (1-2y_0)y_0x_pt_c, \\ z = \frac{(1-2z_0)y_0x_p + (1-2z_0)x_0y_p + 4x_0y_0z_p}{4x_0y_0} + [(1-2x_0)x_0y_p + (1-2y_0)y_0x_p]t_c. \end{cases} \end{aligned}$$

След известни пресмятания от последните уравнения се вижда, че правите s_a , s_b и s_c се пресичат в точката W (Фиг. 3), която има следните координати

$$\begin{aligned}
 x_w &= \frac{\mathcal{G}(P)x_p + (1-2x_0)x_0y_pz_p}{2\mathcal{G}(P)}, \\
 y_w &= \frac{\mathcal{G}(P)y_p + (1-2y_0)y_0z_px_p}{2\mathcal{G}(P)}, \\
 z_w &= \frac{\mathcal{G}(P)z_p + (1-2z_0)z_0x_py_p}{2\mathcal{G}(P)}.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Тъй като съответните координати в (20) и (21) са равни, то от тях се получава една и съща точка W , която е център на желаната крива π_p . Сега точката Q намираме като симетрична на P спрямо центъра W . За координатите на точката Q получаваме равенствата (15). Освен това за координатите на точките Q_a , Q_b и Q_c намираме

$$\begin{aligned}
 Q_a &\left(0, \frac{(1-2y_0)[(1-2x_0)y_p + 2y_0x_p]z_p}{2\mathcal{G}(P)}, \frac{(1-2z_0)[(1-2x_0)z_p + 2z_0x_p]y_p}{2\mathcal{G}(P)}\right), \\
 Q_b &\left(\frac{(1-2x_0)[(1-2y_0)x_p + 2x_0y_p]z_p}{2\mathcal{G}(P)}, 0, \frac{(1-2z_0)[(1-2y_0)z_p + 2z_0y_p]x_p}{2\mathcal{G}(P)}\right), \\
 Q_c &\left(\frac{(1-2x_0)[(1-2z_0)x_p + 2x_0z_p]y_p}{2\mathcal{G}(P)}, \frac{(1-2y_0)[(1-2z_0)y_p + 2y_0z_p]x_p}{2\mathcal{G}(P)}, 0\right),
 \end{aligned}$$

където $\mathcal{G}(P)$ се изразява с (16).

Уравнението на кривата π_p получаваме във вида

$$\begin{aligned}
 \pi_p : \quad &4\mathcal{G}(P)[(1-2x_0)x_0yz + (1-2y_0)y_0zx + (1-2z_0)z_0xy] - \\
 &-(a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z)(x + y + z) = 0
 \end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= (1-2y_0)(1-2z_0)[(1-2y_0)z_p + 2z_0y_p][(1-2z_0)y_p + 2y_0z_p]x_p, \\
 a_{22} &= (1-2z_0)(1-2x_0)[(1-2x_0)z_p + 2z_0x_p][(1-2z_0)x_p + 2x_0z_p]y_p, \\
 a_{33} &= (1-2x_0)(1-2y_0)[(1-2y_0)x_p + 2x_0y_p][(1-2x_0)y_p + 2y_0x_p]z_p,
 \end{aligned}$$

а $\mathcal{G}(P)$ се изразява с равенството (16).

5. Криви на Чева. Окръжността на Ойлер може да се обобщи с още един вид окръжности, наречени окръжности на Чева. Нека $P(\lambda, \mu, \nu)$ ($\lambda + \mu + \nu = 1$) е произволна точка от равнината на $\triangle ABC$ и $A_1 = AP \cap BC$, $B_2 = BP \cap CA$, $C_1 = CP \cap AB$. Описаната около $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност се нарича окръжност на Чева за точката P спрямо $\triangle ABC$. Следователно окръжността на Ойлер е окръжност на Чева за ортоцентъра и медицентъра на $\triangle ABC$. Обобщаването на тази окръжност в крива на Чева $\bar{c}_p$ спрямо описаната крива $\bar{k}(O)$ може да се извърши по същия начин, както това беше направено при педалните криви в общия случай [2]. За целта с s_a , s_b и s_c означаваме правите, които минават съответно през средите на отсечките B_1C_1 , C_1A_1 и A_1B_1 , така че да са спрегнати съответно с правите B_1C_1 , C_1A_1 и A_1B_1 спрямо $\bar{k}(O)$ [2]. След известни пресмятания получаваме, че тези прави се пресичат в една точка $O(P)$ (Фиг. 4), чиито координати се представят с формулите:

$$\begin{aligned} x_{O(P)} &= \frac{\lambda(\bar{b}.\bar{\bar{b}} + \bar{c}.\bar{\bar{c}})}{2\lambda^2\mu^2\nu^2(\mu+\nu)(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)(1-2x_l)(1-2y_l)(1-2z_l)}, \\ y_{O(P)} &= \frac{\mu(\bar{c}.\bar{\bar{c}} + \bar{a}.\bar{\bar{a}})}{2\lambda^2\mu^2\nu^2(\mu+\nu)(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)(1-2x_l)(1-2y_l)(1-2z_l)}, \\ z_{O(P)} &= \frac{\nu(\bar{a}.\bar{\bar{a}} + \bar{b}.\bar{\bar{b}})}{2\lambda^2\mu^2\nu^2(\mu+\nu)(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)(1-2x_l)(1-2y_l)(1-2z_l)}, \end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned} \bar{a} &= (\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu a^2 + (\nu - \mu)(\lambda + \mu)\nu\lambda b^2 + (\mu - \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu c^2, \\ \bar{b} &= (\nu - \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu a^2 + (\lambda + \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda b^2 + (\lambda - \nu)(\mu + \nu)\lambda\mu c^2, \\ \bar{c} &= (\mu - \lambda)(\nu + \lambda)\mu\nu a^2 + (\lambda - \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda b^2 + (\mu + \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu c^2, \end{aligned}$$

$$\bar{a} = -(\lambda^2 + \mu\nu)\mu\nu a^2 + (\mu + \nu)\nu\lambda^2 b^2 + (\mu + \nu)\mu\lambda^2 c^2,$$

$$\bar{b} = (\nu + \lambda)\nu\mu^2 a^2 - (\mu^2 + \nu\lambda)\nu\lambda b^2 + (\nu + \lambda)\lambda\mu^2 c^2,$$

$$\bar{c} = (\lambda + \mu)\mu\nu^2 a^2 + (\lambda + \mu)\lambda\nu^2 b^2 - (\nu^2 + \lambda\mu)\lambda\mu c^2.$$

Кривата с център точката $O(P)$, която е описана за $\Delta A_1 B_1 C_1$, наричаме *крива на Чева спрямо описаната крива $\bar{k}(O)$* [2], [4].

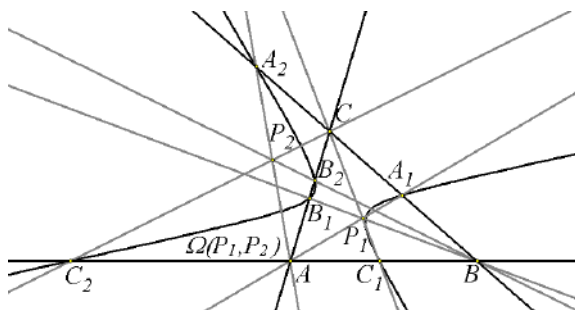
6. Общи криви. Видяхме, че окръжността на Ойлер за ΔABC е окръжност на Чева за две точки. Нещо повече, ако P е произволна точка от равнината на ΔABC и окръжността на Чева c_p за P пресича повторно правите BC , CA и AB съответно в точките A_2 , B_2 и C_2 , то правите AA_2 , BB_2 и CC_2 минават през една точка Q , т.е. c_p е окръжност на Чева и за Q [9]. Следователно всяка окръжност на Чева е окръжност на Чева за две точки. Този факт може да се обобщи по следния начин: Ако $P_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ и $P_2(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ са произволни (крайни или безкрайни) точки от равнината на ΔABC , никоя от които не лежи върху някоя от правите BC , CA и AB , то правите AP_1 , AP_2 , BP_1 , BP_2 , CP_1 и CP_2 пресичат правите BC , CA и AB в шест точки, които лежат на една крива от втора степен $\Omega(P_1, P_2)$ [2] (Фиг. 5).

Уравнението на тази крива е следното

$\Omega(P_1, P_2)$:

$$\begin{aligned} &\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2x^2 + \nu_1\lambda_1\nu_2\lambda_2y^2 + \lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2z^2 - \\ & - \lambda_1\lambda_2(\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1)yz - \mu_1\mu_2(\nu_1\lambda_2 + \nu_2\lambda_1)zx - \nu_1\nu_2(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)xy = 0. \end{aligned}$$

По този начин получаваме криви, които обобщават голяма част от известните специални видове окръжности в равнината на ΔABC .



Фигура 5

Литература

- [1] Гроздев, С., В. Ненков. Две двойки точки, породени от асоциирани спрямо триъгълник централни конични сечения, Математика и информатика, 1, 2012, 60 – 83.
- [2] Гроздев, С., В. Ненков. Геометрична конструкция на крива на Чева. Математика и информатика, 1, 2015, 52-57.
- [3] Гроздев, С., В. Ненков. Една крива от втора степен за две точки на Чева. Математика и математическо образование, 38, 2009, 245-248.
- [4] Гроздев, С., В. Ненков. Крива на Чева за точка от равнината на триъгълник, Математика и информатика, 3, 2014, 285 – 298.
- [5] Гроздев, С., В. Ненков. Обобщения некоторых классических теорем геометрии треугольника. Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования. Сборник материалов международной научной конференции. Архангельск, САФУ, 2014, 35-54.
- [6] Гроздев, С., В. Ненков. Педална крива на точка спрямо Фойербахова конфигурация, Математика и информатика, 6, 2014, 617 – 625.
- [7] Ненков, В. Обобщение на теоремата на Фойербах. Математика и информатика, 2, 2008, 35 – 42.

[8] Паскалев, Г., И. Чобанов. Забележителни точки в триъгълника. Народна просвета, София, 1985.

[9] Хитов, Х. Геометрия на триъгълника. Народна просвета, София, 1990.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСА «АФЛАТУН: СОЦИАЛЬНОЕ И ФИНАНСОВОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ДЕТЕЙ»

*Доцент, кандидат педагогических наук, Форкунова Л.В.,
Юрьева Ю.А.*

*Северный (Арктический) федеральный университет имени
М.В. Ломоносова*

Аннотация. В настоящее время в России уделяется большое внимание проблеме формирования финансовой грамотности школьников. С января 2013 года апробацию в России проходит международный образовательный проект «Афлатун: социальное и финансовое образование детей». Проведенный нами анализ показал, что для формирования требуемого уровня финансовой грамотности школьников необходимо усиление математической составляющей курса. В статье рассматриваются предпосылки и возможные пути решения этой задачи.

Ключевые слова: финансовая грамотность, математические методы, финансовая математика в школе, внеклассная работа.

В настоящее время в эпоху бурно развивающихся рыночных отношений во всем мировом сообществе остро стоит проблема повышения финансовой грамотности населения, которая включает в себя управление личными финансами, эффективное использование финансовых продуктов и услуг, умение получить актуальную информацию о ситуации на финансовых рынках и т.п. Отсутствие этих элементарных финансовых знаний и навыков ограничивает возможности граждан по принятию правильных решений для обеспечения своего финансового благополучия. На микроуровне эта проблема выражается в накоплении населением избыточной кредитной задолженности, неэффективном распределении личных сбережений, возможности быть обманутыми недобросовестными

поставщиками финансовых услуг. На макроуровне сдерживает развитие финансовых рынков, подрывает доверие к финансовым институтам и государственной политике по их регулированию, обуславливает дополнительную нагрузку на бюджеты всех уровней, приводит к снижению темпов экономического роста.

В Российской Федерации данная проблема стоит особенно остро, в связи с поздним переходом к рыночным условиям, следствием которого является недостаточная база знаний о финансовых институтах и инструментах, а также недоверие к ним. Согласно разработанной в 2009 году Концепции национальной программы повышения финансовой грамотности населения, а также региональных программ, разрабатываемых и реализуемых в рамках этой концепции на местах, формирование финансовой грамотности населения нужно начинать как можно раньше, как минимум со школьной скамьи. Для решения этой задачи в России предпринимается ряд шагов. Во-первых, отдельные темы, необходимые для формирования финансовой грамотности, включены в курсы изучения многих школьных предметов: обществознания, экономики, географии, математики. Во-вторых, с 2011 года в России идет реализация совместного проекта Министерства финансов РФ и Всемирного банка «Содействие повышению уровня финансовой грамотности населения и развитию финансового образования в Российской Федерации», в случае успешной реализации которого с 2018 года курс «Финансовая грамотность» планируется включить в общеобразовательную программу. Третьим направлением ведущейся работы по формированию финансовой грамотности школьников является апробация, адаптация к российским условиям и реализация курсов, уже разработанных и апробированных на территории других стран.

Одним из примеров работы, ведущейся в этом направлении, является международная образовательная программа «Афлатун: социальное и финансовое образование детей» («Aflatoun: child social and financial education», далее «Афлатун»). С января 2013 года

в Московской, Волгоградской и Архангельской областях Российской Федерации идет апробация представленных разработчиками этой программы учебных и учебно-методических материалов. Координатором проекта по России выступает отдел научно-методического обеспечения работы с одаренными детьми Центра стратегических разработок ГБОУ ВПО «Академия социального управления» Московской области (АСОУ МО). Анализ переведенных на русский язык и адаптированных к российским условиям учебных материалов, проведенный учителями-экспериментаторами школ – пилотных площадок, работающих по программе «Афлатун» показал, что в целом эти материалы соответствуют целям как федеральной, так и региональной программ повышения уровня финансовой грамотности населения России. Однако в них недостаточно заданий, направленных на формирование умения применять математические расчеты для принятия экономически обоснованных решений. На настоящий момент решение этой проблемы взяли на себя сами учителя, включающие в занятия самостоятельно подобранный математический материал. При решении данной проблемы учителя руководствуются собственным опытом, а также имеющимися возможностями (курс «Афлатун» может реализовываться в различных формах внеурочной деятельности: кружок, факультатив, клуб, бизнес-инкубатор, классные часы, также возможно использование материала курса в ходе уроков по различным предметам и др.). Рассмотрим несколько примеров подбора математического материала и его использования при реализации различных форм работы по программе «Афлатун» учителями-экспериментаторами пилотных площадок Архангельской области.

Пример 1. Использование материала экономического содержания на уроках математики.

Томилова Галина Валентиновна, учитель математики МБОУ СОШ № 54 г. Архангельска. а Урок на тему «Действия с

десятичными дробями», ориентированный на формирование финансовой грамотности у учащихся 5 класса.

1.1. Получение «закодированного» слова при выполнении заданий и последующее объяснение полученного слова учителем.

Этап 1. Учащиеся устно выполняют предложенные вычисления. За каждое верно выполненное вычисление они получают букву «закодированного» слова. В таблице 1 приведен пример такого задания.

Таблица 1

$18,6 : 3$	6,2	Ф
$2,5 - 1,6$	0,9	И
$4 - 0,8$	3,2	Н
$3,5 \cdot 0,1$	0,35	А
$4,32 \cdot 10$	43,2	Н
$17 : 10$	1,7	С
$0,9 + 3,2$	4,1	И
$18 + 2,7$	20,7	С
$0,8 \cdot 0,2$	0,16	Т

Этап 2. Учащимся предлагается объяснить значение полученного понятия. Возможно использование вопроса-теста.

Этап 3. Учащиеся разбирают правильное значение понятия вместе с учителем.

1.2. Объяснение какого-либо экономического понятия с последующим выполнением задания, имеющего непосредственное отношение к этому понятию.

Этап 1. Учитель объясняет учащимся экономическое понятие, например, «налоги».

Этап 2. Учащимся предлагается решить сюжетную задачу, основанную на этом понятии:

«Государство собрало за май 4,43 миллиона рублей налогов. На строительство детского сада денег ушло в 1,6 раз больше денег, чем на заработную плату, а на строительство дорог на 0,86

больше чем строительство детского сада. Сколько денег ушло на детский сад, строительство дорог и заработную плату?»

Пример 2. Использование заданий, требующих математических расчетов, при проведении внеклассного мероприятия в форме командной игры

Берденникова Ольга Васильевна, учитель начальных классов, Воронская Наталья Евгеньевна, учитель начальных классов МБОУ «Верхне-Матигорская СОШ», Холмогорского района Архангельской области.

Внеклассное мероприятие «Учение – свет». Образование как ключ к личностному развитию. Пример М.В. Ломоносова» для 3-5 классов.

Пояснение. За каждое правильно выполненное задание команды получают «афлатуны», символические условные единицы проекта в виде бумажных квадратиков с изображением Афлатуна (огонька) номиналом 1 афлатун.

2.1. Выбор одной или нескольких альтернатив из имеющихся. Задание «Химическая лаборатория»

Этап 1. Детям демонстрируется насколько химических опытов. Какие-то из них более эффектно, какие-то менее.

Этап 2. Командам выдается одинаковое задание: *«Представьте себе, что вы занимаетесь в кружке «Юные химики». Ваш учитель химии попросил помочь ему выбрать один из показанных вам опытов для того, чтобы продемонстрировать его на Дне науки, который будет проводиться в вашей школе. Для закупки необходимых для опыта компонентов кружку выделено 2500 рублей».*

Каждая команда получает таблицы, в которых указаны цена компонентов каждого опыта и их необходимое количество (таблица 2).

Ребята должны сделать расчёты и решить, сколько опытов и какие именно команда рекомендует для «Дня науки». При объяснении своего решения необходимо объяснить, почему было

принято такое решение и какие критерии оценки опытов применялись. Возможные критерии выбора: минимальные затраты, наибольшая зрелищность, наибольшее количество опытов и т.д. На рисунке 1 представлена работа команд.

Таблица 2

Название компонента	Цена 1 грамма	Количество для опыта	Стоимость
Опыт «Вулкан»			
Дихромат аммония	30 руб.	20 г	
Магний	150 руб.	1 г	
Опыт «Кровь»			
Хлорид железа	40 руб.	20 г	
Роданид калия	112 руб.	10 г	
Фторид натрия	78 руб.	5 г	
Опыт «Огонь»			
Перманганат калия	150 руб.	5 г	
Концентрированная серная кислота	300 руб.	7 г	
Спирт	10 руб.	20 г	
Опыт «Молоко»			
Сульфат натрия	38 руб.	5 г	
Хлорид бария	120 руб.	5 г	
Опыт «Несгораемый платок»			
Ацетон	12 руб.	50 мл	
Спирт	10 руб.	10 г	



Рисунок 1

Этап 3. Жюри проверяет правильность математических расчетов. Команда, объяснившая почему именно этот/эти опыт/опыты были выбраны, не допустившая ошибок в расчетах и не вышедшая за пределы указанной суммы получает наибольшее количество «афлатунов».

2.2. Максимизации прибыли.Задание «Мозаика»

Этап 1. Каждой команде выдается лист ватмана, ножницы и клей. На каждом листе ватмана эскиз по мотивам одной из знаменитых мозаик М.В. Ломоносова. Ребятам объясняется, что они должны выполнить аппликацию в мозаичном стиле. Для этого им предлагается купить на заработанные во время выполнения предыдущих заданий «афлатуны» цветную бумагу. Бумага разного качества и по разной цене (цена указана в «афлатунах») «продается» тут же в импровизированном магазине. У каждой команды свое количество «афлатунов». Кроме того, принятие решения усложняется тем, что в дальнейшем эти мозаичные картины нужно будет «продать» жюри на аукционе.

Этап 2. Команды рассчитывают необходимое количество бумаги, выбирают и покупают товар в магазине. В качестве критерия выбора товара, ребятам предлагается обсудить для своих будущих картин возможные варианты соотношения «цена – качество». Ход работы команд над этим заданием показан на рисунке 2.



Рисунок 2

Этап 3. Ведущий объясняет школьникам правила аукциона, а также понятие стартовая цена лота. Команды рассчитывают и назначают для своих картин стартовую цену. Рекламируют и «продают» их жюри за «афлатуны».

Этап 4. Командам предлагается рассчитать прибыль от производства и продажи своей картины. В соответствии с полученной прибылью команды поощряются «афлатунами». Учитывается также правильность проведенных математических расчетов.

2.3. Расходование консолидированных средств. Здание «Киоск»

В импровизированном киоске выставлены к «продаже» за сувениры, связанные с М.В. Ломоносовым, селами Холмогоры и Матигоры, а также сладости. Цены указаны в «афлатунах». Каждая команда знакомится с ассортиментом. Ребята в совместном обсуждении выбирают, что они купят и как распределяют заработанные «афлатуны» между членами команды.

Пример 3. Добавление математических заданий к имеющимся учебным материалам при подготовке к проведению занятия кружка (факультатива).

Козлова Татьяна Николаевна, учитель начальных классов

МБОУ СОШ № 20 с углубленным изучением социально-экономических дисциплин г. Северодвинска.

**3.1. Занятие кружка «Афлатун» на тему «Урок про деньги»,
1 класс.**

1. Какими монетами можно заплатить 6 рублей, если у тебя такие монеты:



2. Блокнот стоит 6 рублей. Хватит ли Маше денег, если у неё такие монеты:



3. У Зины были такие монеты:



Она купила альбом за 12 рублей. Сколько денег осталось у Зины?

3.2. Занятие кружка «Афлатун» на тему «Учимся делать покупки», 2 класс.

1. У Пети было 3 монеты по 5 рублей. Он купил газету за 6 рублей. Сколько денег осталось у Пети?

Было – 3 м.

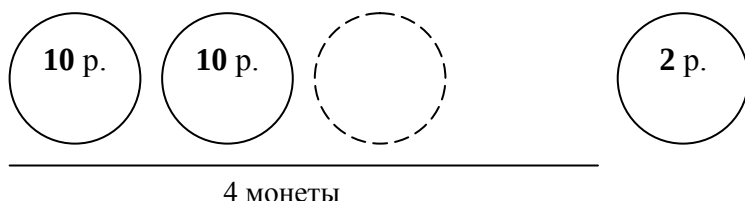
Потратил – 6 р.

Осталось – ?



2. Дорисуй схему и реши задачу.

У Саши 4 монеты достоинством 10 рублей каждая и еще 2 рубля. Сколько всего рублей у Саши?



Анализ предоставленного учителями-экспериментаторами материалов показал, что их самостоятельных усилий для решения проблемы формирования умения применять математические расчеты для принятия экономически обоснованных решений недостаточно. Во-первых, занятия по программе Афлатун в большинстве своем ведутся учителями, являющимися классными руководителями школьников, посещающих кружок (факультатив). При этом дополняют материалы курса математической составляющей только учителя начальных классов и математики, имеющие соответствующие знания в области математики. Для остальных учителей-предметников необходимы готовые, полностью разработанные учебно-методические материалы. Во-вторых, знания методики преподавания математики недостаточно для грамотного дополнения курса финансовой грамотности математическим материалом. Как показывают представленные примеры, далеко не все предлагаемые учителями задания, требующие применения математики, направлены на решение стоящей перед курсом задачи. Они либо не учат школьников применению математических методов при принятии финансовых решений (пример 1), либо требуют применения уже освоенных математических методов в смоделированных учителем экономических ситуациях (пример 2). Составление же (или подбор и адаптация для соответствующего возраста) математических задач,

расширяющих знания учащихся о соотношениях и методах математики, применяемых в экономике, для школьных учителей задача непосильная. Для этого требуется помощь специалистов. Нужно представить учащимся многообразие финансовых процессов, познакомить с основными видами величин, законами связи, методами внутримодельного исследования наиболее часто применяемыми при решении экономических задач, определить динамику развития знаний учащихся и т.д. Таким образом, практика формирования финансовой грамотности школьников показывает на необходимость объединения усилий специалистов в области финансовой математики и методики преподавания математики в решении задачи проектирования и разработки линии финансовой математики для школьников, а также установления ее внутрипредметных и межпредметных связей.

"USING R IN TEACHING INTERNATIONAL FINANCE AND OTHER COURSES" (A SUMMARY OF EXPERIENCE OF USAGE OF FREE ECONOMETRIC SOFTWARE IN BULGARIA AND ROMANIA)

Assoc. Prof. PhD Georgi Marinov¹, Prof. PhD Bogdan Oancea²

¹ University of Economics – Varna, Bulgaria

² “Nicolae Titulescu” University of Bucharest, Romania

Abstract. We share some experience about usage of free econometric software in teaching in two universities – one in Bulgaria and one in Romania. Some common problems appear: in handling separators, encoding, and command-line operation, but they can be relatively easily overcome. Free software helps understanding of data series and gives a significant advance in teaching.

1. Free software and the ordinary university courses

One common, and a well known issue of university education in Eastern Europe is the too high theoretization in teaching.

In an effort to overcome it, in the academic years 2012/2013 and 2013/2014 the seminars in International Finance at the University of Economics - Varna were based on econometric examples to theory, made with the help of free software.

Specialized software (especially econometric software) requires more specific skills, including working with non-standard data formats and command line operation, thus the first several laboratory exercises were made using common electronic tables (i.e. MS Excel, OO Calc or Gnumeric). This was made in an effort to allow students to gradually get familiar with terminology and other specifics of econometric procedures.

Main topic in work was non-stationarity of data, with the final goal students to be aware of the notion of non-stationarity and know how to reveal it, in applying basic unit root and cointegration tests on time series.

In both variants of teaching (2012/2013 and 2013/2014) the cohorts

were of ca. 120 students in 4th study year of their Bachelor degree. In 2012/2013 laboratories started with an application of electronic table software for the basics of econometrics - OLS and illustration of stationary and non-stationary data, with artificially generated data (DGP), and further continued with usage of GNU Gretl for the commonly used tests and for testing of real data.

Gretl was chosen for two reasons. First of all, it is a well-known and an actively developed free econometric software. The program itself was created for educational purposes. And on the other hand it has a comfortable graphical interface, which makes it at least partly similar to other common used programs.

In the next year (2013/2014) the beginning of laboratories was also made with an electronic table, but the "specialized" part of seminars was made with GNU R.

The R program is one of the most powerful and most actively developed software for statistical purposes, but its basic format is a command-line operation and students are not familiar with it. Doubts on whether students will be able to master it existed, and switching from Gretl to R was not an easy decision. For the final choice, results from the previous year were decisive. As an additional plus, R allows easy creation of random data for the examples.

In both years, students were required to work with their own computers (laptops, tablets or smartphones), in order to have the possibility to easily reproduce the experiments at home.

At the same time, the experiment was made with ERASMUS incoming students, participating in similar classes at UE-Varna.

At "Nicolae Titulescu" University in Bucharest, at the Faculty of Economics we have courses on Statistics for the students in the first year of study and Econometrics for the second year of study for the Bachelor degree. Both courses are accompanied by seminars, part of them using the IT laboratories. We used the facilities of electronic tables (MS EXCEL) for all seminars and in a lesser extent we tried to introduce R during the last academic year for Econometrics seminars. Publicly available

data from various sources was used (National Statistics Institute, Eurostat, World Bank, IMF, Yahoo Finance and so on) as well as synthetic generated data. The format of the data was .xls files and .csv type files with different separators.

One reason why we do not use free software on a larger scale was the requirement of the accreditation agency to prove that we have licensed software (excluding free software). This odd requirement is kept during the 2015-2016 year too but we decided to introduce a new course "Statistical data analysis using R" starting with 1st of October 2015 for the second year of study given the advantages of the free software, especially R in the domain of the data analysis.

2. Outcomes

The first part (electronic table) brought comparatively little surprises, given the fact that students have made an extensive course on using office software in their first study year. Main difficulties for the students consisted in understanding the notion of a "function" in electronic tables and using it, and also in inserting graphs (figures).

Another issue was the decimal point, especially for computers with older OS versions: in Bulgaria, as in most Eastern Europe countries the decimal point is the comma, not the dot. Additional issues came from the encoding - even recently, besides UTF-8, UTF-16 and CP1251 encoding pages are still used.

Results show that students have to exercise at least several times, with different data, in order to finally have the "right" file with all graphs and readable text, especially with real data.

Working with Gretl proved to show no particular difficulties for students.

In the class was used a variety of OS and versions - MS Windows, OS X, Linux (there were no mobile versions of Gretl at that time).

Gretl has a graphical interface, and students are familiar with menus and clicks, so that starting and executing the tests themselves proved not

to be a very difficult task. Certain problems were encountered only in defining and setting data as time series.

In the standard variant of Gretl are implemented the most often used tests - non-stationarity -- Dickey-Fuller, KPSS, Engle-Granger and Johansen - so that no additional software installs were used.

An issue with data transfer were Cyrillic letters and special signs in the names of variables, and also the 8 character limit of names in older versions of Gretl.

Anyway results from tests are presented as listings of figures, their interpretation requires personal effort from students, it's not automatic - thus the question - would understanding of non-stationarity be same or better, if calculations are made in R?

In 2013/2014 in the laboratories R was used instead of Gretl. The major difference to Gretl is that because it does not work from a graphical interface, exact knowledge of the working directory is essential. Students working in Windows environment have some difficulties in getting the "right" directory for data and additional scripts.

We experimented also with the real-time input of data (data from the stock market and forex data, Yahoo archive data was used). For good results, several successful attempts, in different weeks are needed.

As a level of understanding and overall advance in knowledge, results for both academic years were mostly similar.

With ERASMUS students, other issues appeared. Students participating in the "International Finance" course came from multiple countries, mainly from Eastern Europe. Besides the common difficulties (as with Bulgarian students, yet described) other appeared. In some cases (i.e. for Turkish, Russian, Czech and some other languages) functions in electronic tables (especially in MS Excel) were some abbreviations in the local language, not English, and it was practically impossible to work with, in such cases most of the students chose to install the English version of OO Calc and to work with it. For the "special" part, following difficulties with Gretl were encountered:

Most problems created the different decimal point formats. Older

versions of Gretl work only with the dot, newer versions take the general setting for the OS. Transfer of data from an electronic table to Gretl was considered by the students an enormous effort, because it needed recoding.

As with local (Bulgarian) students, also in the ERASMUS students courses results for both study years were similar - as well as in understanding and as overall advance in knowledge.

For Statistics and Econometrics seminars at “Nicolae Titulescu” University in Bucharest we used the facilities of MS Excel for building all kind of charts, we used statistical predefined functions as well as the facilities of the “Data Analysis” package: statistical tests, OLS, ANOVA etc. Using electronic tables poses no difficulties to the students as long as we used standard .xls files as data sources. Importing data from other sources (like .csv files) rises some difficulties if the separators are different from file to file. Another difficulty was related to the decimal separator used in spreadsheets if this is different from the default one. After several exercises these problems have been overcome and the average final results of the students were good.

Trying to replace MS Excel with R for Econometrics seminars during the last academic year raised major difficulties for students. Most of the students were very reluctant working with a command-line software. They had great difficulties identifying the working directory, learning the R functions with many (default) arguments. Generating graphs in R was an almost impossible task for the majority of students. Part of these difficulties were solved introducing RStudio IDE as a support but the general impression among the students was that R is unfriendly and hard to use for student at economics.

Our experiment of using R in the undergraduate studies will continue this academic year with the new “Statistical data analysis using R” course and seminar. We wrote an introductory textbook explaining the basic facilities of R and containing a gentle introduction in using R. We will also have few seminars at the beginning dedicated only to operating in the R environment. After getting familiarized with the R environments

the seminars will focus on basic datatypes and data structures, reading and writing data from/to different types of sources, using predefined functions for descriptive statistics, OLS and logistic regression, Granger causality, cointegration tests and generating graphs.

3. Conclusion

Usage of free econometric software brings more "practice" in teaching. Nowadays multiple data sources are available, and data analysis has to be considered as a must for modern teaching.

And although some difficulties are to be expected, like the common appearing problems with separators, encoding, and command-line operation, they can be relatively easily overcome, especially if students work on their own devices.

Free software helps understanding of data series and gives a significant advance in teaching.

ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА И СТУДЕНТСКИЯ ТРУД

Доц. д-р Зорница Петрова

Катедра „Диференциални уравнения” към ФПМИ на ТУ-София

Резюме. Университетското образование, особено математическото, е свързано с преодоляването на редица трудности. Основните моменти касаят обектите на обучение. Акцентът в настоящата публикация е върху един нов проблем - самофинансирането на образованието от студентите, обучаващи се в България. Тук се съсредоточаваме върху спецификите на този проблем при математическите учебни дисциплини.

Ключови думи: математика, студентски труд.

Въведение

Сред педагогическите научни трудове се забелязва тенденцията към детайлизиране на изследванията в зависимост от обекта на обучение - ученици, студенти, аспиранти и т.н. Освен аудиторията, съществени са и предвидените теми за обучение. В досегашните статии на автора лийтмотивът е бил единствено образователният елемент. Настоящата статия силно се различава от много други педагогически публикации, където се третират въпроси за приложенията на компютрите, за процеса на преподаване и т. н. Новите моменти тук са в икономически план. Ниските доходи в България се отразяват и върху издръжката на огромна част от студентите в нашата страна. Вече средствата от родителите и изобщо от семействата на студентите се оказват недостатъчни за цялостната издръжка на обучаващите се. Нещо повече, преди този проблем не само не беше толкова често срещан, но беше прието да се счита, че е валиден само за следващите в друго населено място заради наеми на квартири и по-скъпа храна. Сега това не е точно така. Например, много от обучаващите се в ТУ-София живеят при родителите си и въпреки това им се налага да работят по време на следването си. Този труд

те полагат почасово, паралелно с обучението си и/или отиват на студентски бригади.

Постановка на проблема

Информацията на различни теми - научни и житейски е достъпна в интернет. Влиянието на този факт при обучението на студентите по математика е разнопосочно.

Новостите в науката растат много бързо и още на студентската скамейка вече се дават научни резултати, публикувани съвсем скоро в журналите - математически, технически и други.

Хорариумът по математика вместо да нараства - намалява. Така в действителност възникват следните проблеми:

1. Отпадат теми от конспектите за изпитите.
2. Някои теми продължават да се четат на лекции, но отпадат от семинарните упражнения.
3. Част от студентите вече влизат и с матури извън математиката, предполагайки знания по нея.
4. Студентите посещават предимно семинарните упражнения и negliжират лекциите.
5. За работещите почасово студенти зимните и летните семестри са еднакво затрудняващи преподаватели и обучавани. Летните семестри страдат от ранното започване на чуждестранните студентски бригади, защото студентите настояват за изтеглени напред изпити, преди да е предаден целият материал.
6. Някои от бакалаврите подценяват университетските знания за бъдещата си професионална реализация. Магистрите са много по-мотивирани полагането на допълнителен труд да не ги оцети като професионална подготовка.

Изброените проблеми са в сила за всички математически дисциплини. Решаването им може да стане и в рамките на самия курс по даден предмет - механично свивайки темите до предвидените часове. Тогава има риск курсът да се окаже непълен особено за

предстоящите специални предмети в техническите университети.

Тези проблеми възникват в комбинация, което е допълнително затруднение. Невъзможно е да се опишат всички такива ситуации. Затова ще се съсредоточим върху дисциплината Висша математика-II (ВМ-II), която е задължителна за бакалаврите от Техническия Университет - София с изключение на Факултета по приложна математика и информатика. Този учебен предмет се изучава през летния семестър.

Илюстрация на проблема към Висша математика-II

Намаляването на часовете по ВМ-II, недостатъчната предварителна математическа подготовка на студентите, слабото им присъствие на лекции и желанието за участие в бригади поставя много въпроси, свързани с целта на тази дисциплина. Вече съвсем отпаднаха темите за числени методи, които са изключително важни за практикуващите инженери. Често тези теми са изнесени в магистърските курсове (Петрова [6]). Хубаво би било да се предвиди и съботно-неделно или паралелно обучение за работещите студенти.

Хорариумът на учебната дисциплина е:

Таблица 1

Хорариум по учебна дисциплина

	Вид на занятията	Семестър	Хорариум	
			Седмично	Общо
1.	Лекции	II	3	45
2.	Семинарни упражнения	II	2	30
3.	Самоподготовка	II	6	90
4.	Форма на контрол-Изпит	II		
	Всичко		11	165
	Кредити	II		6

Самоподготовката е въпрос на съвест и достатъчно време. При почасова работа не е ясно дали и доколко се осъществява. Евентуалното прегрупиране на лекциите и семинарните упражнения може

да подобри ситуацията. Лекционните часове са четиридесет и пет. Ще приведем основните теми, като ще детайлизираме ситуацията само за обикновените диференциални уравнения (ОДУ):

I. Числови редове. Редици и редове от функции (10 часа).

II. Диференциално смятане на функция на две и повече променливи (7 часа).

III. Приложение на анализа в геометрията (7 часа).

IV. Обикновени диференциални уравнения (11 часа).

1. Обикновени диференциални уравнения – основни понятия и теореми (1 час).

2. Диференциални уравнения с отделени променливи и приводими към тях (1 час).

3. Линейни диференциални уравнения от първи ред и приводими към тях (1 час).

4. Линейно диференциално уравнение от n -ти ред. Общо решение на линейно хомогенно диференциално уравнение от n -ти ред (1 час).

5. Линейни хомогенни диференциални уравнения от n -ти ред с постоянни коефициенти (1 час).

6. Линейни нехомогенни диференциални уравнения от n -ти ред. Общо решение. Метод на Лагранж (1 час).

7. Частни решения на нехомогенни линейни диференциални уравнения от n -ти ред с постоянни коефициенти и дясна страна от специален вид (2 часа).

8. Системи диференциални уравнения от първи ред. Привеждане на диференциално уравнение от по-висок ред към система диференциални уравнения от първи ред (1 час).

9. Линейни хомогенни и нехомогенни системи диференциални уравнения от първи ред. Общо решение (1 час).

10. Линейни хомогенни системи диференциални уравнения от първи ред с постоянни коефициенти. Метод на изключването. Метод на Ойлер (1 час).

V. Интегрално смятане на функция на повече променливи (10 часа).

Възможни подходи към проблема

В настоящия век е съвсем уместно да се говори открито с първокурсниците как виждат финансирането на следването си – квартири, храна, облекло, културни мероприятия и др. Самата администрация трябва да следи за посещенията или отсъствията от учебни занятия. Невъзможно е това да се остави като задължение на преподавателите. При системни отсъствия на дадено лице е редно да се изясни причината. Ако е финансова, нека да му се помогне с намиране на работа или улеснение за студентски кредит.

За някои от младежите следването не е свързано с избор на желана професия, а е единствен начин да отидат на бригада в чужбина и/или да бъдат в по-голям град с по-големи възможности за работа. Неуместно е лекторите и асистентите да носят отговорност за предадени празни писмени работи или за провали на изпитите. Важно е да се акцентира върху ролята на математиката за специалните предмети в следването и необходимостта от нея в бъдещата им работа (Петрова [3]). Необходимо е в уеб-страниците на ВУЗ-овете да се качи информация за всеки учебен предмет къде се прилага в другите учебни дисциплини, а също и в бъдещата професионална реализация (Петрова [5]). В [5] изрично е подчертано, че самостоятелното търсене на информация за конкретна терминология в интернет може да доведе до прекалено общи и немотивиращи разяснения. Важно е в зависимост от курса, на изявените студенти да се предлага работа в екип с преподаватели и/или водене на упражнения при по-ниски курсове.

Някои коментари за конспектите

Вече е невъзможно да се намери учебна дисциплина, към която да не могат да се проведат лабораторни занятия с компютри. Все

пак има предмети, при които е съвсем ясна ползата от това. Един от тях беше ВМ-II. Преди години към настоящата ВМ-II, освен семинарните упражнения, бяха предвидени и лабораторни упражнения. Общият хорариум на последните беше 15 часа. В тях присъстваха темите - числено интегриране и числено решаване както на нелинейни уравнения, а също и на системи от линейни алгебрични уравнения, така и на ОДУ и системи от ОДУ. Загубите от закриването на лабораторните занимания бяха коментирани от Петрова [4].

Темите IV.8, IV.9 и IV.10, посветени на системи от ОДУ от първи ред фигурират само при лекциите, но не и при семинарните упражнения. Указаните системи са изключително важни при числените методи за ОДУ. По-точно, много ОДУ от една страна са от повисок ред - обикновено втори ред поради закона на Нютон. От друга страна, при преобладаващите числени методи за ОДУ и за системи от ОДУ е съществено, че става въпрос за първи ред и това налага преминаване от конкретно ОДУ от произволен ред към съответна система от ОДУ от първи ред.

Съвсем логичен е въпросът защо все пак темите IV.8, IV.9 и IV.10 продължават да бъдат в конспекта. Отговорите са два - затвореност на изложението и споменатите предишни лабораторни упражнения към същите лекции. От написания план по ВМ-II е ясно, че е добре студентите самостоятелно да прилагат компютри при задачите за намиране на лица и обеми, защото могат да видят как изглеждат съответните геометрични обекти. Това се оказва полезно и за другите теми оттам. Наистина, Тодоров и Върбанова [8] разглеждат приложението на пакета Derive при преподаването на функцията на две и повече променливи.

Учебният предмет ВМ-II показва в пълна степен един парадокс - колкото повече програмни пакети се прилагат в професионалната дейност, особено на инженерите, толкова повече се налага необходимостта от задълбочени математически знания ([3],[4],[5],[8]).

Актуалността на книгите остава в сила. Младите инженери не трябва да забравят да четат. Специално при университетското ма-

тематическо образование интердисциплинарният подход е съществен. В някои учебници или поредици от тях се прави успешен опит да се даде цялостен поглед към изучавания материал (Анго [1], Goode и Annin [7]). Диференциалните уравнения (ДУ) са особено богат материал. В много книги, посветени на ДУ намират място уводни теми от числените методи (Годунов [2]). Освен това, в книги по числени методи могат да се прочетат и теми за ДУ. Например, Петрова [6] отдели нужното внимание на темите IV.8, IV.9 и IV.10 при детайлното разглеждане на числени методи за ОДУ. Така беше постигната затвореност на изложението в [6], предназначено за магистри.

Окончателно, предметът ВМ-II както като наситено учебно съдържание, така и като специфичност по време на провеждане е ключов. Тук под „време“ имаме предвид:

1. малко време за обемист материал;
2. летен семестър и приближаващи бригади;
3. предназначение за първокурсници.

Последната точка 3 касае факта, че младите хора често са все още твърде близко до училището и притежават малък опит в живота. Затова често те наблягат на желанието да са големи и независими и сами да се издържат и забавляват. Нужни са много старание и интуиция да им се разясни, че времето, отделено за професионално обучение е инвестиция.

Литература

[1] Анго, А. Математика для электро - и радиоинженеров, Наука, Москва (2007).

[2] Годунов, С. Уравнения математической физики, Наука, Москва (1979).

[3] Петрова, З., Преподаването на диференциални уравнения в техническите вузове и мотивацията на студентите за това, в Обучението по Висша математика в техническите и икономическите уни-

верситети'2, Сборник доклади от втората конференция Семково'2006, Ред. В. Пашева и Я. Стоянова, Софттрейд, София (2007), 59 - 63.

[4] Петрова, З., Обучението по математика в ТУ - София и необходимостта от използване на подходящ софтуер, в Обучение по математика в техническите и икономическите университети'3, Сборник доклади от третата конференция Банско'2007, Ред. М. Славкова и Я. Стоянова, Издателство на ТУ- София (2008), 39 - 42.

[5] Петрова, З., Популяризиране на математиката в нематематическите факултети на университетите, Сборник доклади от конференцията „Човекът и вселената”, Смолян, 06-08 октомври (2011), 216 - 219.

[6] Петрова, З., Ръководство по числени методи за студенти-магистри в Електротехническият факултет на Технически Университет- София, Издателство на ТУ- София (2012).

[7] Goode, S., S. Annin, Differential Equations and Linear Algebra, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2007, 3rd edn.

[8] Todorov, M., E. Varbanova, Application of DERIVE in the investigation of explicit functions of two variables, Applications of Mathematics in Engineering'24, eds B. I. Cheshankov and M. D. Todorov, Heron Press, Sofia, (1999), 212 – 218.

МЯСТО И РОЛЯ НА ИКОНОМИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА В НАЦИОНАЛНАТА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА (2006-2015 г.)

*Доц. д-р Росен Николаев, гл. ас. д-р Йордан Петков
Икономически университет – Варна*

Резюме. В настоящия доклад е направен опит да се очертае мястото и ролята на Икономически университет – Варна в най-значимото студентско състезание по математика в България – Националната студентска олимпиада по математика. В тази връзка е проследено представянето на студентите на последните 10 издания на състезанието. Ролята на преподаватели от университета в олимпиадата е демонстрирана чрез подбрани техни задачи, намерили място в състезателните теми. Разгледани са и методически решения на тези задачи.

Ключови думи: образование, HCOM, методология.

Националната студентска олимпиада по математика (HCOM) е най-престижното състезание по математика между студенти от бакалавърски и магистърски програми в страната. Ясен показател за значимостта ѝ е както нарастващият брой участващи университети от България, така и привличането на чуждестранни участници през последните години. Олимпиадата се организира от 1974 г. от висшите училища, Институт по математика и информатика при БАН и Съюз на математиците в България. Целта ѝ е да се повишава интересът на студентите към математиката и да се създават условия за обмен на опит сред преподавателските екипи¹. Форумът събира най-добрите студенти-математици от цялата страна. Съгласно регламента² те се разпределят в три състезателни групи по следните тематични области: *група А* – математика, информатика и компютърни науки; *група Б* – природни и технически науки, сигурност и

¹ Съгласно регламента на HCOM, <https://www.mon.bg> (достъпен към 20.07.2015 г.)

² Пак там.

отбрана; *група В* – всички неизброени в групи *А* и *Б* (вкл. специалности от област 3 на висшето образование, наричани за краткост „икономически специалности“).

Икономически университет – Варна е редовен и един от най-активните участници в НСОМ. Студенти от висшето училище традиционно заемат челни места в група *В*, в която основно се конкурират със Стопански факултет на СУ „Климент Охридски“, а в група *А* също се представят успешно.

Дългогодишен отговорник за провеждане на вътрешните кръгове, за подготовката, както и ръководител на отборите за националната олимпиада е доц. д-р Росен Николаев. От 2006 г. тези функции се изпълняват последователно от гл. ас. д-р Йордан Петков, ас. Ангел Генчев и ас. Невена Господинова. По отношение участието на членове на катедрата в организирането и провеждането на НСОМ, от 2006 г. досега доц. д-р Росен Николаев е неизменно член на Националното жури. От 2009 г. досега той е член и на Националната комисия – основен ръководен орган за организиране и провеждане на олимпиадата.

Настоящият доклад има предимно обзореен характер и цели да представи участието на ИУ-Варна в НСОМ както от страна на студентите-състезатели, така и от страна на преподаватели от катедра „Приложна математика“.

1. Представяне на студентите от ИУ - Варна на НСОМ в периода 2006 - 2015 г.

Ще направим кратка ретроспекция на представянето на студентите от ИУ-Варна на НСОМ през последните 10 години.

На проведената през 2006 г. национална олимпиада ИУ-Варна участва с два отбора – един в група *А* и един в група *В*. В отборното класиране в група *А* отборът на ИУ-Варна заема трето място след СУ „Климент Охридски“ и ПУ „Паисий Хилендарски“. Отборът в група *В* се класира втори след Стопански факултет на СУ, като е спечелено и второ място в индивидуалното класиране.

През 2007 г. в група *А* отборът на ИУ-Варна заема отново трето

място (бронзов медал) след СУ и ПУ, като двама от участниците печелят бронзови медали в индивидуалното класиране. Отборът в група В заема второ отборно място (сребърен медал) след Стопански факултет на СУ. Един от състезателите печели сребърен, а двама – бронзови медали в индивидуалното класиране.

През 2008 г. в група А отборът на ИУ-Варна заема трето отборно място след СУ и ПУ. Отборът в група В се класира на първо място в отборното класиране, като е спечелено първо място и златен медал в индивидуалното класиране.

През 2009 г. ИУ-Варна за първи път участва с три отбора – в групи А, Б и В. В група А отборът на ИУ-Варна заема второ отборно място след СУ със сребърен медал в индивидуалното класиране. В група Б се класира на трето място в отборното класиране след УАСГ и РУ „Ангел Кънчев“, като са спечелени един сребърен и един бронзов медал. Отборът в група В се класира на второ място в отборното класиране, като в индивидуалното класиране са спечелени един златен, един сребърен и два бронзови медала.

На националната студентска олимпиада по математика през 2010 г. ИУ-Варна участва с един отбор в група В, като заема второ място в класирането по висши училища след Стопански факултет на СУ. Спечелени са и две отличия в индивидуалното класиране – сребърен и бронзов медал.

През 2011 г. ИУ-Варна отново участва с един отбор в група В, състоящ се от петима студенти. Спечелени са 2 златни, 2 сребърни и 1 бронзов медал. ИУ-Варна заема първи места в отборното класиране и в класирането по висши училища в тази група.

На домакинската олимпиада през 2012 г. ИУ-Варна участва с общо 7 студента, разпределени в два отбора – един в група А и един в група В. Спечелени са 1 бронзов медал в група А и 2 сребърни и 2 бронзови медала в група В. ИУ-Варна заема трети места в отборното класиране и в класирането по висши училища в група В.

В следващото издание на олимпиадата ИУ-Варна участва с общо 7 студента, разпределени в два отбора – един в група А от

двама студенти и един в група *B* от петима студенти. Спечелени са 1 бронзов медал в група *A* и 1 златен, 1 сребърен и 2 бронзови медала в група *B*. ИУ-Варна заема първи места в отборното класиране и в класирането по висши училища в група *B*.

В състезанието през 2014 г. участват общо 8 студента от университета, разпределени в два отбора – един в група *A* от трима студенти и един в група *B* от петима студенти. Спечелени са 2 бронзови медала в група *A* и 3 сребърни и 1 бронзов медал в група *B*. ИУ-Варна заема първо място в отборното класиране и второ място в класирането по висши училища в група *B*.

Отлично е представянето и на последната олимпиада, проведена през м. май 2015 г., тъй като всички участници от университета завоюват медали. В група *B* са спечелени 1 златен, 2 сребърни и 2 бронзови медала. В тази група ИУ-Варна печели първо място в отборното класиране и първо място в класирането по висши училища. В група *A* двамата наши представители печелят бронзови медали.

Направената равностметка дава основание да оценим представянето на студентите от ИУ-Варна на НСОМ като изключително успешно. В последните 10 издания на олимпиадата те са завоювали общо 44 медала, от които 6 златни (всичките в група *B*), 16 сребърни (14 в група *B* и по един в групи *A* и *B*) и 22 бронзови (13 в група *B* и 9 в група *A*). Освен това отборите на ИУ-Варна са попадали 15 пъти в челната тройка на отборните класирания, като пет пъти са печелили първо място (всичките в група *B*), пет пъти второ място (четири от тях в група *B* и едно в група *A*) и пет пъти трето място (три от тях в група *A* и по едно в групи *B* и *B*). В класирането по висши училища³ имаме 5 призови класирания, от които 3 първи места, 1 второ място и 1 трето място (всичките в група *B*).

³ Класиране по висши училища във всяка от трите състезателни групи се извършва от 2011 г.

2. Участие на преподаватели от катедра „Приложна математика“ в организирането и провеждането на НСОМ в периода 2006-2015 г.

Представители на катедра „Приложна математика“ вземат дейно участие в организирането и провеждането на олимпиадата през годините.

Нашият университет е домакин и основен организатор на НСОМ-2012, която се провежда под патронажа на Ректора на ИУ-Варна. В състезанието участват 120 студенти от 19 висши училища. Това е и първата НСОМ с официално международно участие, което се превръща в традиция през следващите години.

Освен това, както беше споменато в началото, от 2006 г. представител на университета участва неизменно в Националното жури, като 16 задачи, предложени от преподаватели от катедра „Приложна математика“, са избирани в групи *A*, *B* и *B*. Това прави приблизително 18% от всички състезателни задачи за последните 10 години.

При съставянето и предлагането на задачи за НСОМ авторите са се водили от следните свои разбирания, подкрепяни и от други техни колеги⁴:

- задачите за олимпиада трябва да дават възможност за проявяване на творчество и нестандартно мислене от страна на състезателите. Ето защо е желателно те да предполагат наличието на повече от един метод за намиране на решение.

- освен състезателен характер, олимпиадите имат и сериозен принос за повишаване на подготовката на част от студентите и учениците. Затова е важно задачите да бъдат такива, че да имат характер на малко научно изследване, като до решението на състезателна задача следва да се достига с използване на знания от различни дялове на математиката.

В по-нататъшното изложение ще представим на вниманието на

⁴ Гроздев, С. и В. Ненков. Някои методически подходи за съставяне на задачи за олимпиади. „Математика и информатика“, кн. 3, 2014, с. 309-316.

читателя тези задачи⁵, придружени с методически решения⁶.

Задача 1 (НСОМ-2006, група Б). Дадени са точките $A(2,-1,2)$, $B(1,0,-1)$, $C(3,2,1)$, $D(1,-1,0)$ и $E(1,1,1)$. Да се намери обемът на тялото $ABCDE$.

Решение. Уравнението на равнината α , определена от точките A , B и C , е $\alpha: 8x - 4y - 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z - 3 = 0$. Намират се разстоянията от точки D и E до α :

$$|\delta(D, \alpha)| = \left| \frac{2 \cdot 1 - (-1) - 3}{\sqrt{6}} \right| = 0 \Rightarrow D \in \alpha,$$

$$|\delta(E, \alpha)| = \left| \frac{2 \cdot 1 - 1 - 1 - 3}{\sqrt{6}} \right| = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow E \notin \alpha.$$

Изследва се разположението на точките A , B , C , D от равнината α . Фиксира се точка A , разглеждат се векторите $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 3, -1)$, $\overrightarrow{AD} = (-1, 0, -2)$ и се изчисляват векторните произведения

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (8, -4, -4) = 4 \cdot (2, -1, -1),$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-2, 1, 1) = (-1) \cdot (2, -1, -1).$$

Тъй като $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ са ненулеви колинеарни вектори ($\perp \alpha$) с противоположни посоки, то в равнината α точките C и D лежат в различни полуравнини спрямо правата AB . Следователно тялото с върхове дадените точки е пирамида с основа четириъгълникът $ACBD$ и височина $h_E = |\delta(E, \alpha)| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ през върха E . Обемът му е

⁵ Автори на представените задачи са както следва: доц. д-р Росен Николаев – задачи 1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,13,14,15,16; доц. д-р Тодор Стоянов – задача 11 (предложена на Националното жури от доц. д-р Росен Николаев) и гл.ас.д-р Йордан Петков – задача 10.

⁶ В доклада са представени авторовите решения на задачите.

$$V = V_{ABCE} + V_{ABDE} = \frac{h_E}{3}(S_{ABC} + S_{ABD}) = \\ = \frac{\sqrt{6}}{6} \left(\frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| + \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AD}| \right) = \frac{\sqrt{6}}{12} (4\sqrt{6} + \sqrt{6}) = \frac{5}{2}.$$

Забележка. Диагоналите и видът на четириъгълника с върхове в точките A, B, C и D могат да се установят по следния начин. Точките A и B лежат например в равнината $\beta: x+y-1=0$ и ориентираните разстояния от C и D до нея са с различни знаци. Следователно C и D са в различни полуравнини спрямо AB . По същия начин равнината $\gamma: x-2y+4z-3=0$ съдържа точките C, D и точки A и B са в различни полуравнини относно правата CD . Тогава $ACBD$ е изпъкнал четириъгълник с диагонали AB и CD . Ако φ е ъгълът между векторите $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ по диагоналите, то

$$\cos \varphi = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{CD}|} = \frac{(-1, 1, -3) \cdot (-2, -3, -1)}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{14}}, \text{ откъдето}$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{4}{11 \cdot 14}} = \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{14}}. \text{ Тогава}$$

$$S_{ACBD} = \frac{|\overline{AB}| \cdot |\overline{CD}| \sin \varphi}{2} = \frac{\sqrt{11} \cdot \sqrt{14} \cdot 5\sqrt{6}}{2 \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5}{2} \sqrt{6},$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ACBD} \cdot h_E = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{5}{2}.$$

Задача 2 (НСОМ-2006, група В). За кои стойности на реалния параметър a уравнението

$$\begin{vmatrix} e^{-x} & x & 1 & 1 \\ 1 & a & e^{-x} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

има точно два различни корена?

Решение. Умножаваме третия ред на детерминантата по (-1) и

го прибавяме към четвъртия. Развиваме детерминантата по елементите на четвъртия ред:

$$(1-x) \begin{vmatrix} e^{-x} & x & 1 \\ 1 & a & e^{-x} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Получената детерминанта от трети ред развиваме например по правилото на Сарус и получаваме уравнението

$$(1-x)[ae^{-x} + xe^{-x} + 1 - a - x - e^{-2x}] = 0,$$

откъдето

$$(1-x)(e^{-x}-1)(a+x-e^{-x}-1) = 0.$$

Вижда се, че $x=0$ и $x=1$ са корени на последното уравнение. Тогава уравнението $f(x) = a + x - e^{-x} - 1 = 0$ следва да няма корени или да има за корени само 0 и 1. Производната $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$ за $\forall x \Rightarrow f(x)$ е растяща за $\forall x$. Освен това $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, следователно уравнението $f(x) = 0$ има точно един корен x_0 .

$$1) \ x_0 = 0 \Rightarrow a + 0 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow a = 2;$$

$$2) \ x_0 = 1 \Rightarrow a + 1 - \frac{1}{e} - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{e}.$$

$$\text{Окончателно, } a = 2, \ a = \frac{1}{e}.$$

Задача 3 (НСОМ-2007, група Б). Да се докаже, че уравнението

$$\frac{2x}{1+x^4} + \cos x = \frac{\pi}{4} + \sin 1$$

има решение в интервала $(0,1)$.

Решение. Нека $f(x) = \arctg x^2 + \sin x$. За тази функция, в интервала $[0,1]$, са в сила условията от теоремата на Лагранж. Тогава

$\exists c \in (0,1)$, такова, че $f'(c) = f(1) - f(0)$, т.е.

$$\frac{2c}{1+c^4} + \cos c = \frac{\pi}{4} + \sin 1.$$

Забележка. Тъй като функцията $g(x) = \frac{2x}{1+x^4} + \cos x$ е непрекъснатата, може да се пресметне стойността ѝ в някои точки от интервала $[0,1]$. Например $g(0) = 1 < \frac{\pi}{4} + \sin 1$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{17} + \cos \frac{1}{2} > \frac{\pi}{4} + \sin 1$, с което твърдението е доказано⁷.

Задача 4 (НСОМ-2007, група В). През началото на координатната система Oxy и точка $P(t, t^2)$, $t \neq 0$, е построена права p . Точката $M(x_M, y_M)$ е симетрична на точката $N(t, 0)$ относно правата p .

а) Да се изразят координатите x_M и y_M като функции на t .

б) Да се намери най-голямата стойност на $x_M + y_M$ за $t \in [-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

Решение. а) Точка P лежи на параболата $\pi: y = x^2$.
 $MO = ON = t \Rightarrow x_M^2 + y_M^2 = t^2 \quad (1). \quad MP = PN = t^2$
 $\Rightarrow MP^2 = t^4 = (x_M - t)^2 + (y_M - t^2)^2 \quad (2)$. Решава се системата (1) и (2):

$$\begin{cases} x_M^2 + y_M^2 = t^2 \\ x_M^2 - 2tx_M + t^2 + y_M^2 - 2t^2y_M + t^4 = t^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M^2 + y_M^2 = t^2 \\ t(t - x_M - ty_M) = 0 \end{cases}.$$

От $t \neq 0 \Rightarrow x_M = t - ty_M$. Замества се в (1):

$$t^2 - 2t^2y_M + t^2y_M^2 + y_M^2 = t^2 \Leftrightarrow (1+t^2)y_M^2 - 2t^2y_M = 0.$$

Ако $y_M = 0 \Rightarrow x_M = t$ и $M \equiv N$, т.е. не е симетрична на N .

⁷ Този подход, макар и „по-традиционен“, изисква да се оценяват пресметнатите стойности на функцията, което според нас затруднява прилагането му за решаване на конкретната задача.

$$\text{Остава } y_M = \frac{2t^2}{1+t^2} \text{ и } x_M = t - \frac{2t^3}{1+t^2} = \frac{t-t^3}{1+t^2} \Rightarrow M\left(\frac{t-t^3}{1+t^2}, \frac{2t^2}{1+t^2}\right).$$

$$\text{б) } x_M + y_M = \frac{-t^3 + 2t^2 + t}{1+t^2} = f(t).$$

$$f'(t) = \frac{(-3t^2 + 4t + 1)(1+t^2) - 2t(-t^3 + 2t^2 + t)}{(1+t^2)^2} = \frac{(1-t)(t^3 + t^2 + 5t + 1)}{(1+t^2)^2}.$$

Означава се $g(t) = t^3 + t^2 + 5t + 1$, $g'(t) = 3t^2 + 2t + 5 > 0$ за $\forall t$
 $\Rightarrow g(t)$ е растяща и уравнението $g(t) = 0$ има само един корен t_0 .

Тъй като $g(-1) = -4 < 0, g(0) = 1 > 0$, то $t_0 \in (-1, 0)$

$\Rightarrow g(t) = (t - t_0)\phi(t)$, като $\phi(t) > 0$ за $\forall t \Rightarrow$

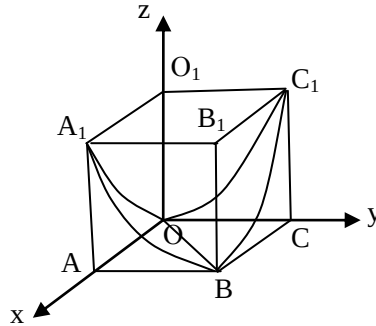
$$f'(t) = (1-t)(t-t_0) \frac{\phi(t)}{(1+t^2)^2}.$$

Функцията $f(x)$ расте за $t \in (t_0, 0) \cup (0, 1)$ и намалява за $t \in (-1, t_0) \cup (1, +\infty)$. Тъй като $f(x)$ е непрекъсната за $\forall t$, $f(-1) = 1$ и $f(1) = 1$, то

$$\max_{t \in [-1, 0) \cup (0, +\infty)} f(t) = f(-1) = f(1) = 1.$$

Задача 5 (НСОМ-2008, група Б). В декартова координатна система точките с координати $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$ са върхове на куб. Да се намери сумата от дължините на кривите, получени от пресичането на стените на куба с повърхнината $z = x^2 + y^2 - 2xy$.

Решение. Повърхнината пресича околните стени на куба в четири еднакви по дължина дъги от параболи - $OA_1: z = x^2$; $OC_1: z = y^2$; $A_1B: z = y^2 - 2y + 1$; $BC_1: z = x^2 - 2x + 1$ и основата $ABCO$ - в отсечката OB , $B(1,1,0)$ (фиг. 1).



Фигура 1

Следователно периметърът P на сечението е равен на четири пъти дължината на дъгата OA_1 плюс дължината на отсечката OB . Като се използва формулата за дължина на дъга от крива:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

се получава:

$$\begin{aligned} 4l &= 4 \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = 4x\sqrt{1 + 4x^2} \Big|_0^1 - 4 \int_0^1 \frac{4x^2}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx = 4\sqrt{5} - 4 \int_0^1 \frac{4x^2 + 1 - 1}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx = \\ &= 4\sqrt{5} - 4 \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx + 4 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx = 4\sqrt{5} - 4l + 2 \ln |2x + \sqrt{1 + 4x^2}| \Big|_0^1, \end{aligned}$$

откъдето

$$4l = 2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}).$$

$$\text{Освен това } |OB| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}.$$

За периметъра на сечението се получава

$$P = \sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}).$$

Задача 6 (НСОМ-2008, група В). Нека

$$D_{2k+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x & 1 & 1 \\ x & x & x & \dots & x & x & 1 \end{vmatrix}.$$

а) Да се намери функцията $f(x) = D_{2k+1}$.

б) Да се реши неравенството $x^{2k+1} + 1 \geq f(x)$.

Решение. а) Умножава се първият ред на детерминантата по $(-x)$ и се прибавя към останалите редове. Така детерминантата се преобразува в триъгълна и

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^{2k}.$$

б) Неравенството е $x^{2k+1} + 1 \geq (1-x)^{2k} \Leftrightarrow x^{2k+1} - (1-x)^{2k} + 1 \geq 0$.

Означава се $g(x) = x^{2k+1} - (1-x)^{2k} + 1$. Тогава

$$g'(x) = (2k+1)x^{2k} + 2k(1-x)^{2k-1}.$$

1) Нека $x < 0$. Следователно $g'(x) > 0$ и функцията $g(x)$ е растяща в интервала $(-\infty, 0)$. Тогава $g(x) < g(0) = 0$ и неравенството не е изпълнено.

2) Нека $x \geq 0$. За $x \in [0, 1)$ $(2k+1)x^{2k} \geq 0$ и $2k(1-x)^{2k-1} > 0 \Rightarrow$ производната $g'(x) \geq 0$. За $x \in [1, +\infty)$ $(2k+1)x^{2k} > 2kx^{2k} \geq 2k(x-1)^{2k-1} \Rightarrow$ производната $g'(x) \geq 0$. Следователно функцията $g(x)$ е растяща в интервала $x \in [0, +\infty)$ и

$g(x) \geq g(0) = 0$. Решението на неравенството е $x \in [0, +\infty)$.

Задача 7 (НСОМ-2009, група В). Дадена е детерминантата

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x-2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x-3 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & x-n+2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-n+1 \end{vmatrix}.$$

а) Да се реши неравенството $D_4(x) \leq 0$.

б) Да се пресметне $D_n(x)$.

Решение. а) Пресмятаме детерминантата

$$D_4(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x-2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix},$$

като умножаваме последователно втория, третия и четвъртия ред по (-1) и го прибавяме съответно към първия, втория и третия ред:

$$D_4(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 2-x & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & 4-x \\ 1 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix}.$$

Тази детерминанта развиваме по елементите на първия стълб и получаваме

$$\begin{aligned} D_4(x) &= (x-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x-1 & 3-x & 0 \\ 0 & x-2 & 4-x \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ x-1 & 3-x & 0 \\ 0 & x-2 & 4-x \end{vmatrix} = \\ &= (x-1)(x-1)(x-2)(x-3) - (2-x)(3-x)(4-x) = \\ &= (x-2)(x-3)(x^2 - x - 3). \end{aligned}$$

Трябва да решим неравенството

$$(x-2)(x-3)(x^2-x-3) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x-3)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \leq 0.$$

$$\text{Следователно } x \in \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 2\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 3\right].$$

б) Преобразуваме детерминантата $D_n(x)$ като всеки ред след първия умножаваме по (-1) и го прибавяме към предходния:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 2-x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 3-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & 4-x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x-n+2 & n-x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-n+1 \end{vmatrix}.$$

Получената детерминанта развиваме по елементите на първия стълб и преобразуваме:

$$D_n(x) = (x-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x-1 & 3-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 4-x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-n+2 & n-x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-n+1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x-1 & 3-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 4-x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-n+2 & n-x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= (x-1)(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) + (-1)^{n+1}(2-x)(3-x)\dots(n-x) = \\
&= (x-2)(x-3)\dots(x-n+1) \left[(x-1)^2 + (-1)^{n+1}(-1)^{n-1}(x-n) \right] = \\
&= (x-2)(x-3)\dots(x-n+1) \left[(x-1)^2 + (-1)^{2n}(x-n) \right] = \\
&= (x-2)(x-3)\dots(x-n+1)(x^2 - x - n + 1).
\end{aligned}$$

Задача 8 (НСОМ-2010, група Б). Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а) } I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{7 + 4\cos 2x + \cos^2 2x} dx;$$

$$\text{б) } I_2 = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{7 + 4\cos 2x + \cos^2 2x} dx.$$

Решение. а) $I_1 = - \int_0^{\pi} \frac{d \cos x}{7 + 4\cos 2x + \cos^2 2x}$. Полага се $\cos x = t$.

Тогава $I_1 = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^4 + t^2 + 1} = \frac{1}{8} \left[\int_{-1}^1 \frac{1-t}{t^2 - t + 1} dt + \int_{-1}^1 \frac{1+t}{t^2 + t + 1} dt \right]$. В първия интеграл се полага $t = u + \frac{1}{2}$, а във втория $t = v - \frac{1}{2}$. Тогава

$$I_1 = \frac{1}{8} \left[\int_{-3/2}^{1/2} \frac{\frac{1}{2} - u}{u^2 + \frac{3}{4}} du + \int_{-1/2}^{3/2} \frac{\frac{1}{2} + v}{v^2 + \frac{3}{4}} dv \right].$$

Във втория интеграл се замества $v = -u$, откъдето

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{8} \left[2 \int_{-3/2}^{1/2} \frac{\frac{1}{2} - u}{u^2 + \frac{3}{4}} du \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \int_{-3/2}^{1/2} \frac{du}{u^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \int_{-3/2}^{1/2} \frac{du^2}{u^2 + \frac{3}{4}} \right] = \\
&= \frac{1}{8} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2u}{\sqrt{3}} \Big|_{-3/2}^{1/2} - \ln \left(u^2 + \frac{3}{4} \right) \Big|_{-3/2}^{1/2} \right] = \frac{\pi\sqrt{3} + 3\ln 3}{24}.
\end{aligned}$$

б) Полага се $x = \pi - t$. Тогава

$$I_2 = \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin t}{7 + 4 \cos 2t + \cos^2 2t} d(\pi - t) = \pi I_1 - I_2, \text{ откъдето}$$

$$I_2 = \frac{\pi}{2} I_1 = \frac{\pi(\pi\sqrt{3} + 3\ln 3)}{48}.$$

Задача 9 (НСОМ-2010, група В). Периодично се внасят суми по сметка при просто годишно олихвяване. В началото на първата година се внася сума K при лихва $p\%$, в началото на втората година се внася сума $\frac{K}{2}$ при лихва $\frac{p}{2}\%$, в началото на третата година се внася сума $\frac{K}{4}$ при лихва $\frac{p}{4}\%$ и т.н. (през всяка следваща година се внася два пъти по-малка сума при два пъти по-малка лихва от предходната година).

а) Ако $K = 1024$ лв. и $p = 12\%$, да се намери сумата L_5 от натрупаните лихви в края на петата година.

б) Ако процесът продължава до безкрайност, да се намери границата $L(K, p)$ на сумата от натрупаните лихви. Ако $K = 1024$ лв. и $p = 12\%$, да се докаже, че от началото на шестата до края на четиридесетата година са натрупани по-малко от 16 лв. лихви.

Решение. Нека $i = \frac{p}{100}$ и $L_n(K, p)$ е сумата от натрупаните лихви в края на n -тата година.

$$\begin{aligned}
L_n(K, p) &= \left(Ki + K \frac{i}{2} + K \frac{i}{2^2} + \dots + K \frac{i}{2^{n-1}} \right) + \left(\frac{K}{2} \frac{i}{2} + \frac{K}{2} \frac{i}{2^2} + \dots + \frac{K}{2} \frac{i}{2^{n-1}} \right) + \\
&+ \left(\frac{K}{2^2} \frac{i}{2^2} + \frac{K}{2^2} \frac{i}{2^3} + \dots + \frac{K}{2^2} \frac{i}{2^{n-1}} \right) + \dots + \left(\frac{K}{2^{n-1}} \frac{i}{2^{n-1}} \right) = \\
&= Ki \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) + \frac{Ki}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) + \frac{Ki}{2^2} \left(\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) + \dots + \\
&+ \frac{Ki}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \right) = Ki \left(1 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^4} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-2}}}{1 - \frac{1}{2}} + \dots + \frac{1}{2^{2n-2}} \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \\
&= 2Ki \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) + \frac{1}{2^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) + \frac{1}{2^4} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n-2}} \right) + \dots + \frac{1}{2^{2n-2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right] = \\
&= 2Ki \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2n-2}} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+2}} - \dots - \frac{1}{2^{2n-1}} \right) = \\
&= 2Ki \left(1 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{1 - \frac{1}{2^2}} - \frac{1}{2^n} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{Ki(2^{2n+1} - 3 \cdot 2^n + 1)}{3 \cdot 2^{2n-2}}.
\end{aligned}$$

$$a) L_5(1024, 12\%) = \frac{1024 \cdot 0,12 \cdot (2^{11} - 3 \cdot 2^5 + 1)}{3 \cdot 2^8} = 312,48 \text{ лв.}$$

$$\begin{aligned}
b) L(K, p) &= \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(K, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Ki(2^{2n+1} - 3 \cdot 2^n + 1)}{3 \cdot 4^{n-1}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Ki}{3} \left(2^3 - \frac{3}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{2n-2}} \right) = \frac{8Ki}{3}.
\end{aligned}$$

$$L(1024, 12\%) = \frac{8 \cdot 1024 \cdot 0,12}{3} = 327,68 \text{ лв.}$$

Но $L_{40}(1024, 12\%) < L(1024, 12\%)$, следователно

$$\begin{aligned}
L_{40}(1024, 12\%) - L_5(1024, 12\%) &< L(1024, 12\%) - L_5(1024, 12\%) = \\
&= 327,68 - 312,48 = 15,20 < 16 \text{ лв.}
\end{aligned}$$

Задача 10 (НСОМ-2012, група А). Нека A и B са произволни $n \times n$ матрици с реални елементи, такива че $A \neq B$, $A^3 = B^3$ и $A^2B = B^2A$. Да се докаже, че матрицата $A^2 + B^2$ е необратима.

Решение. Да допуснем, че матрицата $A^2 + B^2$ притежава обратна матрица. Тогава:

$$\begin{aligned} A - B &= (A^2 + B^2)^{-1} (A^2 + B^2)(A - B) = \\ &= (A^2 + B^2)^{-1} (A^3 - A^2 B + B^2 A - B^3) = (A^2 + B^2)^{-1} \cdot O = O. \end{aligned}$$

Следователно $A = B$, което противоречи на условието, че $A \neq B$.

Задача 11 (НСОМ-2012, група А). Да се докаже неравенството

$$\int_0^1 [(1+x^2)^n + (1-x^2)^n] dx \geq \frac{2^{n+1}}{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение. Да означим лявата страна на неравенството с I_n . С интегриране по части получаваме

$$\begin{aligned} I_n &= x \left[(1+x^2)^n + (1-x^2)^n \right] \Big|_0^1 - 2n \int_0^1 [x^2(1+x^2)^{n-1} - x^2(1-x^2)^{n-1}] dx = \\ &= 2^n - 2n(I_n - I_{n-1}), \end{aligned}$$

т.е. изпълнена е рекурентната връзка

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} + \frac{2^n}{2n+1}.$$

Доказателството на неравенството завършваме с индукция по n . При $n=0$ то се трансформира в равенство ($I_0 = 2$). Нека неравенството е вярно за $n-1$. Тогава верността му за n следва от рекурентната връзка:

$$I_n \geq \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2^n}{2n-1} + \frac{2^n}{2n+1} = \frac{2^{n+1}}{2n+1} \left(\frac{n}{2n-1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{2^{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{4n-1}{4n-2} > \frac{2^{n+1}}{2n+1}.$$

Задача 12 (НСОМ-2012, група В). Да се докаже, че матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ удовлетворява уравнението } A^{2012} + 3^{1005} A^2 = O.$$

Решение. Непосредствено се установява, че $A^6 = -27E$, където E е единичната матрица 2×2 .

Тогава $A^{2012} = A^{2010} A^2 = (A^6)^{335} A^2 = (-3^3 E)^{335} A^2 = -3^{1005} A^2$ и следователно $A^{2012} + 3^{1005} A^2 = -3^{1005} A^2 + 3^{1005} A^2 = 0$.

Задача 13 (НСОМ-2013, група В). Дадени са окръжност $k: x^2 + y^2 = 1$, права $l: y = x + a$ ($a \in \mathbb{R}$) и точка $C(1,0)$, като k и l се пресичат в точките A и B . За кои стойности на a лицето на $\triangle ABC$ е най-голямо?

Решение. Координатите на пресечните точки A и B намираме от системата $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x + a \end{cases}$. Така

$$A\left(\frac{-a - \sqrt{2-a^2}}{2}, \frac{a - \sqrt{2-a^2}}{2}\right), B\left(\frac{-a + \sqrt{2-a^2}}{2}, \frac{a + \sqrt{2-a^2}}{2}\right),$$

като $a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Следователно $AB^2 = 2 - a^2 + 2 - a^2 = 2(2 - a^2)$, а

$$d(C, l) = \frac{|1+a|}{\sqrt{2}}.$$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{2(2-a^2)} \frac{|1+a|}{\sqrt{2}}$ е най-голямо, когато $S_{\triangle ABC}^2$ е най-голямо, следователно трябва да се намери най-голямата стойност на функцията $f(a) = (1+a)^2 (2-a^2)$ за $a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

$$f'(a) = 2(1+a)(2-a^2) - 2a(1+a)^2 = 2(1+a)(-2a^2 - a + 2) = 0,$$

откъдето $a_1 = -1$, $a_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Максималното лице е при $a = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$.

Задача 14 (НСОМ-2014, група Б). Дадени са правите $l_1: 2x - y = 0$, $l_2: 2x + 3y - 4 = 0$ и елипсата $\varepsilon: 4x^2 + y^2 = 8$.

а) Да се намерят координатите на точките $A = l_1 \cap l_2$, $B = l_1 \cap \varepsilon$ и $C = l_2 \cap \varepsilon$, където B е точка от първи квадрант и C е точка от втори квадрант.

б) Да се намери лицето на изпъкналата фигура, оградена от отсечките AB , AC и дъгата BC .

Решение. а) Решаваме системата
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x + 3y - 4 = 0 \end{cases}, \text{ откъдето}$$

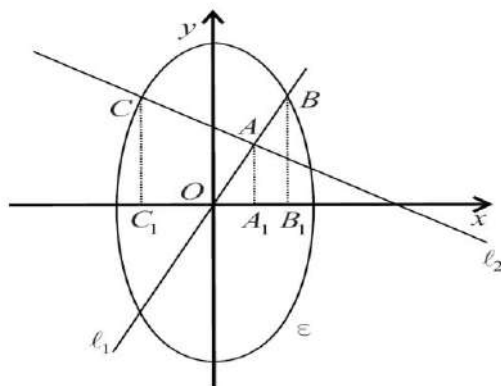
$A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. От системата
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 8 \end{cases}, \text{ при даденото ограничение,}$$

намираме $B(1, 2)$. Аналогично от системата
$$\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \text{ получаваме } C(-1, 2).$$

б) Означаваме съответно с A_1, B_1, C_1 проекциите на точките A , B и C върху абсцисната ос (фиг. 2). Търсеното лице ще намерим като разлика между лицето на фигурата C_1B_1BC и лицата на трапеците C_1A_1AC и A_1B_1BA .

$$S_{C_1A_1AC} = \frac{9}{4}, \quad S_{A_1B_1BA} = \frac{3}{4}, \quad S_{C_1B_1BC} = \int_{-1}^1 \sqrt{8-4x^2} dx = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} dx = 2 + \pi.$$

Тогава търсеното лице е равно на $2 + \pi - \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \pi - 1$.



Фигура 2

Задача 15 (НСОМ-2015, група Б). Дадена е матрицата $A = A(x) = (x-1)I + E$, където E е единичната матрица от трети ред, а I е матрица от трети ред, на която всички елементи са единици.

а) Да се реши уравнението $\det A(x) - e^{2-x} - 3 = 0$.

б) Да се пресметне $A^{2015}(x)$.

в) Да се пресметнат най-малката и най-голямата стойности на функцията

$$f(x) = \det A^n - \det A^{n+1}$$

в интервала $[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. а) Матрицата $A(x)$ е 3×3 и като се използва например правилото на Сарус, се намира $\det A(x) = 3x - 2$. Уравнението има вида $3x - e^{2-x} - 5 = 0$. Непосредствено се установява, че $x = 2$ е решение. Функцията $\varphi(x) = 3x - e^{2-x} - 5$ е непрекъсната и растяща в интервала $(-\infty, +\infty)$ ($\varphi'(x) = 3 + e^{2-x} > 0$), следователно $x = 2$ е единственото решение на уравнението.

б) Очевидно $I^2 = 3I$. По формулата за Нютонов бином получаваме:

$$\begin{aligned}
A^n(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k [(x-1)I]^k E = E + \sum_{k=1}^n C_n^k (x-1)^k I^k = E + \sum_{k=0}^n C_n^k (x-1)^k 3^{k-1} I = \\
&= E + \frac{I}{3} \sum_{k=0}^n C_n^k [3(x-1)]^k \cdot 1^{n-k} - \frac{I}{3} = \frac{1}{3} [(3E - I) + (3x-2)^n I] = \\
&= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} (3x-2)^n + 2 & (3x-2)^n - 1 & (3x-2)^n - 1 \\ (3x-2)^n - 1 & (3x-2)^n + 2 & (3x-2)^n - 1 \\ (3x-2)^n - 1 & (3x-2)^n - 1 & (3x-2)^n + 2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

в) $\det A^n = (3x-2)^n$, $\det A^{n+1} = (3x-2)^{n+1}$. Следователно функцията $f(x) = (3x-2)^n - (3x-2)^{n+1}$, като $f(0) = 3(-2)^n$ и $f(1) = 0$. Производната $f'(x) = 3(3x-2)^{n-1} [3n+2 - (3n+3)x]$ се нулира за

$x = \frac{2}{3} \in (0,1)$ и $x = \frac{3n+2}{3n+3} \in (0,1)$. При n -нечетно $f(x)$ има единствен локален екстремум:

$$f_{\max} \left(\frac{3n+2}{3n+3} \right) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n, \text{ следователно}$$

$$\min_{x \in [0,1]} f(x) = f(0) = 3(-2)^n \quad \text{и} \quad \max_{x \in [0,1]} f(x) = f \left(\frac{3n+2}{3n+3} \right) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

При n -четно $f(x)$ има два локални екстремума: $f_{\min} \left(\frac{2}{3} \right) = 0$ и

$$f_{\max} \left(\frac{3n+2}{3n+3} \right) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n, \text{ следователно}$$

$$\min_{x \in [0,1]} f(x) = f \left(\frac{2}{3} \right) = f(1) = 0 \quad \text{и} \quad \max_{x \in [0,1]} f(x) = f(0) = 3 \cdot 2^n.$$

Задача 16 (НСОМ-2015, група В). Дадени са кривата

$$h: \frac{x^2}{1-b} + \frac{y^2}{b} = 1 \quad (b < 0) \text{ и правата } l: x - 3y = 0, \text{ които се пресичат в}$$

точките A и B . Да се пресметне стойността на параметъра b , за която отсечката AB има минимална дължина.

Решение. Координатите на пресечните точки са решения на

$$\text{системата } \begin{cases} \frac{x^2}{1-b} + \frac{y^2}{b} = 1 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{b(1-b)}{8b+1} \\ x = 3y \end{cases} . \text{ От условието следва, че}$$

тя трябва да има две решения (кривата h пресича правата l в две точки). Понеже по условие $b < 0$, то $b \in \left(-\infty, -\frac{1}{8}\right)$. Пресечните точки

на h и l имат координати: $A\left(\frac{-3b(1-b)}{8b+1}, \frac{-b(1-b)}{8b+1}\right)$ и

$B\left(\frac{3b(1-b)}{8b+1}, \frac{b(1-b)}{8b+1}\right)$, а дължината на отсечката AB е

$|AB| = \sqrt{\frac{40b(1-b)}{8b+1}}$. Трябва да се намери най-малката стойност на

функцията $f(b) = \frac{b(1-b)}{8b+1}$ в интервала $\left(-\infty, -\frac{1}{8}\right)$. Производната

$f'(b) = \frac{-8b^2 - 2b + 1}{(8b+1)^2}$, функцията $f(b)$ намалява в интервала

$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ и расте в интервала $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$. Следователно при $b = -\frac{1}{2}$

има единствен локален екстремум, който се явява и най-малката ѝ стойност.

От представеното дотук можем да заключим, че катедра „Приложна математика” работи активно с талантиливи студенти с интереси в областта на математиката от всички специалности на ИУ – Варна, като тяхната подготовка и участие в Националната олимпиада заемат важна част от нейната дейност. Това намира отражение както при съставяне на учебните програми по задължителните дисциплини, така и при съставяне на учебници и учебни помагала, като целта е нашите студенти да получат същата възможност за подго-

товка както техните колеги от другите висши училища. Не на последно място считаме, че традициите и успехите в това и други подобни състезания са добра мотивация за студентите да работят по-усилено в областта на математиката и средство да се преодолее отливът на желаещи да се занимават с тази наука, което ще даде положително отражение и в другите области на познанието.

РАЗВИВАНЕ НА ТВОРЧЕСКОТО МИСЛЕНЕ ЧРЕЗ ПРЕОПРЕДЕЛЕНИ И НЕОПРЕДЕЛЕНИ ЗАДАЧИ

*Гл. ас. д-р Маргарита Шопова
Стопанска академия "Д. А. Ценов" - Свищов*

Резюме. Обосновано е включването в учебния процес на задачи с недостатъчни, противоречиви или излишни данни. Изяснена е ролята им за стимулиране на творческото мислене на обучаваните в условия на изобилие от информация. Обособени са няколко вида преопределени и неопределени задачи, класифицирани са по нива на сложност, анализирано е мястото им в процеса на обучение.

Ключови думи: творческо мислене, неопределени задачи, преопределени задачи.

Висшето образование все повече се превръща в глобален фактор за общественото развитие, а повишаване качеството на обучението е сред най-важните приоритети пред висшите училища днес. Назряла е необходимостта от създаване на условия за възпитаване на творчески личности, умеещи да възприемат нарастващия поток от информация, да я усвояват, трансформират и получават резултат, предварително поставен като цел. „Съществува огромна нужда от творческо мислене, чрез което да се интерпретират данните по различни начини; да се съчетават данните, за да се извлече максимална полза; да се знае къде да се търсят данни; да се формират хипотези и предположения и т.н.“¹

Стремителният напредък на технологиите и ускореното предаване на информацията между потребителите, характерни за съвременния бизнес, налагат бързо вземане на решения, за да се осигури достатъчно преднина пред конкурента. „Докато информацията ни залива, имаме нужда от подходящи техники за мислене, които да не

¹ Де Боно, Е. Как да развием творческото мислене. С., 2009, с. 17.

ни позволяват да потънем от прекомерна информация². Всичко това изисква да се залага на интензификацията на обучението. Това е възможно чрез оптимизиране на съдържанието на обучението или чрез усъвършенстване на методите на обучение. Обясним е процесът на нарастване ролята на проблемното обучение заради възможностите, които то предлага за изграждането на умения да се решават нестандартни задачи³, каквито по-често предлага бизнес-практиката.

В обучението по математика на задачите винаги се е отреждала водеща роля. И това не е случайно, понеже бъдещата професионална реализация на учащите е свързана с ежедневното решаване на задачи от разнообразно естество. Затова те все повече се използват не толкова като цел, колкото като средство за обучение. Един от недостатъците на съвременното математическо образование е практиката да се решават точно, коректно, еднозначно формулирани задачи. В резултат на това, привикнал с определеността, човек се стъписва в непозната обстановка, пък била тя и некоректна математическа задача или задача, възникнала в резултат на практическа ситуация. Решаването на задачи по време на занятие притежава известна рутинност и оставя малко възможности за творчество у учащия. С течение на времето тази специфика на задачите изработва неправилен шаблон на мислене чрез търсене на стандартната ситуация, в която могат да се приложат известни формули и теореми⁴.

Погледът върху съдържанието на учебниците по висша математика и опитът показват, че включените задачи съществено се различават от тези, с които се сблъсква дипломиралият се специа-

² Малка лилава книга за нестандартното мислене. С., 2010, с. 5.

³ Буланова – Топоркова, М., Духавнева, А., Столяренко, Л. и др. Педагогика и психология высшей школы. Ростов на Дону, 2002, с. 179.

⁴ Белых, С. Л. Управление исследовательской активностью студента: Методическое пособие для преподавателей вузов и методистов (Под ред. А. С. Обухова). Ижевск: УдГУ, 2008, с.42.

лист в професионалната си дейност. Разглеждат се типови, стандартни примери, принадлежащи към определени класове алгоритмично разрешими задачи. Много често те са задания за непосредствено прилагане на някаква формула или готов алгоритъм. За да е в състояние да се справя успешно с реални практически ситуации, е необходимо още в процеса на обучение във висшето училище студентът да бъде подготвян за решаване на нестандартни задачи.

Професионалната дейност предлага както стандартни, така и нестандартни ситуации. Много често е необходимо да се вземе важно решение при непълна информация за разглеждания обект. В други случаи, от потока информация е наложително да се отсее излишното и да се вземе под внимание само това, което е достатъчно за разрешаването на проблема. От друга страна, за решаването на важни задачи не могат да се използват или адаптират известни от по-рано алгоритми. Това изисква подходяща подготовка за успешно справяне с проблема – умение за критичен анализ на обстоятелствата, нешаблонно мислене, сериозно осмисляне на получените резултати. По тази причина нараства необходимостта от обучение, при което се създава възможност за вариационно търсене на решения.

Неоспорима е ролята на преподавателя в реализирането на основните цели на обучението по математика. Ако желае да обучи учащите да решават реални задачи, възникващи в резултат на описани действителни ситуации, той трябва да им покаже как да съставят математически модел; да решат получената математическа задача; да анализират намерените решения, да ги сравнят и да намерят най-рационалното; да извършат съдържателна интерпретация на получения резултат. От изброените дейности обикновено се дава предимство и се определя централна роля на втората⁵. Останалите се засягат в изключително малка степен. Причините са различни, но основната е в непрекъснатия недостиг на време заради натоварената учебна програма. Вниманието и на учащите, и на преподавателя е

⁵ Ганчев, И. Основни учебни дейности в урока по математика, С. 1999, с. 161.

насочено към по-бързото намиране решение на задачата. За предварителния и за заключителния анализ, за изводите, които могат да се направят от изпълненото решение обикновено не остават време и желание, пък и на тях се гледа като на несъществени етапи от решаването на задачата.

На учащите се предлагат задачи, класифицирани по различни признаци: по предназначение (тренировъчни и обучаващи), по наличие на алгоритъм на решението (стандартни и нестандартни), по характера на изискването (за доказателство, за изчисление, конструктивни) и др. Една група задачи обикновено се пропуска – според характера на условието на задачата (определени, неопределени и преопределени). В процеса на обучение се използват почти само определени задачи, т. е. такива, чието условие съдържа точно толкова данни, колкото са достатъчни за получаването на отговора – нито повече, нито по-малко.

Традиционната задача обикновено има едно или няколко определени решения. Възможно е тя да бъде променена по два начина:

- Ако от условието ѝ се пропусне някоя предпоставка, се получава неопределена задача. Тя има безброй много решения, зависещи от безкрайно множество от стойности на величината, на която е принадлежала пропуснатата от условието стойност. Конкретизирането на това множество трябва да стане цел при решаването на такава задача. Тя се реализира чрез задълбочен анализ на текста на задачата и разкриването на взаимовръзката между дадените величини и между техните стойности;

- Ако към условието се добави нов факт за учащите величини, задачата става преопределена. Възможно е допълнителното условие да следва непосредствено от дадените първоначално предпоставки - тогава задачата се оказва определена. Тук от учащия се изискват умения да анализира условието, за да намери в него необходимите данни и да отхвърли излишните. В случай, че допълнителното условие противоречи на основното условие, преопределе-

ната задача няма решение, защото нейните данни са несъвместими. Ако условието не е предварително анализирано, за да се открие противоречивостта в предпоставките, тези задачи обикновено имат красиви решения. За да се установи, че задачата няма решение е достатъчно само да се открие противоречието в условието чрез използване на основни свойства на участващите величини. Така учащите се приучват към предварителен анализ на всяка задача.

Неопределените и преопределените задачи заемат водещо място в класификацията на проблемните задачи. То е обусловено от факта, че за решаването на конкретен проблем е необходимо да се подбере само необходимото и достатъчно количество данни. Значението на този тип задачи е разнопосочно⁶. От гледна точка на конкретното обучение, на емпирично равнище те дават възможност за формиране на осъзнато мислене чрез анализ на условието по отношение на неговата пълнота, откриване на подходящ алгоритъм за решаване на задачата, разкриване на съотношението между излишните данни и получения резултат и др. На абстрактно, теоретично ниво е приносът им за изграждане на умения за дивергентно мислене чрез създаване на опростен модел на задачата, изясняването на въпросите с непротиворечивостта на данните, обучение за издигане на хипотези и проверката им и др.

Неопределените и преопределените задачи безспорно носят в себе си развиваща функция. Преопределените задачи изискват умения да се анализира условието и да се построява решението с помощта на минимално количество данни. Противоречивите задачи задължават да се прави проверка на решението и много внимателно да се анализират данните. Неопределените задачи налагат необходимост от широки познания за обекта на задачата, за връзката му с други математически обекти, които могат да са полезни за получа-

⁶ Безусова, Т. Методика формирования умений решать задачи с избыточными и недостаточными данными. // *Всероссийский журнал научных публикаций*, 2010, ноябрь, выпуск № 1(1), с. 9.

ването на неопределен отговор, но все пак ограничен в някакви рамки.

Как учащите се да бъдат научени да решават задачи от посочените типове и как да бъдат обучени на нестандартни подходи към тях? До успешна рецепта се стига чрез отговор на следните въпроси⁷:

✓ Възможно ли е да се удовлетвори условието? Достатъчно ли е условието за определяне на неизвестното? Или е недостатъчно? Или има излишни предпоставки? Или е противоречиво?

✓ Ако се запази само част от условието, като се елиминира останалата част, в каква степен ще се определи неизвестното? Как то може да се променя?

✓ Всички данни и предпоставки ли са използвани? Взети ли са под внимание всички съществени понятия, съдържащи се в задачата?

✓ Необходимо ли е да се провери резултатът? А ходът на решението?

За завършеност на обучението по определена тема е необходим методически подход по отношение на включените в нея задачи. Целесъобразно е да намерят място и определени, и неопределени, и преопределени задачи. При използването им в обучението биха могли да се обособят четири етапа.

Удачно е да се започне със стандартните, традиционните задачи – определените, които съставят основното съдържание на учебника по математика. Чрез тях учащите усвояват основните алгоритми, добиват умения за типови разсъждения. Всичко това е изключително важно за успешното преодоляване на трудностите на следващите етапи.

На следващия етап се въвеждат преопределените задачи, като в началото учащите са предупредени за излишните условия. След придобиване на съответните навици, може да се продължи с тези задачи (но вече без изрични указания за излишните условия), като

⁷ Пойя, Д. Как да се решава задача. С., 1972.

те се редуват с традиционните определени задачи. По този начин обучаемите подхождат критично към всяка задача, което ги приучава към внимателен анализ на условието на задачата и разнообразни подходи към решаването ѝ.

В определен момент преопределените задачи стават противоречиви. Така учащите разбират, че излишната предпоставка не трябва веднага да се игнорира, а най-напред да се проверява за противоречивост. Полезен извод от ситуацията е, че един предварителен анализ на условието на всяка задача би спестил много излишна работа по решаването ѝ.

Преминаване към неопределените задачи се предприема като заключителен етап от обучението по темата. За да се осъществи плавен преход, най-напред учащите трябва да бъдат предупреждавани за недостигащите предпоставки в условието на задачата. Полезно е да се покаже как те влияят върху отговора на задачата и да се посочват възможните граници на отговора.

За реализиране на формулираните цели е подходящо задачите към всяка тема да се оформят в четири групи (нива):

Задачите от *първо ниво* на сложност са предназначени за непосредствено приложение на някое алгоритмично правило или използването му с незначителни промени. Тук не се препоръчват неопределени задачи, а преопределени задачи се допускат само в случай на лесно използване на излишните данни, за наличието на които е препоръчително учащите се да бъдат предупреждавани.

Задачите от *второто ниво* на сложност трябва да имат следните отличителни черти: задачата притежава излишно условие, което не противоречи на останалите, поради което тя се решава еднозначно, като от всички данни се избират и използват само необходимите; условието на задачата може да бъде определено или с излишни данни, но съдържа противоречие; условието на задачата е определено, но в сравнение със задачите от първо ниво се прилагат по-сложни методи за решаване.

Задачите от *третото ниво* на сложност са още по-

разнообразни. За решаването им от учащите се изисква по-голям обем от знания, наличие на способности за комбинативни разсъждения. Като добавка към сложността на методите на решаване, в условието на задачите може да се включи неопределеност, водеща до нееднозначен отговор.

Задачите от *четвърто ниво* имат в условието си неопределеност, която предполага в решенията им безкрайно множество от отговори. Формулираната по този начин задача учащите често определят като неразрешима, защото не достигат данни, макар че решението може да се извърши и да се получи достатъчно коректен резултат.

Математическите задачи са важно средство за формиране на математическата култура на учащите. Те са неразделна част от съзнателното и трайно усвояване на системата от математически знания, умения и навици. Безспорна е целесъобразността от въвеждането и решаването на неопределени и преопределени задачи в курса по математика. Те разширяват възможностите на учащите въобще да решават задачи, задълбочават и усъвършенстват навиците им за търсене на решение на всяка задача и в резултат на това – развиват мисленето им. Това поражда необходимост от прилагането на специфични методически подходи в подготовката за решаване на такива задачи.

Без творческо мислене не могат да се генерират нови идеи, както и да се разработват, анализират и избират подходящи решения на конкретни проблеми. Затова изграждането на умения за творческо мислене трябва да бъде неотделима част от процеса на обучение.

САМОСТОЯТЕЛНАТА РАБОТА НА СТУДЕНТИТЕ В ПРОЦЕСА НА ОБУЧЕНИЕ ВЪВ ВИСШЕТО УЧИЛИЩЕ

Гл. ас. д-р *Лиляна Каракашева-Йончева*

Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“

Резюме. Разкрива се същността на самостоятелната работа на студента. Посочват се някои възможности за активизиране на студентите за успешно изпълнение на самостоятелната работа, разглеждана като отделна форма на обучение. Изброени са по-важните функции на тази форма на обучение. Формулирани са редица изисквания за ефективност на самостоятелната работа по математическите дисциплини във висшето училище.

Ключови думи: самостоятелна работа на студента, форма на обучение във висшето училище, ефективност на самостоятелната работа във висшето училище.

Увод

Прегледът на учебните програми по математическите дисциплини във висшето училище след 1990 година показва, че се редуцира аудиторната заетост. Броят на часовете за контактното обучение сега е намален с повече от 30% спрямо периода 1990 – 2003 за сметка на появилата се нова форма на обучение – самостоятелна работа на студента. Появилата се *нова официално регламентирана форма на обучение* в българското висше училище реализира образователните идеи за създаване на условия за формиране на активни и самостоятелни личности с престижен професионален статус. На практика обаче не е решен проблемът за рационалната организация на тази форма на обучение, липсва научно обоснована и добре разработена теория за нея. И в резултат, в реалната учебна практика не се използват пълноценно познавателните възможности на самостоятелната работа на студентите в процеса на обучение във висшето училище.

В края на XIX и началото на XX век редица изследвания на Дж. Дюи и Е. Паркхърт от САЩ, Р. Кузине и С. Френе от Франция, Р. Щайнер и П. Петерсен от Германия, П. Блонски и А. Луначарски от Русия са насочени към разглеждане на самодейността и самостоятелността на учащите се в обучението, полагайки основите на субект – субектната педагогика. В края на XX век П. Пидкасисти, Б. Есипов, И. Огородников, М. Скаткин, И. Малкин, Н. Дайри, Н. Половникова, О. Нилсон, Р. Лемберг, И. Лернер, М. Андреев, П. Петров и много други изследователи анализират този дидактически проблем за целите на класно – урочната система в средното училище.

Дидактически, гносеологически и психологически изследвания показват, че влиянието на обучението върху развитието на студентите се обуславя не само от съдържанието на изучаваните учебни дисциплини, а и от характера на познавателната и практическата дейност, в резултат на която се усвояват знания и се формират умения и компетенции. Именно при обучение с добре организирана и управлявана самостоятелна работа се развиват най-пълноценно способностите на учащите се.

Съществуват немалко публикации, които са посветени на самостоятелната работа на студентите. Прегледът им показва, че както в дидактическата, така и в андрагогическата литература няма единство между изследователите за нейния статут. Някои автори я разглеждат като форма на учебна работа, а други я отнасят към методите на обучение. Самостоятелната работа с учебник или с друга научна литература може да се отнесе към методите на обучение, но „когато се характеризира самостоятелната работа като цяло, тя следва да се определя преди всичко като особен вид дейност (фронтална, групова, индивидуална)“ [9, с. 424].

Оптимизирането на процеса на обучение във висшето училище е свързано и с усъвършенстване на организацията на самостоятелната работа на студентите. Затова разкриването на същността на самостоятелната работа на студентите, нейната структура, особе-

ности и закономерности ще подпомогне процеса на организацията и управлението ѝ.

В това научно съобщение ние ще се опитаме, макар и съвсем накратко, да посочим някои особености на самостоятелната работа на студента, както и някои съществени признаци на тази форма на обучение във висшето училище.

Изложение

А. Г. Молибог разглежда самостоятелната работа като форма на учебна работа. Според този изследовател “самостоятелната работа е основа на всяко образование, особено на висшето. При подготовката на творческия специалист всички останали форми на учебна работа са само спомагателни с една или друга степен на важност“ [7, с.140].

И. Лернер и М. Скаткин в [10], М. Андреев в [1] считат, че самостоятелната работа е вид дейност на учащите се, която може да бъде както индивидуална, така и групова, при която те проявяват активност, инициативност, самостоятелно обмисляне. М. Андреев отбелязва, че „трябва да се прави разграничение между самостоятелността на ученика като характеристика на интелектуалната му дейност и самостоятелната работа като средство за формиране на тази характеристика. Не самостоятелността на интелектуалната дейност, а самостоятелната работа на учениците подлежи на дидактическа функционална технологична организация. Когато не се разграничават тези две категории, лесно могат да се допускат грешки при анализа им и да им се приписват особености, които всъщност не им принадлежат“ [1, с.366].

Задълбочени изследвания за разкриване на същността и структурата на самостоятелната познавателна дейност на учащите се провежда П. И. Пидкасисти. Руският изследовател разглежда самостоятелната познавателна дейност като система, състояща се главно от три компонента: *съдържателен*, който включва знанията;

оперативен, който включва разностранни действия, умения и навици; *резултативен*, включващ нови знания и нов опит. Авторът смята, че самостоятелната работа не е нито форма за организация на учебни занятия, нито метод на обучение. Тя е „средство за въвличане на учениците в самостоятелна познавателна дейност, средство за нейната логическа и психологическа организация. Самостоятелната работа е средство за организация и изпълнение от учениците на определена дейност в съответствие с поставените цели“ [11, с.147].

Самостоятелната работа на студента се отличава от самостоятелната работа на ученика в средното училище не само по количество, но преди всичко по качество. И докато учениците, благодарение на самостоятелната работа затвърдяват изучавания материал, то за студентите изискванията са много повече. Някои от съществениите признаци на самостоятелната работа на студентите са: наличие на мотиви въз основа на осъзнаване на целта на работата, отговорност, самооценка и самоконтрол. В различните образователни степени във висшето училище – бакалавър или магистър, самостоятелната работа е разнообразна по форма и съдържание.

Ние приемаме *самостоятелната работа на студента* не само като форма на обучение, а като *неделима съставка* на останалите основни организационни форми на обучение по математическите дисциплини във висшето училище, каквито са лекцията и семинарното упражнение. И в този смисъл организацията на самостоятелната работа на студента има многостранен характер и успешната ѝ реализация зависи от съвместната дейност на преподаватели и студенти. В този аспект самостоятелната работа на студента се разглежда като взаимосвързана и взаимозависима дейност на преподаватели и студенти, независимо дали е пряко или косвено ръководена. Самостоятелната работа на студента като важна съставка на учебно – научния процес във висшето училище не само че не намалява ръководната роля на преподавателя, а може да се каже, че се повишават изискванията към него.

Самостоятелната работа от една страна е учебно задание, кое-

то преподавателят подготвя (на хартиен носител или в електронен вариант) съобразно учебните цели на разглежданата тема и предлага на студентите за изпълнение. Това изпълнение може да бъде под ръководството на преподавателя по време на лекции или на семинарните упражнения, а може да бъде реализирано и без пряко ръководство в извън аудиторно време. От друга страна, самостоятелната работа се явява форма на проявление на съответните умствени действия при извършване на редица математически дейности от страна на студента. При това трябва да се подчертае, че една характерна особеност на самостоятелната работа е тази, че студентите съзнателно, а не механично извършват редица познавателни действия, за да успеят да решат поставените им задачи. Степента на самостоятелност съществено зависи от характера на заданието, но зависи и от равнището на развитие на студентите, от техните индивидуални интелектуални възможности. Затова заданията за самостоятелна работа трябва да са добре обмислени, дозираны, някои задачи да бъдат снабдени с упътвания, за да подпомогнат и да стимулират студентите да работят активно с необходимите интелектуални усилия[6]. Така всъщност достигаем до връзката на дидактическото понятие „самостоятелност“ с понятието „активност“. Именно един от съществените признаци на модернизацията на българското висше образование е поставянето на акцент върху познавателната активност на студента. И това е така, защото умения и компетенции могат да се формират само при активно участие на студентите в разнообразни познавателни дейности, които най-пълноценно се реализират в рамките на самостоятелната работа. Според М. Андреев „същността на активността на познавателната дейност се състои в отразително-преобразуващото отношение на ученика към обекта на познанието – учебния материал“[1, с.124]. Затова превръщането на учащия в субект на познавателния процес е основна характеристика на активното обучение. Всъщност обучението във висшето училище ние разглеждаме именно като активно обучение, в центъра на което е поставен студентът с неговите инте-

реси, познавателен опит, потребности, бъдеща професионална реализация и пр. Пълноценното овладяване на знанията е възможно само тогава, когато се постигне оптимално съотношение и съчетание между обучаващата дейност на университетския преподавател и самостоятелната дейност на студентите. Самостоятелната работа на студента винаги е съществувала, но невинаги е била разглеждана като отделна форма на обучение в учебната програма. Сега ние търсим някои *съвременни ориентири* така, че тя да бъде организирана и управлявана по-успешно предвид масовизирането на висшето образование у нас.

Ползвайки достиженията на дидактиката, можем да посочим някои по-важни условия за активизиране на студентите за по-успешно изпълнение на самостоятелната работа. Според нас тези *условия* могат да бъдат групирани по следния начин:

- Създаване на положителни мотиви за учене и поддържане интереса към разглежданото учебно съдържание. Умело съчетаване на учебните дейности, които се извършват в аудиторно и извън аудиторно време. Включване на студентите в научни семинари към катедрите, в изследователски проекти, стимулиране и подпомагане участието им в студентски научни сесии, участие в национални и международни състезания;

- Формиране на учебна среда, в която студенти и преподаватели са партньори в процеса на обучение, разкриване на идеите, които са заложили в разглежданото учебно съдържание, на връзките между изучаваните математически знания и бъдещата професионална реализация на студентите [5];

- Създаване на условия за изживяване на удовлетвореност от изпълнените самостоятелни задания;

- Използване на възможностите на интерактивните методи за обучение [3] ;

- Разнообразяване на упражненията и ползване на проблемни въпроси при обсъждане плана за решаване на конкретен тип задачи,

там, където е възможно, използване възможностите на проблемното обучение в семинарните упражнения;

- Приложение на индивидуализацията и диференциацията в обучението, особено за студентите от първи курс [4];
- Използване възможностите на информационните и комуникационните технологии за комуникация със студентите, например активно ползване на електронната поща.

Важният извод, до който достига П. Пидкасисти е, че предмет на дейността във всеки вид самостоятелна работа е проблемът или задачата, която учащият трябва да реши. Самостоятелната познавателна и практическа дейност съдържа в себе си необходимостта от прилагане на налични знания и/или прилагане на нови знания чрез известни начини, от търсенето на нови пътища и начини за добиване на знания, т. е. имат място двата основни процеса: възпроизвеждане и творчество. Често решения на задачи или на проблеми съдържат в себе си и двата процеса. Чрез тези решения „ученикът изработва у себе си стремеж към изследователско познание, формира нови операции и способности за умствени действия или пренася по-рано усвоени знания и операции за умствени действия с нов материал. Само такъв подход към разглеждането на същността и ролята на самостоятелната работа на учащите позволява да се снемат антитезата между външната обусловеност на самостоятелната работа в учебния процес и нейната вътрешна същност, която обуславя развитието и оптималното проявяване в дейността на ученика на истинска познавателна активност и самостоятелност, развитие на неговите познавателните способности“ [11, с.149].

Така въз основа на проучването на дидактическата, психологическата и методическата литература можем да опишем нашето *определение на понятието* в съвременния образователен контекст. **Самостоятелната работа на студента** представлява целенасочена и съзнателна дейност на студента, в резултат на която той изпълнява редица индивидуални умствени действия, които могат да бъдат

съчетани и с практически действия, и има за очакван резултат достигане до по-високо (за студента) познавателно равнище.

Ще посочим някои *функции* на самостоятелната работа във висшето училище:

- Информационна – откриване, систематизиране на различна информация по даден проблем;
- Изследователска – проучване на различни изследвания по даден проблем;
- Творческа – възможност за изразяване на лично становище по дискутиран проблем;
- Развиваща – развиване на мисленето;
- Организационна – формиране у студентите на организационна култура;
- Ориентировъчна – ориентация в професионалната област за кариерно развитие.

За да изпълни обаче пълноценно своите функции самостоятелната работа на студента като форма на обучение с двете си разновидности трябва да бъде планирана, организирана и управлявана от преподавателя.

За да бъде по-успешна самостоятелната работа във висшето училище, е необходимо тя да отговаря на определени *условия*:

- Да е налице съответствие на съдържанието на самостоятелната работа с изучаваното учебно съдържание;
- Задачите в нея да са разнообразни по цели и съдържание и да са съобразени с равнището на подготовка на студента;
- Да е организирана в система;
- Да бъде дозирана по обем;
- Да се предхожда от указания за изпълнението ѝ, да се съпътства с достъпна литература за ползване;
- Да има вариативност във формите за възлагането ѝ;
- Самостоятелната работа в определени етапи може да се съобрази и с индивидуалните трудности, които срещат някои студен-

ти в усвояването на нови знания;

- Да бъде диференцирана чрез увеличаване на обема и/или чрез усложняване на съдържанието на задачите;
- Всеки студент да може да изпълнява самостоятелната си работа със собствен темп, но в определения срок;
- Да се извършва периодична проверка на някои задания за самостоятелна работа или на етапи от нейното изпълнение;
- Да се провежда обективен анализ на получените резултати от самостоятелната работа;
- Да се стимулират самоконтролът и самооценката на студента.

Самостоятелната работа на студента се разглежда основно с нейните две разновидности – самостоятелна работа на студента под ръководството на преподавателя и студентска самостоятелна работа. При изучаването на математическите дисциплини във висшето училище важно място заема самостоятелната работа на студентите за осмисляне, разбиране и запомняне на математическите понятия и твърдения и самостоятелната работа на студентите при прилагане на математическите знания за решаване на задачи. Студентската самостоятелна работа е такава самостоятелна работа, която се организира от преподавателя, но се осъществява без неговото пряко ръководство. Такава самостоятелна работа може да бъде диференцирана по различни показатели по преценка на преподавателя. Може да се задава след изучаване на дадена тема или раздел от учебното съдържание. Такава самостоятелна работа способства за затвърдяване на новите умения, а така също и за подготовка за текущ и финален контрол.

Ние ще разгледаме някои примери от учебното съдържание по Математически анализ за организиране на самостоятелната работа на студентите под ръководството на преподавателя при изучаване на математически твърдения.

1. При разглеждане на темата „Свойства на определения интеграл“ след формулиране и доказване на **теоремата**: Ако $f(x)$ е

неотрицателна и интегрируема функция в $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, е удачно да се постави за самостоятелна работа на студентите следната **задача**: *Да се формулира обратното твърдение и да се установи верността му.*

Известно е, че да се установи верността на дадено твърдение, трябва да се извърши доказателство на това твърдение, което е едно добро упражнение в дедуктивни разсъждения. За да се установи, че твърдението е невярно, е достатъчно да се посочи контрапример. Конструирането на такива примери развива критическото мислене у студентите, но често ги затруднява. В случая можем да дадем упътване към поставената задача: например да се разгледа функция $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, която е дефинирана чрез:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ако } x \in [0, 1] \\ -1, & \text{ако } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

На следващата лекция или по време на колоквиум върху разгледа може да се беседва по поставените задачи за самостоятелна работа и да се изисква да се приведат и други контрапримери.

Тук бихме искали да припомним един съвет от Д. Хилберт, който той дал на Х.Вайл: „Започвай от най-простите примери“ [по 8, с.138].

2. За съзнателното усвояване на една теорема важно място заема коментарът за *същественост* на условията.

Интересно е да се отбележи, че всичките условия в теоремата на Рол са *съществени* за валидността на заключението ѝ. Да припомним нейната формулировка:

Теорема (Рол). Нека функцията $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъснатата в $[a, b]$, диференцируема в (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогава съществува точка $c \in (a, b)$, такава, че $f'(c) = 0$.

За самостоятелна работа под ръководството на преподавателя може да се разгледа следната задача.

Задача. *Да се провери изпълнени ли са условията на теоремата на Рол за следните функции:*

- 1) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{ако } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{ако } x = 0 \end{cases};$
- 2) $g(x) = |x|$ за $x \in [-1, 1];$
- 3) $h(x) = x$ за $x \in [0, 1];$
- 4) $\varphi(x) = \ln(\sin x)$ за $x \in \left[\frac{\pi}{6}, 5\frac{\pi}{6}\right].$

Функцията f , която е дефинирана върху интервала $[0, 1]$, удовлетворява всички условия в теоремата на Рол с изключение на изискването за непрекъснатост в точката $x = 0$. И затова не съществува точка $c \in (0, 1)$ такава, че $f'(c) = 0$.

Функцията g , която е дефинирана върху интервала $[-1, 1]$, удовлетворява всички условия в теоремата на Рол с изключение на изискването за диференцируемост в $(-1, 1)$, което е нарушено само в една точка (точката $x = 0$). И затова не съществува точка $c \in (-1, 1)$ такава, че $g'(c) = 0$.

Функцията h , дефинирана върху интервала $[0, 1]$, удовлетворява всички условия в теоремата на Рол, но без условието $h(a) = h(b)$ ($h(0) \neq h(1)$). И затова не съществува точка $c \in (0, 1)$ такава, че $h'(c) = 0$.

Разгледаните примери могат да се илюстрират графично. Те показват, че условията в теоремата на Рол са съществени.

Функцията φ е дефинирана и непрекъсната в интервала $\left[\frac{\pi}{6}, 5\frac{\pi}{6}\right]$ като композиция от непрекъснати функции ($\sin x > 0$ за $x \in \left[\frac{\pi}{6}, 5\frac{\pi}{6}\right]$). Тази функция е диференцируема в този интервал и $\varphi'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot gx$. Да пресметнем $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln \sin \frac{\pi}{6} = -\ln 2 = \ln \sin \frac{5\pi}{6}$.

Така установихме, че тази функция удовлетворява всички условия от теоремата на Рол и може да се твърди, че съществува точка $c \in \left(\frac{\pi}{6}, 5\frac{\pi}{6}\right)$ такава, че $\varphi'(c) = 0$. В случая тази точка е $c = \frac{\pi}{2}$.

И така, при изучаване на теоремите често трябва да задаваме въпроса: „Вярно ли е обратното твърдение?“ За установяване не-

верността на обратното твърдение се конструира контрапример. При обосноваване същественост на условията в дадена теорема отново възниква потребността от конструирание на контрапримери. Дейността по конструирание на контрапримери по своята същност е евристична. Затова изучавайки математическите твърдения, студентите трябва да умеят да доказват тези твърдения, но и да привеждат контрапримери. И докато доказателствата на теоремите са изложени в учебниците и обикновено подробно се коментират на лекции, то за конструирането на контрапримери правила няма. Затова процесът по усвояване на математическите твърдения трябва така да бъде организиран от преподавателите, че да се подпомага формирането на тези умения чрез организиране на подходящи дейности. Част от тези дейности трябва да се извършват *самостоятелно от студентите*, като резултатите от тези дейности се обсъждат съвместно с преподавателите.

Сега ще разгледаме някои примери за студентска самостоятелна работа за овладяване и затвърдяване на нови знания и умения. След изучаване на темата „Производна на функция на една реална променлива“ е интересно да се установи запазва ли се свойството четност/нечетност, периодичност, ограниченост/неограниченост при диференциране на функция.

Уместно е да се зададе следната примерна *система от задачи за самостоятелна работа*.

Задача 1. а) Докажете, че ако $f(x)$ е четна (нечетна) диференцируема функция, то f' е нечетна (четна) функция;

б) Посочете пример за диференцируема функция, която не е нечетна, но нейната производна е четна.

Решение: а) Нека функцията f е четна в D . Тогава полагайки $x = x_0 + h$, където $x_0 \in D$, а h е такова, че $x = x_0 + h \in D$ имаме, че

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x_0 - h) - f(-x_0)}{-h} = -f'(-x_0).$$

Тогава от равенството $f'(x) = -f'(-x)$ следва, че f' е нечетна функция.

Нека функцията f е нечетна в D . Тогава полагайки $x = x_0 + h$, където $x_0 \in D$, а h е такова, че $x = x_0 + h \in D$ имаме, че

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(-x_0 - h) + f(-x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x_0 - h) - f(-x_0)}{-h} =$$

$$= f'(-x_0).$$

Тогава от равенството $f'(x) = f'(-x)$ следва, че f' е четна функция.

б) Желаният пример може да бъде функцията $f(x) = x^5 + 1$, за която $f'(x) = 5x^4$.

Задача 2. Докажете, че ако функцията f е периодична с период T и диференцируема, то f' е периодична със същия период. Вярно ли е обратното?

Решение: Щом f е периодична с период T , то $f(x+T) = f(x)$. Диференцирайки това равенство, получаваме: $f'(x+T) = f'(x)$.

Обратното не е вярно. Функцията $f(x) = x + \sin x$, дефинирана за всяко реално x , не е периодична. Но нейната производна $f'(x) = 1 + \cos x$ е периодична с период 2π , т.е. съществуват непериодични функции с периодични производни.

Задача 3. Съществува ли функция, която е ограничена и диференцируема върху $\mathbb{R}$, чиято производна върху $\mathbb{R}$ е функция, която

не е ограничена.

Отговор: Например функцията $f(x) = \sin x^2$.

Задача 4. Покажете, че свойството функцията да бъде неограничена върху множеството $\mathbb{R}$ при диференциране, не се запазва.

Отговор: Функцията $f(x) = 2x$ е неограничена върху множеството $\mathbb{R}$, но производната ѝ $f'(x) = 2$ е ограничена.

Задача 5. Докажете, че всяка неограничена и диференцируема функция в крайния интервал (a, b) има производна, която е също неограничена функция в интервала (a, b) .

Решение: Нека f не е ограничена в интервала (a, b) , а f' е ограничена функция в този интервал. Значи $\exists A > 0 : |f'(x)| < A$. Нека x_1 е произволна точка от (a, b) . Тогава за всяка точка x от (a, b) имаме, че $[x_1, x] \subset (a, b)$ и за интервала $[x_1, x] \subset (a, b)$ е приложима теоремата на Лагранж: $\exists c \in (x_1, x)$, такова, че

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c), \text{ откъдето } f(x) - f(x_1) = f'(c)(x - x_1),$$

следователно $|f(x) - f(x_1)| = |f'(c)| |x - x_1| \leq A |x - x_1|$.

Оттук получаваме $|f(x)| \leq |f(x_1)| + A |x - x_1|$, т.е. че функцията f е ограничена, което противоречи на условието на задачата.

Заклучение

Според известния руски математик и талантилив педагог Лев Кудрявцев „резултатът от обучението се оценява не по количеството съобщена информация, а по качеството на усвояването ѝ, по умението тя да се използва и по развитието на способностите на обучавания за по-нататъшно самостоятелно образование“ [8, с.20].

Правилно планираната и рационално организираната самостоятелна работа на студентите способства за:

- ✓ качествено усвояване на новите математически знания;

- ✓ формиране на умения за прилагане на математическите знания;
- ✓ подпомагане на самостоятелното учене.

Благодарност. Тези изследвания са извършени с подкрепата на фонд „Научни изследвания“ при Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“, по проект РД-08-273/11.03.2015г.

Литература

1. **Андреев, М.** Процесът на обучението, Дидактика, Университетско издателство “Свети Климент Охридски”, С., 1996.
2. **Радев, Пл.** Обща дидактика или събития, ситуации, обекти, субекти, конструкти и референти в училищното обучение и образование, Университетско издателство “Паисий Хилендарски”, Пл., 2005.
3. **Каракашева, Л.** Стимулиране активността на студентите в процеса на обучение чрез използване на интерактивни методи, списание „Математика и информатика“, бр. 1, 2015, с.58–68.
4. **Каракашева, Л.** Диференциацията в университетското обучение по Математика като фактор за повишаване на математическата компетентност на студентите – бъдещи начални учители, Научни трудове на Русенски университет „Ангел Кънчев“, Том 52, серия 6.1 Математика, информатика и физика, Русе, 2013, с.11–15.
5. **Каракашева, Л.** Съвременен модел на семинарни упражнения, осигуряващ повишаване ефективността на обучението по Математически анализ, Сборник „Математика и математическо образование“, София, 2012, с.351–358.
6. **Каракашева, Л.** Организация самостоятельной работы студентов по математическому анализу, Збірник наукових праць, Випуск IX, „Теорія та методики навчання математики, фізики,

інформатики “, Кривий Ріг, Україна, 2011, с. 67– 70.

7. **Молибг, А.Г.** Вопросы научной организации педагогического труда в высшей школе, Высшая школа, М., 1971.

8. **Кудрявцев, Л. Д.** Мисли за съвременната математика и нейното изучаване, Издателство „Техника“, С., 1982.

9. **Петров, П.** Дидактика, Веда Словена-Ж.Г, С., 1998.

10. **Петров, П., Лернер, И.** Познавателната самостоятелност на учениците, Народна просвета, С., 1977.

11. **Пидкасистый, П. И.** Самостоятельная познавательная деятельность школьников в обучении, Педагогика, М., 1980.

ВХОДНОТО НИВО ПО МАТЕМАТИКА НА СТУДЕНТИТЕ ПЪРВОКУРСНИЦИ ПО СПЕЦИАЛНОСТИ ОТ НАПРАВЛЕНИЕ ИКОНОМИКА

Гл. ас. д-р Деян Михайлов
Икономически университет – Варна

Резюме. Докладът представя проведено изследване за предварителната подготовка в областта на елементарната математика на студенти-първокурсници от Икономически университет-Варна. Установено е несъответствие между оценките от дипломите за завършено средно образование и притежаваните знания и умения. Предлагат се някои мерки за преодоляване на изоставането на студентите.

Ключови думи: обучение по математика, входно ниво.

Една от фундаменталните дисциплини в учебните планове за подготовка на бакалаври по професионално направление „Икономика” е математиката. При това се предполага, че завършилите средно образование притежават необходимите знания и умения в съответствие с учебните програми по математика за основните и средните училища¹. Учебната програма по математика в Икономически университет – Варна има за цел достигане на определено желано състояние, като се надграждат получените в средното училище знания и умения.

През последните години студентите-първокурсници са със забележимо по-ниска математическа подготовка. Тази теза намира потвърждение, например, когато се анализират резултатите от участието на България в изследването TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study/световни тенденции в обучението по математика и природни науки) от 1995 до 2007 г.². При него с по-

¹ <https://www.mon.bg/?go=page&pageId=1&subpageId=28>, достъпно на 15.06.2015 г.

² Изследването се провежда на всеки 4 години, от 1995 год. През 2011 година България не участва в изследването.

мощта на тестове се изследва компетентността по математика на ученици от осми клас. Резултатите са оценявани по точкова система, като постигането на над 625 точки се оценява като „много високи постижения”, от 550 до 625 точки – като „високи постижения”, от 475 до 550 точки – като „средни постижения”, от 400 до 475 точки – като „ниски постижения”. Ученици, не успели да постигнат 400 точки нямат грамотност по математика. Извлечение от резултатите за българските ученици (с натрупване) през годините е представено в табл. 1.

Таблица 1³

*Процент на българските ученици от осми клас,
постигнали над определен брой точки в изследването TIMSS*

Постигнали :	1995 г.	1999 г.	2003 г.	2007 г.
Над 625 точки	17%	9%	3%	4%
Над 550 точки	40%	32%	19%	20%
Над 475 точки	69%	67%	51%	49%
Над 400 точки	90%	90%	82%	74%

За 12 години бъдещите студенти, които имат повече от „средни постижения” (над 475 точки), са намалели от 69% до 49%. Тази отрицателна тенденция е характерна не само за България. Изследването PISA 2009, например, показва, че ниски постижения по математика имат 22,8% от учениците в Европейския съюз (за българските ученици – 47,1%)⁴. Тъй като компетентността по математика се разглежда от Европейския съюз като ключова компетентност, която пряко влияе върху личната реализация, социалната интеграция и трудоспособността в едно общество на знанието, е поставена цел до 2020 г. процентът на учениците с ниски постижения по математика

³ Mullis, I. V. S., M. O. Martin, P. Foy, TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eight Grades. TIMSS&PIRLS ISC, Boston 2008, p. 78-79

⁴ Mathematics in Education in Europe: Common Challenges and National Policies, Brussels: Eurydice, 2011, стр.16-18, .

да бъде намален до 15%⁵.

Данните от цитираните международни изследвания показват обща тенденция. За оценка на входното ниво на студентите в конкретни специалности и групи беше проведен тест със специално разработени задачи. Целите на тази проверка бяха две:

Цел първа – дидактическа. Да се придобие представа какво е реалното състояние на обучаемите, какви знания и умения притежават те, какво трябва да се направи, за да се запълнят пропуските, и до каква степен може да се очаква те да усвоят планирания съгласно учебните програми материал.

Цел втора – психологическа. Обучаемите да разберат, че имат сериозни пропуски, и че трябва да положат усилия, за да компенсират пропуснатото.

Тестът за проверка на входното ниво на знанията по математика съдържаше 30 задачи, с които се целеше да се установи дали студентите имат знания и умения в областите на елементарната математика, необходими като база за усвояване на предвиденото в учебната програма. Като се има предвид досегашния опит, бяха включени задачи от:

- действия с рационални дроби (три задачи с отворен отговор);
- действия с десетични дроби (седем задачи с отворен отговор);
- линейни уравнения с едно неизвестно (четири задачи с отворен отговор);
- системи от две линейни уравнения с две неизвестни (три задачи с отворен отговор);
- квадратни уравнения (две задачи с отворен отговор);
- степенуване и коренуване (пет задачи със затворен отговор);
- синеини неравенства и системи линейни неравенства (три задачи с отворен отговор);

⁵ Mathematics in Education in Europe: Common Challenges and National Policies, Brussels: Eurydice, 2011, стр. 3.

- тъждества (три задачи със затворен отговор).

Проверено беше нивото на общо 57 студенти от три учебни групи⁶. За да се оцени индивидуалната начална подготовка на всеки студент, беше възприет следният критерий: студентът притежава удовлетворителни умения в дадена област, ако верните отговори на въпросите от тази област са 50% и повече.

Индивидуалните резултати от прилагането на критерия са представени в табл. 2. В последната графа са посочени оценките по математика от дипломите за завършено средно образование.

Таблица 2

Индивидуални резултати на студентите по области

Студент №	Студентът притежава умения и знания в област ...								Брой области, в които студентът притежава умения	Оценка по математика от дипло- мата за средно образование
	Рационални дроби	Десетични дроби	Линейни уравнения	Системи линейни уравнения	Квадратни уравнения	Степенуване и коренуване	Линейни неравенства	Тъждества		
1									0	5,50
2	да							да	2	3,25
3	да	да	да	да	да				5	5,67
4									0	3,25
5	да		да	да	да		да		5	5,00
6	да	да	да		да		да		5	3,75
7	да	да							2	3,00
8		да							1	3,13
9									0	3,25
10									0	4,40

⁶ Трябва да се отбележи, че изследването не е представително, тъй като са тествани студенти само от две специалности, които не са от най-желаните в университета.

11									0	5,25
12		да	да		да				3	4,25
13	да	да	да		да	да	да	да	7	5,50
14		да	да		да		да	да	5	4,50
15	да		да		да				3	4,25
16									0	3,75
17									0	4,00
18		да	да						2	5,25
19									0	3,75
20	да	да							2	6,00
21		да							1	3,25
22	да	да	да					да	4	4,00
23	да		да						2	5,00
24									0	3,25
25		да	да				да		3	3,25
26	да	да	да	да	да	да	да		7	4,75
27									0	3,50
28									0	3,50
29		да							1	3,00
30									0	4,00
31		да						да	2	3,00
32	да	да	да	да	да	да		да	7	6,00
26	да	да	да	да	да	да	да		7	4,75
27									0	3,50
28									0	3,50
29		да							1	3,00
30									0	4,00
33									0	3,25
34		да	да						2	5,25
35								да	1	3,25
36	да	да	да	да					4	3,00
37								да	1	4,25
38									0	3,75
39									0	4,50
40									0	3,00
41									0	3,00
42	да	да	да	да	да				5	6,00
43		да							1	4,00
44		да							1	3,25

45							да		1	3,00
46	да		да						2	3,50
47		да	да		да				3	3,75
48		да	да						2	3,00
49			да		да				2	3,25
50		да							1	3,50
51									0	3,00
52									0	3,00
53	да					да			2	3,50
54									0	3,25
55	да	да	да	да					4	5,00
56								да	1	3,25
57	да	да							2	3,25
Об- що (%)	18	26	21	7	12	4	7	9	0	5,50
	31.58	45.61	36.84	12.28	21.05	7.02	12.28	15.79		

Нито една област не се владее дори и от половината студенти. Прави впечатление, че знанията на голяма част от тях са фрагментирани. Например студенти с номера 2, 31, 35, 37, 56 са показали известни знания по тъждествени преобразувания и почти никакви в останалите области. В събеседване беше изяснено, че по стечение на обстоятелствата помнят формулите за съкратено умножение и почти нищо друго. Студент № 3, който е сред най добрите, обратно – не е решил нито едно тъждество, тъй като, пак по стечение на обстоятелствата, не помни формулите.

Обобщените данни за входното ниво на студентите са представени в табл. 3. Представен е броят на студентите, които имат знания в една, две, три и т.н области в абсолютни стойности и с натрупване.

Таблица 3

Обобщени данни за входното ниво на студентите

Брой области, в които студентът има знания	Абсолютни стойности		С натрупване	
	Брой студенти	Процент	Брой студенти	Процент
8	0	0.00%	0	0.00%
7	3	5.26%	3	5,26%

6	0	0.00%	3	5,26%
5	5	8.77%	8	14.04%
4	3	5.26%	11	19.30%
3	4	7.02%	15	26,32%
2	12	21.05%	27	47,37%
1	10	17.54%	37	64,91%
0	20	35.09%	57	100,00%

По-малко от 20% от студентите притежават повече от 50% от необходимия минимум знания. Крайно неудовлетворително е началното ниво на над 55% от студентите.

Таблица 4

Съответствие между резултатите от входния тест и оценките по математика от дипломата за завършено средно образование по брой студенти

Брой области	Оценка по математика от дипломата за средно образование														
	3,00	3,13	3,25	3,50	3,75	4,00	4,25	4,40	4,50	4,75	5,00	5,25	5,50	5,67	6,00
0	4		5	2	3	2		1	1			1	1		
1	2	1	4	1		1	1								
2	3		3	2								2			2
3			1		1		2								
4	1					1					1				
5					1				1		1			1	1
6															
7										1			1		1
8															

В таблица 4 е представено сравнение между показаните резултати от входния тест и оценките по математика от дипломата за завършено средно образование. Числата в клетките на таблицата показват броя на студентите, показали умения в 0, 1, 2, ..., 8 области, имащи в дипломата за средно образование оценка 3,00; 3,13; 3,25; ...; 6,00.

Има студенти с много добри и даже отлични (!) оценки по математика от дипломата за средно образование, които практически не са показали никакви умения. Има и студент с оценка от дипломата 3,75, който пък, обратно, показва резултати над средните.

От изложеното могат да се направят следните изводи.

На първо място, оценката от дипломата за средно образование не е показател за подготовката на студентите.

На второ място, което е по-важно, началното ниво на знания в областта на математиката на студентите от проверените групи е незадоволително.

Причините са комплексни и, явно, са извън висшите училища. Това, което според автора може да се направи, за да се намалят вредните последици за подготовката на студентите при съществуващите учебни планове и законодателство, е основно в две направления.

Първото от тях е начинът на преподаване да се съобрази с нивото на студентите, особено в практическите занятия (упражненията). За тази цел е необходимо решаваните примерни задачи да се обвързват с практически примери за съответната специалност, обясненията и пресмятанията да се довеждат до край, без да се пропуска нито една стъпка. Това, разбира се, би довело до загуба на част от учебното време и до намаляване на броя на решаваните примерни задачи.

Второто е да се промени мисленето на студентите. За съжаление, учениците в средното училище не са свикнали нито да посещават редовно учебните занятия, нито да учат системно. Един начин да се променят навиците им е постоянният контрол: на всяко уп-

ражнение да се провеждат или предвидените в учебния план контролни работи, или писмен тест върху материал от предходното упражнение. Така броят на точките за присъствие и участие на студентите през семестъра се определя от броя на тестовете, в които студентът е взел участие, и от броя на тестовете, на които е получил положителна оценка.

Кардиналното решаване на проблема е възможно само с усилията на цялото общество. Отрицателните тенденции, констатирани от участието на България в международните изследвания и официално обявената политика на Европейския съюз за намаляване на процента на учениците с ниска подготовка по математика, изискват промяна в начина на мислене. Могат да се посочат няколко алтернативни варианта за действие, като увеличаване на часовете за задължителна подготовка по математика в средните училища, въвеждане на задължителен зрелостен изпит по математика, въвеждане на допълнителна подготвителна година в рамките на обучението по бакалавърски програми и др. Всички те, за съжаление, не са от компетентността на висшите училища и изискват широк обществен дебат.

ИЗСЛЕДВАНЕ НА ПРАКТИКО-ПРИЛОЖНИТЕ МАТЕМАТИЧЕСКИ УМЕНИЯ НА СТУДЕНТИ ОТ ИКОНОМИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА

Гл. ас. д-р Йордан Петков, Виктория Станчева
Икономически университет – Варна

Едно от важните изисквания при подготовката на специалисти в областта на икономиката е усъвършенстването на техните математически знания и умения. В подкрепа на това становище можем да посочим твърдението на някои автори, че „безспорно прилагането на математически модели спомага за по-доброто разбиране на същината на редица икономически процеси, води до уточняване и изясняване на икономическата терминология и по този начин до голяма степен стимулира развитието на самата икономическа наука”¹. В същото време във все повече сфери на бизнеса постоянно възниква необходимостта от различни по вид и сложност математически изчисления. Някои автори изразяват мнение, че „турбулентните бизнес условия се явяват предпоставка за провеждане на изследвания с научна и приложна стойност, базирани на математическото моделиране в съвременната икономика”². Също така, предвид високата приложимост и значение за практиката на повечето от моделите, може да се твърди, че търсенето на такива, които са подходящи и в друг контекст, ще се повишава³. В тази връзка считаме, че от особена важност за качеството на науката и висшето образование в България в съвременните условия е да се изследват перио-

¹ Атанасов Б., Илиев Пл. Математика и икономика. Годишник на Икономически университет – Варна, том 81, 2010г, стр. 70

² Николаев, Р., Станчева, В. Новата икономическа реалност и математическото моделиране: възможности и предизвикателства. Икономиката в променяния се свят: национални, регионални и глобални измерения. Сборник с доклади от международна конференция, изд. „Наука и икономика”, Том 2/2015г., стр. 457-465.

³ Leeflang, Peter SH, and Dick R. Wittink. "Building models for marketing decisions: Past, present and future." *International journal of research in marketing* 17.2, 2000: p. 105-126.

дично практико-приложните математически умения на студенти от направление 3.8 Икономика, с цел тяхното адекватно управление и приспособяване към нуждите на пазара на труда.

Настоящият доклад цели да анализира получените резултати от проведено анкетно проучване за нивото на владеење на практико-приложни математически методи сред студенти от ОКС „Бакалавър” в ИУ – Варна. В тази връзка авторите си поставят следните задачи:

- конструиране на подходящи приложни задачи;
- избор на извадка сред студентите от Икономически университет – Варна, с които да се проведе анкетно проучване за оценка на тяхната компетентност по отношение владеењето на математически изчисления;
- анализ на получените резултати и, на база направените изводи, очертаване на мерки за повишаване ефективността при обучението на кадри в областта на икономиката.

Обект на изследването са студенти, обучаващи се в специалности от професионално направление 3.8 Икономика в ОКС „Бакалавър” на Икономически университет – Варна, които са в трети и четвърти курс през учебната 2014-2015г. и които са изучавали фундаменталната дисциплина „Математика”, но не и други приложни математически дисциплини през бакалавърската си степен. На случаен принцип са избрани групи от различни специалности, като участие в проучването са взели 99 четвъртокурсници и 70 третокурсници.

Задачите, включени в анкетата, заедно с техните решения, са следните.

1 задача. Инвеститор разполага с 20000 лв. свободен капитал. Той може да вложи цялата сума на срочен тримесечен депозит с 1,5% тримесечна лихва или да я инвестира в проект, който ще му донесе 8000 лв. доход след 3 месеца и 12900 лв. доход след още 9 месеца. Да се определи коя от двете възможности за инвестиране е

по-добра.

Решение. I начин. Нетната настояща стойност на проекта е $\frac{8000}{1 + \frac{1,5}{100}} + \frac{129000}{\left(1 + \frac{1,5}{100}\right)^4} - 20000 = 35,95$. Инвестиране в проекта е по-добро.

II начин. Ако сумата се вложи на депозит, в края на годината ще нарасне на $20000 \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)^4 = 21227,27$. Ако сумата се инвестира в проекта, получените след три месеца 8000 лв. могат да се вложат на тримесечен депозит до края на година, при което ще нараснат на $8000 \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)^3 = 8365,43$. Следователно в края на годината сумата от проекта е $8365,43 + 12900 = 21265,43$. Тъй като $21265,43 > 21227,27$, то инвестирането в проекта е по-добро.

2 задача. Себестойността на даден продукт е 1000 лв. На каква цена трябва да бъде продаден този продукт, за да се реализира 30% печалба от приходите, получени от неговата продажба (не се вземат предвид данъците)?

Решение. Нека продажната цена е x лв. Печалбата е $x - 10000$ и трябва да бъде равна на $30\%x$, т.е. $x - 10000 = 0,3x$, откъдето $x = 14285,71$ лв.

3 задача. а) Ако приходите на фирма „Х” са били 6000 лв. за м. август, а за м. юли са били 3000 лв., то какъв е процентът на увеличението им?

б) Ако приходите на фирма „У” са били 3000 лв. за м. юли, а за м. юни са били 6000 лв., то какъв е процентът на намалението им?

Решение. а) $\frac{6000 - 3000}{3000} \cdot 100 = 100\%$;

б) $\frac{3000 - 6000}{6000} \cdot 100 = -50\%$.

4 задача. Цената на акция на компания „X“ намалява с 30%, а след това се увеличава с 40%. Да се определи процентът на изменение на цената спрямо началното ѝ ниво.

Решение. Ако K е началната цена на акцията, след намалението с 30% става равна на $0,7K$. Тази цена се увеличава с 40% от нея ($0,4 \cdot 0,7K = 0,28K$) и става $0,98K$. Следователно K е намаляла с $K - 0,98K = 0,02K$ спрямо началното ниво, или с 2%.

5 задача. Инвеститор разполага с 10000 лв. свободен капитал, които желае да инвестира в акции на две компании – „А“ и „В“, с годишни доходности съответно 7% и 10%. Каква част от сумата трябва да инвестира той във всеки от двата вида акции, ако желае да си осигури годишна печалба в размер на 820 лв.?

Забележка. Доходност на акция е печалбата, изразена като процент от инвестираната сума.

Решение. Ако x лв. се инвестират в акции на компания „А“, а y лв. – в акции на компания „В“, се достига до следната система линейни уравнения:

$$\begin{cases} x + y = 10000 \\ 0,07x + 0,1y = 820 \end{cases} . \text{ Решението ѝ е } x=6000, y=4000. \text{ Следователно}$$

6000 лв. (60% от сумата) трябва да се инвестират в акции на „А“, а 4000 лв. (40% от сумата) трябва да се инвестират в акции на „В“.

Фигура 1 представя общата успеваемост на студентите от 4 курс по отделните задачи.

Забелязва се, че нито един от тях не е решил правилно първа задача. При някои от студентите присъстват теоретични разсъждения относно същността на инвестициите в реален проект и банковите депозити, на база които студентите избират предпочитаната алтернатива. Това може да се отчете като положителен факт относно общата им икономическа грамотност. Разсъждения от типа „банковите депозити са по-сигурни“, обаче, не са общовалидни. При студентите липсва способността да прилагат практически умения при избора на инвестиция. Оказва се, че те не могат да проведат елемен-

тарни изчисления относно двете представени инвестиции, за да вземат правилно и обосновано решение.



Фигура 1

Фигура 2 представя разпределението на студентите от 4 курс според броя решени задачи. Най-висок е броят на студентите, решили 2 или 3 задачи. Студентите, решили 5 задачи, са 11 на брой, а такива, които са решили всички задачи правилно, липсват.



Фигура 2

При студентите от 3 курс се забелязва едно доста по-несериозно отношение към проведеното анкетно проучване, което може да бъде обяснено с две негативни тенденции. От една страна, това са неблагоприятните демографски процеси, които водят до по-лесен достъп до висшите училища в страната, включително и Икономически университет – Варна. Това води до ниска степен на мотивация и липса на заинтересованост, проактивност и амбиция у студентите. От друга страна, следва да бъде отчетен ефектът на все по-ниското качество на предлаганото средно образование в страната. Следващата фигура представя разпределение на студентите от 3 курс според броя решени задачи.



Фигура 3

Забелязва се, че най-голям е броят на студентите с 0 решени задачи – 27. Сред тях има както студенти, предали празен лист, така и студенти, които са се опитали да решат задачите, но не са достигнали до правилни отговори. Следват студентите, които са решили само една задача – 25 (в случая те са решили само една подточка – А) или Б) на трета задача). 16 студенти са решили 2 задачи от предложените общо 6, а само двама имат 5 решени задачи. Никой от

студентите не е решил всички задачи правилно.

Средният брой решени задачи за общо попълнилите анкетата 70 третокурсници е 0,96. Оказва се, че нито един студент не е решил правилно първа задача. Въпреки това и при третокурсниците се забелязват теоретични разсъждения от типа „инвестициите в реални проекти са по-изгодни” или „банковата система е по-сигурният вариант”. Когато става дума, обаче, за конкретни изчисления по отношение на двата зададени проекта, третокурсниците не се справят и не могат да направят правилен и мотивиран избор между алтернативите. Втора задача е решена правилно само от двама студенти. Отново най-често срещаната грешка е, че 30% от 1000 лв. са 300 лв. и следователно продуктът трябва да бъде продаден за 1300 лв. По този начин третокурсниците не отчитат даденото условие, че целта е да се получат 30% от приходите, а не от себестойността на продукта. Подточка А на трета задача се оказва най-лесна за студентите – 33 от тях са я решили правилно, а останалите 37 дават грешен отговор. При трета задача Б отново броят на справилите се студенти е сравнително висок – 28 са я решили, а 42 - не. Четвърта и пета задача са решени правилно само от двама студенти. Един студент е отбелязал на задача пета „не ми се чете”, т.е. явно по-дългите условия се явяват пречка.



Фигура 4

Получените резултати и извършеният анализ водят до следните по-важни изводи:

- Само около половината от студентите могат да извършват процентни изчисления.
- Придобитите знания у студентите не са добре обвързани с възможности за практическото им приложение.
- Забелязват се трудности при интегриране на знанията и насочването им към разрешаване на комплексни проблеми със специфични изисквания от практиката.
- Липсва вътрешна мотивация и убеденост у студентите по отношение на владенето и прилагането на математически методи при анализа на икономически процеси и явления.

На тази база и с цел подобряване практико-приложните умения и компетенции в областта на математиката на студентите-икономисти и утвърждаване авторитета на Икономически университет – Варна в съответствие със съвременните европейски стандарти и състоянието и нуждите на пазара на труда, си позволяваме да отправим няколко препоръки.

Първо, необходимо е по дисциплините, които се изучават в Икономически университет – Варна, да се извършва не само качествен анализ на изследваните икономически процеси, но и количествен, като се дава възможност на студентите да извършват това и самостоятелно (чрез различни бизнес казуси, курсови работи и т.н.). Следва да се предлагат разнообразни казуси със сравнителен анализ на количествени показатели за достигане до оптимален вариант при вземане на решения.

Второ, осъществяване на подобни анкети сред студенти от ОКС „Бакалавър” и ОКС „Магистър” ежегодно, с цел представяне на възможностите за приложение на количествени методи в практиката на различни компании и сектори. По този начин ще се повиши мотивацията на студентите за извършване на количествени анализи при различни икономически изследвания.

Трето, внедряване на нови практико-приложни дисциплини в учебните планове, в чиито програми основно да бъдат засегнати теми от областта на икономико-математическото моделиране, количествени методи в икономиката, оптимизиране, иконометрия, статистика и др. Пример за такива дисциплини, присъстващи в учебните планове на студенти-икономисти от световни признати университети, са: *Количествени финанси*, *Приложения на „Теория на игрите“*, *Количествени методи в поведенческите финанси*, *Количествени методи в управлението на човешки ресурси*, *Риск мениджмънт*, *Актьорски науки* и др.

Четвърто, организиране на семинари по тази проблематика, водени от преподаватели – специалисти в областта на количествените методи в икономиката, с участие на преподаватели от всички катедри, докторанти и студенти.

В настоящото изследване бе разгледан един, по наше мнение, значим проблем, макар и в тесни рамки, свързан с компетентността и конкурентоспособността на кадрите, които изграждаме. Известно е, че на всеки човек е необходим определен набор от познания в областта на математиката, подлежащи на разширяване и развитие по време на целия ни жизнен път⁴. Това налага нуждата от постоянно адаптиране методиките на преподаване и учебните програми с цел приспособяване към изискванията, наложени от европейските и световните стандарти. Считаме, че реализирането на предложените от авторите идеи има потенциала да се отрази положително върху практико-приложните математически умения на студентите в Икономически университет – Варна.

⁴ Николаев, Р., Господинова, Н. „Математиката – от абстракцията към реалността“. Сб. докл. от международна научна конференция „Социалните науки и глобализацията“. Изд. „Наука и икономика“, 2013, с. 127.

НЯКОИ ОСОБЕНОСТИ ПРИ ПОДБОРА И ПОДГОТОВКАТА НА СТУДЕНТИ ОТ ИКОНОМИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА ЗА НАЦИОНАЛНАТА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Ас. Невена Господинова, ас. Ангел Генчев
Икономически университет – Варна

Резюме. В настоящия доклад се разглеждат особеностите при подбора на студенти от Икономически университет – Варна за участие в Националната студентска олимпиада по математика. Разкриват се основните аспекти, застъпени при осъществяване подготовката на отборите. Посочват се примерни задачи, подходящи за вътрешни кръгове и за подготовка на участниците за националния кръг на олимпиадата, както и възможности за тяхното решаване.

Ключови думи: олимпиада, математика, подготовка, подбор.

Националната студентска олимпиада по математика (НСОМ) е ежегодно състезание, в което участват изявени студенти с интерес и високи познания в областта на математиката от висши училища в страната и чужбина. Задачите се определят в зависимост от профила на специалностите, изучавани от студентите: група „А” – за студенти от специалности „Математика“, „Информатика” и „Компютърни науки”; група „Б” – за студенти в природни и технически специалности; група „В” – всички, неизброени в групи А и Б (икономически и други специалности). Икономически университет – Варна е неизменен участник с отбори в групи „А” и „В”.

Целта на настоящия доклад е да се разкрият особеностите при подбора на студенти и провеждането на подготовката на отборите, представящи Икономически университет – Варна на НСОМ.

За постигане на така поставената цел в доклада се решават следните **задачи**:

- ✓ Разглеждат се етапите на осъществяване подбора на изявени

студенти за отборите.

✓ Представят се примерни задачи, давани на вътрешни кръгове, и такива, върху които протича подготовката на участниците за националния кръг на състезанието.

✓ Предлагат се възможности за решаване на примерните задачи.

Стимулите за студентите за участие в олимпиадата по математика са няколко. На първо място, в редовните часове се набляга на най-базовите елементи от висшата математика. Поради това преподавателите от катедра „Приложна математика” при Икономически университет – Варна организират ежеседмична подготовка за класираните се за втори кръг, чрез която студентите задълбочават и значително обогатяват своите познания. Второ, участниците, постигнали високи резултати на олимпиадата, имат възможност да продължат своето развитие като асистенти или докторанти към катедрата след завършване на обучението си в бакалавърска и магистърска степен. Трето, но не на последно място по важност, за студентите остава удовлетворението от постигнатите високи резултати на университетско и национално ниво.

Няколко седмици преди първия кръг на състезанието в сайта на Икономически университет – Варна се публикуват примерни задачи за подготовка, като при необходимост и желание от страна на студентите има възможност за осъществяване на индивидуални консултации. Първият етап на подбора обикновено се осъществява през месец декември чрез организирането на вътрешен кръг на олимпиадата за висшето училище. Участници могат да бъдат всички бакалаври или магистри, но най-често това са студенти с интерес към математиката, които биват забелязани от преподавателите на семинарните упражнения и лекциите чрез активно демонстриране на знания и участие в учебния процес.

Първият кръг се състои в решаване на три задачи в рамките на четири астрономически часа. Участващите студенти се разделят на две групи според професионалното направление, в което се обуча-

ват. За студентите по икономика основният материал, който се включва на този етап, се свързва със следните раздели на висшата математика: линейна алгебра, аналитична геометрия и диференциално смятане. Студентите от специалност „Информатика” решават задачи по линейна алгебра и аналитична геометрия, тъй като изучават останалите математически дисциплини по-късно през следването си.

Задачите, които се включват в темата за първи кръг на олимпиадата, често притежават комплексен характер, т.е. обхващат повече от един от гореспоменатите раздели. Според нас подобни задачи дават възможност за по-обективна оценка, респективно по-добро „отсяване” на кандидатите. Като пример следва да посочим три задачи, давани на първи кръг на олимпиадата по математика в Икономически университет – Варна, без да претендираме, че предложените начини за тяхното решаване са единствените възможни.

Задача 1. Дадени са матриците $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ c & d \end{pmatrix}$, като

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $AB = A^2$.

а) Да се изразят a , c , и d чрез b .

б) Ако $(b-1)$ е корен на уравнението $e^{-x} - x - 1 = 0$, да се намерят A и B .

Решение. а) След умножаване на матриците и приравняване на съответните им елементи се получава системата

$$\begin{cases} 2a = a^2 \\ -a = 0 \\ 2b + c = ab + b \\ -b + d = 1 \end{cases},$$

чието решаване води до следните стойности: $a = 0$, $c = -b$, $d = 1 + b$.

Очевидно решаването на подточка б) се свежда до изследване на функцията $f(x) = e^{-x} - x - 1$. Лесно се вижда, че $x = 0$ е корен на

уравнението $f(x)=0$. Функцията е дефинирана и непрекъсната за $x \in (-\infty; +\infty)$, а производната ѝ $f'(x) = -e^{-x} - 1$ е отрицателна за всички стойности на x . От това следва, че $f(x)$ е намаляваща функция и нейната графика пресича веднъж абсцисната ос, т.е. уравнението $f(x)=0$ има точно един корен. Следователно $b=1$, $a=0$, $c=-1$, $d=2$ и за търсените матрици получаваме

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ и } B = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Задача 2. Дадена е елипса $\varepsilon: \frac{x^2}{1-b} + \frac{y^2}{b} = 1$, $b \in (0;1)$, и права $l: x-2y=0$. Да се намери b , ако елипсата отсича от правата отсечка с максимална дължина.

Решение. След решаване на системата от уравненията на елипсата и правата получаваме координатите на пресечните им точки A и B :

$$A \left(-2\sqrt{\frac{b(1-b)}{3b+1}}; -\sqrt{\frac{b(1-b)}{3b+1}} \right), B \left(2\sqrt{\frac{b(1-b)}{3b+1}}; \sqrt{\frac{b(1-b)}{3b+1}} \right).$$

За дължината на отсечката AB имаме $|AB| = 2\sqrt{\frac{5b(1-b)}{3b+1}}$. Очевидно $|AB|$ е максимална, когато отношението $\frac{b(1-b)}{3b+1}$ е максимално, поради което разглеждаме функцията $f(b) = \frac{b(1-b)}{3b+1}$. За производната получаваме $f'(b) = \frac{-3b^2 - 2b + 1}{(3b+1)^2}$, откъдето критичните точки са при $b=-1$, $b=-\frac{1}{3}$ и $b=\frac{1}{3}$. По условие $b \in (0;1)$, като за $b \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$ $f'(b) > 0$, а за $b \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ $f'(b) < 0$. Следователно при

$b = \frac{1}{3}$ функцията има единствен локален екстремум – максимум, който е и нейната най-голяма стойност. Тогава за максималната дължина се получава $|AB|_{\max} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.

Задача 3. Нека x_1 и x_2 са реалните корени на уравнението $x^2 - x + a = 0$ ($a \in \mathbb{R}, a > 0$). Да се докаже, че

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Решение. Стойностите на a , за които дискриминантата е по-голяма или равна на нула, са $a \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$. Като отчетем, че ($a > 0$),

се получава допустимата област $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$. По формулите на Виет

за корените x_1 и x_2 е в сила $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = a \end{cases}$. Тогава за сумата

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)^2 \text{ имаме}$$

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)^2 = \frac{-2a^3 + 5a^2 - 2a + 1}{a^2} = f(a).$$

Първата производна на функцията е $f'(a) = \frac{-2a^3 + 2a - 2}{a^3}$. Тъй

като $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$, то изразът в числителя е отрицателен, а този в знаменателя – положителен. Следователно $f'(a) < 0$ и $f(a)$ е намаляваща за всички стойности на a в посочения интервал. Тогава функцията достига своята най-малка стойност при $a = \frac{1}{4}$ и $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2}$, с

което неравенството е доказано.

Всяка от задачите, включени в първия кръг, носи по десет точки, като за втори кръг се класират тези участници, които са постигнали поне половината от максималния общ брой точки.

Подготовката на успешно преминалите първи кръг започва с началото на летния семестър през месец февруари и се провежда веднъж седмично, като занятията продължават по два астрономически часа. Студентите се разделят на две групи – икономически специалности и специалност „Информатика”, тъй като е необходимо подготовката да бъде съобразена с трудността на задачите и с материала, включен в конспекта за НСОМ.

Основните теми, върху които се акцентира при подготвяне на студентите-икономисти за втори кръг, са следните:

1. Елементи от линейната алгебра – матрици, детерминанти, системи линейни уравнения и др.

2. Елементи от аналитичната геометрия – уравнения на права и равнина, разстояние от точка до права, ъгъл между две прави, криви от втора степен и др.

3. Полиноми и действия с тях.

4. Граница и сходимост на числова редица.

5. Функция, граница и непрекъснатост на функция.

6. Производни, основни теореми на диференциалното смятане, изследване на функция.

7. Неопределени, определени интеграли и техните приложения.

8. Комбинаторика.

Подготовката на студентите от специалност „Информатика” протича по начин, съобразен с конспекта на група „А”. Освен гореспоменатите теми, тук се включват още:

- векторна алгебра и приложения в геометрията;
- квадратични форми;
- повърхнини от втора степен;
- линейни оператори, собствени стойности и вектори, диагона-

лизация и приложения;

- полиноми с комплексни коефициенти;
- групи, пръстени и полета;
- числови редове, редици и редове от функции;
- несобствени интеграли;
- интеграли, зависещи от параметър.

Вторият кръг на олимпиадата се провежда в началото на месец април, като студентите отново решават три задачи за четири часа. Задачите наподобяват като тип посочените примери, но се характеризират с по-висока трудност. За отборите, представящи Икономически университет – Варна на НСОМ, се класират тези студенти, които са показали най-добри резултати на втори кръг (тук точките от първи кръг не се вземат под внимание). Максималният брой участници в един отбор е шест, като всяко висше училище може да участва с до три отбора в дадена група.

При провеждане на подготовката за националния кръг ръководителите на отборите използват предимно задачи, давани на НСОМ през предходни години¹, като за повечето от тях се предлага повече от един начин за решаване. Целта е, на първо място, участниците да са наясно с типовете задачи, които могат да се паднат на националното състезание, и, на второ място, да се развие нестандартното мислене у студентите и способността им да се справят с разнообразни проблеми. Като пример можем да посочим следните две задачи.

Задача 4. Да се намерят най-малката и най-голямата стойност на функцията $z = 3x - 4y + 36$, ако $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 36 = 0$.

Решение. Задачата може да бъде решена по няколко начина:

- ✓ графично;
- ✓ чрез множители на Лагранж;
- ✓ чрез свеждане до функция на една променлива.

¹ Задача 4 е дадена в група В през 2011 г., а задача 5 – в група Б през 2007 г. Представените решения са дело на авторите на доклада.

Следва да демонстрираме една от тези възможности, а именно – решаване чрез използване помощната функция на Лагранж $L(x, y, \lambda) = 3x - 4y + 36 + \lambda(x^2 + y^2 - 10x - 12y + 36)$. Приравнявайки първите частни производни на нула, имаме

$$\begin{cases} 3 + 2\lambda x - 10\lambda = 0 \\ -4 + 2\lambda y - 12\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 12y + 36 = 0 \end{cases}.$$

Получаваме $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ и точките $A(8; 2)$ и $B(2; 10)$. След преобразуване на условието $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 36 = 0$ лесно се вижда, че областта от допустимите решения представлява окръжност с уравнение $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 5^2$, откъдето следва, че в нея линейната функция $z = 3x - 4y + 36$ има точно един минимум и един максимум. След заместване с получените точки се установява, че $z_{\min} = z(2; 10) = 2$ и $z_{\max} = z(8; 2) = 52$.

Задача 5. Да се докаже, че уравнението $\frac{2x}{1+x^4} + \cos x = \frac{\pi}{4} + \sin 1$ има решение в $(0; 1)$.

Решение. За решаване на задачата предлагаме следните начини:

✓ използване на функцията $f(x) = \arctg x^2 + \sin x$ и теоремата на Лагранж;

✓ пресмятане на стойностите на функцията $g(x) = \frac{2x}{1+x^4} + \cos x$ в някои точки;

✓ използване на определен интеграл.

Ще приложим третия подход. Нека

$h(x) = \frac{2x}{1+x^4} + \cos x - \frac{\pi}{4} - \sin 1$. Решаваме интеграла $\int_0^1 h(x) dx$ и полу-

чаваме $\left(\arctg x^2 + \sin x - \frac{\pi}{4} x - \sin 1 \cdot x \right) \Big|_0^1 = 0$. Тъй като $h(x)$ е непрекъснатата в $(0;1)$, то графиката ѝ пресича абсцисната ос поне веднъж в посочения интервал, което показва наличието на поне един корен на уравнението $h(x) = 0$.

В заключение можем да обобщим, че участието в НСОМ изисква провеждането на задълбочена, последователна и качествена подготовка на студентите, предполагаща решаването на разнообразни задачи с комплексен характер. При това следва да се предлагат задачи, които позволяват повече от един начин за решаване, тъй като това дава свобода на студентите да проявяват своите познания и нестандартно мислене. Считаме, че една възможна насока при бъдещото провеждане на подготовката за НСОМ е организирането на извънредни занятия за студентите, които са показали високи резултати и интерес към математиката, още преди първия кръг на олимпиадата за съответната учебна година.

ЕДИН ВИД ТЕСТОВЕ ЗА РАЗВИТИЕ НА ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАТА ИНТЕЛИГЕНТНОСТ НА УЧЕНИЦИТЕ

Катя Чалъкова

ПМГ „Иван Вазов“, Димитровград

Резюме. Една от видовете интелигентност, логико-математическата, е свързана с логика, абстракции, обосновки и числа. Тази ѝ характеристика я прави неделима част от обучението по математика. Решаването на математически задачи с отворен отговор, с ограничено време за всяка задача, е в основата на оценяването на знанията и уменията на учениците. Създаденият по този начин тест проверява когнитивните функции на познанието: скорост и капацитет на информацията, пространствено ориентиране и наблюдателност, памет и задълбоченост на знанията.

Ключови думи: логико-математическа интелигентност, познание, оценяване на знания и умения, задачи с отворен отговор.

Динамичното развитие на информационните технологии дава възможност за качествена промяна в обучението по математика. Чрез тях тестовото изпитване може да бъде извършвано с разнообразни, както по съдържание, така и по начин тестове.

Настоящият доклад разглежда един вид тестове, имащи съществен принос в развитието на логическото мислене на учениците, което е в основата на изграждане на логико-математическа интелигентност на подрастващите.

1. Интелект и обучение

По своята същност обучението е съвместна дейност на учители и ученици, насочена към усвояване на знания и умения. „Знанията, уменията и навиците не се предават от учителя на ученика, а се формират и са резултат от отразително-преобразуващата и регула-

торна дейност на психиката на ученика¹. Обучението по математика е обучение в мисловна дейност, насочено към развитие на:

- способността за анализ и синтез на информацията;
- изграждане на логически връзки между изучаваните понятия и правила;
- изграждане на навици и начини за познавателна дейност;
- прилагане на усвоените знания и умения в различни задачи и ситуационни модели.

Интелектът, като „способност за мислене, равнище на умствено развитие на човека“² се развива още от ранна детска възраст, но същността на това развитие се осъществява най-вече чрез обучението по математика в училище. Високите интелектуални способности и интелигентността като качество на ученика са особено значими за изграждане на личности, които ще намерят своята успешна реализация. Учениците усвояват знания по различни учебни предмети и така развиват различните видове интелигентност според американския психолог Хауърд Гарднър – лингвистична, логико-математическа, музикална, телесно-кинестетична, пространствена, интерперсионална и интраперсионална. Прилагайки знанията, получени в училище, те задълбочават своите умения за разбиране на наученото. В часовете по математика съществуват големи възможности за активизиране на мисловната дейност на учениците и ускоряване на по-нататъшното развитие на тази дейност в процеса на обучение, чрез постоянен отговор на основния въпрос: Как прилагаме наученото?

2. Логико-познавателна интелигентност

Според Гарднър, всеки човек, респективно всеки ученик, притежава всяка от споменатите по-горе интелигентности, но развита в различна степен. Изхождайки от тази позиция, обучението по мате-

¹ Андреев, М. Дидактика, 1987, с. 41.

² Съвременен тълковен речник, 1994, с. 320.

матика акцентира в развитие на логико-познавателната и пространствената интелигентност. „На математиката обикновено се преписва особена роля за развитие на логическото мислене на учениците“³. В основата на знанията по математика са памет, мислене и въображение. Натрупването на знания има роля за развитие на личността.

Логическото мислене се развива в двете основни групи: мисли в центъра на съзнанието и мисли в периферията на съзнанието. Така се получава възприемане на понятията в цялостен вид.

Въображението се развива в посока на отражение, представяне в мисълта на нещо, което не е било достатъчно възприето в миналото.

3. Математически задачи с отворен отговор, с ограничено време за всяка задача

Изпитването и оценяването имат съществено значение както за качеството, така и за количеството на усвоените знания и умения на учениците. Тестовата проверка намира широко приложение в българското училище. Чрез нея ученикът формира значителни качества като самосъзнание, самооценка, отговорност и удовлетвореност от постигнатото. От друга страна, учителят получава необходимата му информация за степента на усвоените компетенции (знания, умения и отношения) на даден учебен материал. При това взаимодействие между учител и ученик качеството на тестовите задачи се оценят с различни характеристики: трудност, обективност, надеждност и валидност. Всичко това е свързано с една много важна психологическа характеристика – скорост на протичане на умствените процеси. „Тази характеристика на скоростта на умствените процеси е основата за интелектуалните различия между хората“⁴.

Държавният зрелостен изпит по математика се състои от три части: първа част – задачи с избираем отговор, втора част – задачи с

³ Столяр, А.А., Педагогика на математиката, 1976, с.25.

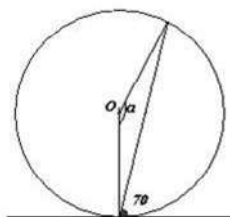
⁴ Енциклопедия психологически тестове, 2001, с.272.

отворен отговор и трета част – задачи за подробно изписване на решението им. Определеното време за решаване и на трите части предполага оптимално му разпределение за всяка от тях. Докато първата част предполага намирането на правилния отговор и чрез директна проверка, в третата – задачите могат да не бъдат решени докрай, а само частично, втората част изисква точен отговор, до който ученикът трябва да стигне максимално бързо, на базата на усвоените знания и умения, както от учебния материал, така от логико-познавателната интелигентност, която е развил по време на обучението си по математика.

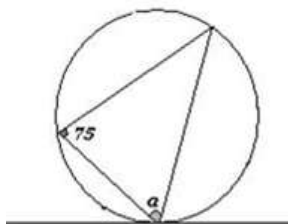
Примерни тестове за решаване на математически задачи с отворен отговор, за определено време

8 клас: „Ъгли и окръжност“

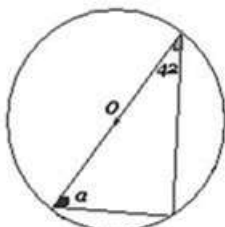
Тестът се състои от 15 задачи, с нарастваща степен на трудност. На мултимедиен проектор се прожектира всеки чертеж (отговарящ на една задача). За всяка задача учениците разполагат с три минути, за да направят чертежа и да намерят стойността на търсения ъгъл.



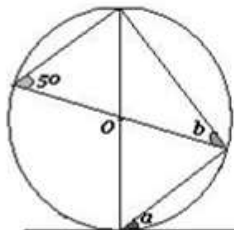
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

9 клас: „Правоъгълен триъгълник“

Тестът се състои от 9 задачи, с нарастваща степен на трудност. На мултимедиен проектор се прожектират условието и чертежа на всяка задача. Учениците разполагат с пет минути, за да напишат верния отговор за всяка търсена отсечка.



Фиг. 5



Фиг. 6

Показаните примерни тестове са нагледен израз на това, че знанията на учениците не трябва да се формализират. Мисленето е индивидуален процес, в който се отразяват личните интелектуални способности на ученика.

Да дадем на учениците знания, да формираме в съзнанието им представа за същността на изучаваните понятия и твърдения и да получим обратен резултат, че те са осъзнали закономерностите в изучавания материал и могат да го прилагат правилно при решаване на различни математически ситуации, това значи, че сме развили у тях логико-познавателната интелигентност, с нейните основни аспекти:

- паметта не трябва да преобладава пред разбирането – решаването на задачите от фиг. 5 и фиг. 6 е ясно доказателство, че откриването на същественото свойство има водещо значение за решаване на дадена задача;

- съзнателното усвояване на математическите знания е свързано с откриване на отношения между отделните понятия – така се извършва мисловна дейност от друг характер: създаване на собствени начини за намиране на решението на задачата – напр. задачата

от фиг. 3 може да бъде решена по два начина;

- дълбочина, широта и гъвкавост на мисленето – това са качества, които са уникални за всеки ученик. Тяхното развитие води до усъвършенстване на конкретните мисловни действия за бързо и правилно решаване на дадена ситуация;

- бързина, самостоятелност и последователност на мисленето са качества, които определят протичането на мисловния процес при всеки отделен ученик.

4. Заключение

Степента на интелигентност не зависи само от натрупаната количествена информация, а и от качеството на нейното рационално използване в дадени ситуации. Математическото образование включва в себе си двете страни: обучение и възпитание. Възпитание, насочено към развитие на мисленето и когнитивните способности – памет, воля, разсъждение. Ако ученикът има изградени умения за откриване на причинно-следствената връзка между изучаваните понятия и техните свойства, той притежава качества да развие своя интелект – поставените цели са получили своя краен резултат.

ПОГЛЕДЪТ НА СТУДЕНТИТЕ ВЪРХУ ПОВИШАВАНЕ ЕФЕКТИВНОСТТА НА ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

Виктория Атанасова

Студент, Икономически университет - Варна

*Влакът влезе в тунел
зрящите спряха да четат
слепият продължи
Владислав Христов, „Фи“*

Ученето през целия живот, развиването на креативност и творческо мислене, наред с иновациите са основни елементи на Европейското пространство за висше образование. Дискусиите за развитието на образованието в Европа са фокусирани върху развитието на ново съдържание на програмите, а не просто върху реструктурирането им. Акцентът е върху придобитите знания и умения и връзката с пазара на труда, и в този смисъл, все по-малко ще са необходими кадри, които умеят добре да възпроизвеждат заучени определения, но са безсилни да се справят самостоятелно с реални проблеми в практиката и да се адаптират към постоянно променящите се условия.

Докладът има за цел да анализира ролята на преподавателя като основополагаща за изграждането на творчески и иновативни способности, както и активното участие на студентите като конструктивни партньори, оказващи влияние върху организацията и съдържанието на образованието в университетите.

Математиката в по-стари времена е заемала централно място сред изкуствата и е едно от най-старите, най-значимите, последователни и същевременно най-актуални постижения на човечеството.¹

¹ <http://www.math.bas.bg/ml/iad/dremat/dmathbg.html>

Тя не е просто механичното прилагане на правила и формални методи за пресмятане, тя е висша творческа дейност - комбинация от наука и изкуство и тяхната логическа обвързаност на философска основа, и като такава, тя изисква особени мисловни умения, широк мироглед и всестранен опит. Годфрид Харолд Харди сравнява творчеството на математика с творчеството на живописеца и поета по отношение на създаване на прекрасното - в съвкупността от идеи, подобно на съвкупността от цветове и думи, трябва да има вътрешна хармония. Вътрешната логическа стройност на математиката, нейните мотиви, структури и модели, както и неочакваните вътрешни връзки в нея предизвикат възхищение. Затова математиката дава богати възможности за възпитаване на чувство на красота, умения да се види тази красота и да се оцени по достойнство. Прилагането на математическите умения е интелектуално приключение, изискващо въображение, съобразителност, логическо мислене, последователност и критичност.

Това, което на английски се нарича *problem solving*, преведено буквално е “решаване на задачи”, но едно по-истинско (и по-духовито) тълкуване би било: това, което експертът прави, когато не знае какво да прави, т.е. това е умението да се справяш със ситуации, за които няма рецепта. В такива случаи ни помага въображението. Неслучайно великият математик Давид Хилберт казал за свой ученик: “Той нямаше достатъчно въображение и затова стана поет...”².

Съвременното обучение е необходимо да насочи усилията си към формиране на гъвкаво мислене, развитие на умения за самостоятелно придобиване и прилагане на знания, и изграждане на способности за адаптация към бързо променящите се условия на средата, а това предполага ориентиране към развитие на творческите способности на студентите. Творческото мислене е способността да се раждат креативни идеи, да се разрешават проблеми по оригина-

² <http://www.math.bas.bg/ml/iad/dremat/dmathbg.html>

лен начин, то развива способността да се виждат ситуации от друг ъгъл, да се обмислят различни гледни точки, да се преосмислят стари концепции и да им се придава нов смисъл.

Формирането на студентите като творчески личности и включването им в учебната работа налагат обучението да се превърне в активно-творчески процес, който да осигурява все по-голяма възможност за повишаване на тяхната самостоятелност и осъзнатост, което от своя страна отключва и създава потребности от знания. Не може да се говори за качествено образование, ако то е самоцелно, насочено изключително към заучаването на определения, модели и научни факти. Практиката показва, че такива повърхностни умения нямат особен реален смисъл и не са от полза, когато студентите се сблъскват с непознати за тях задачи. Необходимо е и съдържание - раздвижено, съвременно, адаптирано към икономиката и предизвикващо интерес, което действително не само обучава на знания и умения, но развива креативността на студентите и възпитава личностни качества. Но каквото и да е съдържанието, без преподавателите нищо не би било възможно.

„Учителят, който трябва да бъде и писател, и артист, и инженер, и философ, и политик, и спортист, но който преди всичко трябва да бъде човек. Богата, преизпълнена с идеи личност, която като раздава знанията си, раздава и себе си, без да се щади. Преподавателят трябва да бъде Учител-творец, учител-тълкувател, учител-мечтател, а не радиоточка”.³

Преподавател, който знае, че може, който използва съвременни методи на преподаване, който приковава вниманието на студентите, който успява да говори на разбираем за тях език, който има смелост да каже "Не знам, сбърках ...", който не спира да се развива като педагог и като специалист, и не на последно място - като личност,

³ Марков Георги, Българският учител,
<http://kultura.bg/web/%D0%B1%D1%8A%D0%BB%D0%B3%D0%B0%D1%80%D1%81%D0%BA%D0%B8%D1%8F%D1%82-%D1%83%D1%87%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB/>

той може и да вдъхновява, умее и да събужда, и да предизвиква желания и потребности за учене. Добрите преподаватели са способни да избягват прекомерната авторитарност и дистанцираност, защото знаят, че в центъра на системата стои връзката „студент-преподавател“, че и студентите, и преподавателите се нуждаят от свобода, взаимно доверие и правила, за да е стабилна връзката помежду им, а образование наричаме именно тази тяхна връзка. Без значение дали говорим за математика или друг предмет, добрият преподавател знае как да привлече студентите в часовете, как да ги мотивира да учат през семестъра, а не само по време на сесии, наясно е коя е подходящата методика на преподаване, какви форми, методи и средства за въздействие да използва, намира и начин да отключи активността у студентите. Тези и много други способности са свързани пряко с качеството на обучението, което обвързва от една страна въпросите, засягащи уменията на студентите и организацията на тяхната самостоятелна работа и от друга преподаването и отговорностите на преподавателите.

Преподавателят не трябва да бъде само лектор и преподаването да се ограничава само в конкретни знания и споделяне на научни факти, а да е насочено върху развиването на умения за учене, формиране на способности за самоусъвършенстване и изграждане на навици за творческо мислене. Той трябва да прецени колко фундаментален и колко тясно специализиран да бъде материалът, който се поднася на студентите. Всеизвестен е фактът, че голяма част от студентите наизустяват знанията, а не мислят и не търсят творчески път за разрешаване на задачите/проблемите. Процесът на обучение трябва да развива и издига интелектуалната им същност и те да се научат да анализират, систематизират, да формулират становища, хипотези, прогнози, както и да се обосновават с научни факти. Една от водещите роли на преподавателя е да създаде и да развие у студентите такива умения, които да формират у него способности и компетентности за успешно справяне в реалния живот, да го превърнат в критично мислещ човек. Критическото мислене започва

със задаването на въпроси, то развива уменията за справяне със ситуации, за които няма готови решения, има крайна цел и тя е решаването на реални проблеми. Толерантността и търпението, въвеждането на високи, ясни, точни и обективни критерии, заместването на формалното преподаване и оценяване с насоченост към функционални знания би могло да повиши качеството на работа и на студентите, и на преподавателите .

В обучението по математика в икономическите висши училища задачите преди всичко трябва да са с икономическа насоченост, да активизират мисълта на студента и тя да се развива и усъвършенства. Материалът, ако бъде поднесен така, че в процеса на придобиване на нови знания студентът да се възхищава от хармонията на нещата, да вижда приложение на задачите, които решава, то тогава той би могъл да оцени смисъла и значението на това, което му се поднася като информация. Учебникът който е предложен на студентите в ИУ– Варна съдържа цял раздел „Финансова математика”, която, е изключително важна и полезна за развитието на един бъдещ икономист, но тази математика изобщо не се преподава, а едва ли някой ще оспори колко е важна финансовата грамотност за хората, които възнамеряват да се занимават професионално с икономика. Да, тези неща до известна степен се учат в средното училище и се предполага, че се знаят, но реалността е болезнено красноречива по отношение на нивото знания, с които постъпват в университета средношколците. Включването в съдържанието на обучение на интересен, обвързан пряко с икономиката материал е важно, по този начин студентите ще разберат защо знанията по математика са им необходими и приложими в практиката. Често срещано явление е студентите да губят интерес към дадена дисциплина, понеже не се преподава по подходящ начин, вследствие на което материалът се превръща в напълно неразбираем, и съответно не осъзнават, че ще им е нужен в реалния живот и в професионалната реализация, а това е негатив, който трудно се преодолява. Ситуацията би могла да се промени чрез засилената роля на студентите в учебния процес,

включването им в различни проекти, тук ще припомня думите на Конфуций: *„Кажи ми и ще забравя, покажи ми и ще запомня, включи ме и ще разбера”*, всички знаем, че когато усещаме равнопоставеността и отвореността, с която някой ни приема, много по-добре усвояваме нови умения, имаме желание да учим и да се развиваме.

За цялата европейска образователна система е характерна посоката към облекчаване на всичко свързано с учебния процес. Акцентът е, това, което се учи, да може да се приложи в реалността. Конкретно за математиката, имайки предвид че сме икономически университет, е важно информацията която се поднася да е адаптирана към икономиката. В наши дни всеки може да намери каквото го интересува за изключително кратко време, но умението да систематизираш, да отсяваш важните неща, да мислиш критично и аналитично се придобива бавно и изисква усилия. От опита, който имам в изучаването на икономика, колкото и скромен да е той, мога да твърдя, че без знанията, които добих по математика бих се чувствала напълно изгубена. Дори, според мен, красотата на икономиката се крие именно в това, че използва изключително математическия апарат. Всеки модел, всяка теория, която освен с думи се обясни и математически, става много по-разбираема. Понякога дори неща, които интуитивно изглеждат, че имат едно решение, след като се запишат математически - излиза съвсем друго. Отделен е въпросът, че всяка сериозна разработка по икономика (в това число маркетинг, мениджмънт, финанси и др.) е със сериозна научна стойност, ако се основава на икономико-математическа формализация и не е възможно да бъде разбрана от целевата група, към която е насочена, ако липсва задълбочена математическа подготовка. В реалния живот и в работата на икономиста математиката дава изключително добро критично и аналитично мислене. Да, за някои по-елементарни работи свързани с икономиката не е необходимо много дълбоко познание, но до голяма степен, всички дейности на микро и макро ниво са обвързани с математиката. Един бъдещ икономист,

ако е способен и математически ориентиран, винаги може да прозре и селектира коя математика му е нужна в работата, без да се разфокусира и да се занимава с теоремата на Hamilton Cayley, примерно (въпреки че нейното доказателство е важна стъпка в доказването на други теореми). Математически грамотните икономисти са хората които имат по-широкия и научно-приложен поглед върху случващото се. Според Лобачевски „*Математиката - това е езикът, на който говорят всички точни науки*“, а без този език един учен (в това число и икономист) е просто неграмотен. С теоретична математика ще продължат се занимават малцина (research математиката се спонсорира в повечето случаи в съвсем отделни направления, ако говорим съвсем прагматично) и е прекрасно че ще има такива, които ще продължат да я развиват, но е добре, ръководното начало то в преподаването ѝ в университета да бъде приложната ѝ част, без да се акцентира върху ученето на абстракции.

Какво може да се подобри е въпрос, който изисква известна деликатност. Човек, който търси диалог и в същото време предлага готов отговор, рискува да проведе монолог, а в образователния лабиринт, в който се намираме, монологът е провал, а диалогът е спасителна нишка. За да имаме високи резултати и да тръгне образованието в правилната посока, на студентите трябва да се предоставя възможност да посочват проблемите, те да бъдат активната страна, да предлагат за обсъждане варианти за решение, също така и да участват в реализирането на тези решения. Идеята е не да зачеркнем и отхвърлим всичко действащо в момента, а да го допишем и развием заедно. Когато с взаимни усилия се изгражда дадено нещо, то най-добре личи от съвместните участия в образователни инициативи и проекти, в конференции и семинари, и това е същността, която прави университетите такива, каквито са били замислени и заради което са просъществували през вековете.

Следващите няколко предложения имат за цел да представят една различна гледна точка и да покажат реалността „от другата страна“. Написани са с ясното съзнание, че са поредната „патерица“,

на сега действащата тежко болна образователна система, не са радикални (работещи съвременни модели има достатъчно по света и те могат да се видят, и при добро желание да се адаптират към нашата действителност), не предлагат решения, а само идеи върху които да се помисли.

Възможността една задача да се реши по няколко начина носи по-голяма полза, отколкото решаването на множество еднотипни такива. Откриването на различни начини за решаване дава възможност на студентите да дадат воля на творческото си мислене, възпитава гъвкавост на мисълта и формирането на потребност от нови знания. Такива задачи са полезни не заради самото си многообразие, а показват, че можем по повече от един начин да постигнем това, което искаме. Изборът е изцяло наш. Моделът може да бъде следния: първо да се минат няколко задължителни стъпки в изучаването на материала, а след това през серия от избори - това ще са добавени стойности.

Във времето на повсеместна глобализация, когато границите са размити (не човешките, а тези между държавите, межкултурните и в нашия случай – между дисциплините), защо не опитаме да хармонизираме дигиталните технологии, изкуствата, науките за човека и математиката? С това ще покажем нагледно, че няма рамки, няма затворени пространства, че изучаваните дисциплини са свързани, че на пръв поглед нямащи общо помежду си неща, всъщност се допълват и по този начин създават една завършена цялост. Това няма да е модел на реалността, различен от този „навън“, и донякъде ще подготви студентите за независим живот, ще ги мотивира да бъдат активни, креативни и критично мислещи.

Курсовата работа, която традиционно се прави в края на всеки семестър, може да не бъде както досега - решаване по една задача от всеки вид, който сме изучавали, а да бъде обвързана с даден икономически казус. По този начин ще се види приложението на изучавания материал в икономиката. Рефератите и есето също са идеи, които по мое мнение, първоначално ще предизвикат противоречиви

реакции, дори насмешка, но в действителност, без креативност, ще продължават да съществуват само повторението и рутината. Темите, върху които ще се работи, могат да бъдат всякакви, математиката е безгранична и приложима навсякъде - същността ѝ е в нейната свобода.

Всеки преподавател, изолиран и съсредоточен само в своята дисциплина, ограничава възможностите си да вдъхнови и мотивира студентите да изучават дадения материал. Да направим още една стъпка напред - интердисциплинарност, защо не? Ако учебните програми по различните предмети са добре съгласувани помежду си, материалът и основните елементи от темите са свързани подходящо, преподавателите ще могат да осигуряват възможност за връзка между курсови работи по различните предмети и обединяването им в цялостен проект. Някои ще приемат това като експеримент, в който ще се впуснат смело, някои със съмнение, а за други промяната е необходимост. Това е още един начин студентите да видят, че знанието действително не се ограничава само в една област или дисциплина, това са рамки за улеснение и са доста условни, и все по-ентузиазирани ще прегърнат идеята да надникнат и в други области на познанието.

Човек трябва да е адекватен на времето, в което живее, и за да бъде такъв, трябва да има смелостта да гледа на случващото се с отворени очи⁴. Доскоро, когато глобализацията не беше превзела целия свят, промените са били насочени най-вече към съдържанието на учебните програми и към методиката на преподаване, но в един момент това вече се оказва крайно недостатъчно, необходими са качествени промени, не само в програмите и реализирането им, а преди всичко в целите на системата. Важно е методите на обучение и организацията на учебния процес да бъдат структурирани така, че

⁴ Тези, които нямат достатъчно смелост, винаги ще намират философия, с която да се оправдаят”. Албер Камю

да създадат потребност у студентите сами да се образуват, да развиват своя творчески потенциал, да търсят и сами да намират решения, както и да използват този потенциал по възможно най-добрия начин. Все по-осезаема ще става нуждата от иновативни средства, от други умения, от изцяло нова концепция за напълно дигиталния и различен свят, към който сме поели. Поставянето на нова цел пред образованието, изискваща формирането на друга интелигентност, в основата на която стои креативното мислене и действия, е посочена и в „Стратегията за развитие на висшето образование в Република България за периода 2014-2020 : *„Създаване на модерна и ефективна система на висшето образование, в центъра на която е човекът с неговите личностни качества и интелектуален потенциал”*”.

Именно от свободно, отворено, обърнато към човека образование имаме нужда, от такова, което да разкрие уникалното и неповторимото у всеки човек и едва тогава ще можем да очакваме като краен резултат формирането на мислещи, инициативни и креативни личности, способни да управляват собствения си живот и да бъдат полезни за обществото.

Литература

1. „В търсенето на нова концепция за висшето образование” проф. д-р Манол Рибов, Международно висше бизнес училище, Ботевград
2. Европейска комисия, стратегия „Креативна Европа”, <http://ec.europa.eu/programmes/creative-europe/>
3. Европейска комисия, стратегия „Европа 2020“ http://ec.europa.eu/europe2020/index_bg.htm
4. Зелена книга за отключване потенциала на креативните и творчески индустрии <http://www.parliament.bg/bg/eudocs/ID/11864>
5. Институт по математика и информатика, <http://math.bas.bg>
6. Математика за всеки, <http://math-bg.com>

7. Министерство на образованието и науката, <http://mon.bg>
8. Народно събрание на Република България, документи на европейски комисии,
<http://www.parliament.bg/bg/eudocs/ID/11864>
9. Портал „Култура“, <http://kultura.bg>
10. Христов, Владислав (2013) : „Фи”, издателство “Ерго”
11. Provo Magazine, <http://provo.bg>
12. The Fibonacci Project, <http://fibonacci-project.eu>
13. Florida, R. (2002): The Rise of the Creative Class. And How It's Transforming Work

PARAMETER IDENTIFICATION IN ADVECTION-DIFFUSION MODELS

Roumen Anguelov^{1,2}

¹*Department of Mathematics and Applied Mathematics
University of Pretoria, Pretoria, South Africa*

²*Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy
of Sciences*

We consider the parameter identification problem associated with models represented by a system of advection-diffusion equations on a domain $[0, +\infty) \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, of the form

$$\frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = d_1 \Delta a(t, x) + \lambda(x)(\hat{a} - a(t, x)) - \mu a(t, x)$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = d_2 \Delta u(t, x) + \nabla \cdot (\chi(a) \nabla a(t, x) u(t, x)) - f(x) u(t, x)$$

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = f(x) u(t, x)$$

In this model a is the density of an attractant for a population with density u . The attractant is released at small number of spots in Ω . The release function λ is of the form

$$\lambda(x) = \sum_{m=1}^M \Lambda(\|x - y^{(m)}\|)$$

where Λ is a decreasing and smooth on $[0, +\infty)$ such that $\Lambda'(0) = 0$ and $\Lambda(z) = 0$ for $z > r$ for some $r > 0$. Assuming that the domain is sufficiently large so that immigration and emigration through the boundary can be ignored and that the attractant at the boundary has a

negligible concentration we consider the system of PDEs with Dirichlet boundary condition for a and v and Neumann boundary condition for u . The initial conditions are

$$a(0, x) = 0, u(0, x) = u^{(0)}, v(0, x) = 0, x \in \Omega.$$

This model originated as model of short term insect dynamics at the presence of traps with the main aim of providing a reliable protocol for estimating the population density. However, the model has meaningful interpretations in other areas. For example, it can be considered as model of consumer behaviour on promotional release of a new good. In this case it can be used for estimating market demand and the time-sensitivity of the market response.

As mentioned, the parameter of main interest is usually the initial state of u , that is $u^{(0)}$. However, it often has to be estimated jointly with other unknown parameters, e.g. d_1 and d_2 . Denote by p the vector of parameters to be estimated with some feasible domain P . Denote further by $W(p)$ the solution vector for given value of p , that is

$$W(p)(t, x) = (a(t, x), u(t, x), v(t, x))^T, x \in \Omega, t \geq 0.$$

Typically the observables are $\int_{\|x-y^{(m)}\| \leq r} v(t, x) dx$ at some prescribed times $t_1, \dots, t_k$. Hence we define the observation operator as

$$G(W) = \left(\int_{\|x-y^{(1)}\| \leq r} v(t_1, x) dx, \int_{\|x-y^{(1)}\| \leq r} v(t_2, x) dx, \dots, \int_{\|x-y^{(M)}\| \leq r} v(t_k, x) dx \right)$$

Let Φ be an actual observed value of G . Then the problem is

Find $\hat{p} \in P$ which minimizes $F(p) = \|G(W(p)) - \Phi\|$.

Let $\hat{F} = F(\hat{p})$ be the minimal value of F . Our aim is to characterise the quality of a parameter identification by using a measure of robustness of the form

$$D(\varepsilon) = \text{diam}\{p \in P : F(p) \leq \hat{F} + \varepsilon\}, \varepsilon > 0.$$

CONTACT RELATIONS AND COMPACT T0-EXTENSIONS

Prof. Dr. Habil. Georgi D. Dimov

“St. Kl. Ohridski” University of Sofia

Coauthor: Prof. Dr. Habil. Dimitar Vakarelov

In his celebrated Compactification Theorem, Ju. M. Smirnov [1] proved that there exists an isomorphism between the ordered set of all Efremovic proximities on a Tychonoff space X and all, up to equivalence, compact Hausdorff extensions of X . The notion of a contact relation on a Boolean algebra is a generalization of the notion of a proximity. We will present several Smirnov-type theorems in which we will show that there exist isomorphisms between the ordered set of different kinds of contact relations on a complete Boolean algebra and some classes of compact T0-extensions of its Stone space.

References

[1] J. M. Smirnov, On proximity spaces, Mat. Sb. 31 (1952), 543--574.

(1) This talk was supported by the project no. 7/2015 “Contact algebras and extensions of topological spaces” of the Sofia University “St. Kl. Ohridski”.

ON A NEW LOWER-VIETORIS-TYPE TOPOLOGY IN HYPERSPACES

Assist. Prof. Dr. Elza Ivanova-Dimova
“St. Kl. Ohridski” University of Sofia

In 1975, M. M. Choban [1] introduced a new topology on the set of all closed subsets of a topological space for obtaining a generalization of the famous Kolmogoroff Theorem on operations on sets. This new topology is similar to the upper Vietoris topology but is weaker than it. In 1998, G. Dimov and D. Vakarelov [3] used a generalized version of this new topology for proving an isomorphism theorem for the category of all Tarski consequence systems. In this talk we will introduce a new lower-Vietoris-type topology in a way similar to that with which the new upper-Vietoris-type topology was introduced in [3]. We will study this new topology and, in particular, we will generalize some results of [2].

References

- [1] M. M. Choban, Operations over sets, *Sibirsk. Mat. Zh.* 16 (1975), no. 6, 1332-1351.
- [2] E. Cuchillo-Ibáñez, M. A. Moron and F. R. Ruiz del Portal, Lower semifinite topology in hyperspaces, *Topology Proc.* 17 (1992), 29-39.
- [3] G. Dimov and D. Vakarelov, On Scott consequence systems, *Fundamenta Informaticae* 33 (1998), 43-70.

(1) This talk was supported by the project no. 7/2015 “Contact algebras and extensions of topological spaces” of the Sofia University “St. Kl. Ohridski”.

**МАТЕМАТИКАТА
КАТО ФУНДАМЕНТАЛНА И ПРИЛОЖНА НАУКА**

**Сборник с доклади
от международна научно-практическа конференция**

Дадена за печат IX.2015 г. Излязла от печат X.2015 г.

Печатни коли 27,5 Издателски коли 22

Формат 60x90/16 Тираж 100

Предпечатна подготовка Екатерина Йорданова

Издателство „Наука и икономика”

Икономически университет – Варна

ул. „Евлоги Георгиев” 24

Печатна база на ИУ – Варна

ISBN 978-954-21-0860-3

