ИКОНОМИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА

КАТЕДРА „СТАТИСТИКА И ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА“

МЛАДЕЖКА ИНИЦИАТИВА

"ОЛИМПИАДА ПО ФИНАНСОВА МАТЕМАТИКА ЗА СТУДЕНТИ"

Условия и решения на задачите от състезателната тема

ноември 2022 г.

Младежката инициатива "Олимпиада по финансова математика" се осъществява от катедра "Статистика и приложна математика" при Икономически университет – Варна.

Екип за организация и изпълнение на инициативата:

1. проф. д-р Росен Николаев – ръководител на инициативата
2. проф. д-р Танка Милкова
3. доц. д-р Теодора Запрянова
4. доц. д-р Йордан Петков
5. доц. д-р Велина Йорданова
6. гл. ас. д-р Димитрия Карадимова
7. гл. ас. д-р Светлана Тодорова
8. гл. ас. д-р Славея Желязкова

Комисия за проверка на задачите и класиране на участниците:

1. проф. д-р Росен Николаев – председател
2. проф. д-р Танка Милкова
3. доц. д-р Йордан Петков

СЪСТЕЗАТЕЛНА ТЕМА

За верен отговор на всяка задача с номер от 1 до 5 се присъждат 3 точки, на задача 6 трябва да се даде само отговор и ако той е верен, се оценява с 5 точки, а задача 7 е с подробно описание на решението и се оценява от 0 до 10 точки. Разрешено е ползването само на калкулатори.

Време за работа: 120 мин. Пожелаваме Ви успех!

Задача 1: Сумата от цените на четири стоки A, B, C и D е 1040 лв. Цената на стоката A е 70% от цената на стоката B. Цената на стоката C е $\frac{4}{3}$ от цената на стоката A и цената на стоката D е с 50 лв. по-малка от цената на стоката B. Цената на стоката C е:

A) 210 лв.; B) 250 лв.; C) 280 лв.; D) 300 лв.; E) 320 лв.

Задача 2: На 5-ти март цената на 1 кг. сирене е 8 лв., а на 1 л. олио е 2 лв. На 5-ти април цената на 1 кг. сирене е намаляла с 25% спрямо цената на 5-ти март, а цената на 1 л. олио се е увеличила с 50% спрямо цената на 5-ти март. С колко процента разликата между цените на сиренето и олиото на 5-ти март е по-висока от разликата между цените на сиренето и олиото на 5-ти април?

A) 25%; B) 50%; C) 75%; D) 100%; E) друг отговор.

Задача 3: Общият месечен доход на едно домакинство за м. февруари, 2022 г. е 2500 лв. От тази сума 30% са разходите за ток, вода и телефон, 40% са разходите за храна, 500 лв. са разходите за дрехи и други. Останалата сума се спестява. През м. октомври, 2022 г. месечният доход на домакинството се е увеличил с 10% спрямо този през м. февруари. Храната е поскъпнала с 20% спрямо м. февруари, разходите за ток, вода и телефон са се увеличили с 30% спрямо м. февруари, разходите за дрехи и други са се увеличили с 15% спрямо м. февруари. Каква сума е останала за спестяване на това домакинство през м. октомври, 2022 г.?

A) 200 лв.; B) 150 лв.; C) 50 лв.; D) 0 лв.; E) друг отговор.

Задача 4: Предприемач има възможност да инвестира в един от два възможни проекта. В първия може да инвестира 80000 лв. и след 2 год. ще получи 87000 лв. Във втория може да инвестира 50000 лв., като след една година ще получи 40000 лв. и след още една година ще получи 13000 лв. Разликата по абсолютна стойност между процентите на вътрешните норми на възвръщаемост в двата проекта е в интервала:

A) $[0;\ 0,2)$; B) $[0,2;\ 0,4)$; C) $[0,4;\ 0,6)$; D) $[2;\ 4)$; E) $[4;\ 6]$.

Задача 5: Сума от 2000 лв. е поставена на безсрочен влог при просто олихвяване и лихвен процент 0,36%. След три месеца са изтеглени 200 лв. и след още четири месеца са внесени 500 лв. по сметката. След края на шестия месец от откриването на влога лихвеният процент е променен на 0,48%. След изтичане на една година от откриването на влога е извършено олихвяване и е изтеглена цялата налична сума, заедно с лихвите. Какъв е нейният размер?

A) 2300 лв.; B) 2312,2 лв.; C) 2308,74; D) 2208 лв.; E) 2408,74 лв.

Задача 6: При формиране на нетното трудово възнаграждение върху брутното трудово възнаграждение се удържат осигуровки и данък общ доход (ДОД) и така се получава чистата сума. Ако брутното възнаграждение е 3200 лв., 10% е ДОД и 17% са осигуровките, и приемем, че не се удържат осигуровки върху данъка и не се удържа данък върху осигуровките, то колко е чистата сума за получаване след удържане на ДОД и осигуровките?

Задача 7: Цената на един нов автомобил е 50000лв. При заплащане на лизинг условията са следните:

1) 20% от цената се заплаща веднага при сключване на договора.
2) 20% от цената се заплаща след 36 месеца от закупуването на автомобила.
3) 20% от цената се заплаща след 60 месеца от закупуването на автомобила.
4) Останалата сума, заедно с всички дължими лихви за всеки месец, се заплащат на 60 равни вноски в края на всеки месец след сключване на договора в продължение на 5 години.

Ако месечният сложно лихвен процент по лизинга е 0,21%, то да се намери размерът на постоянната вноска в цяло число лева.

Обяснения към темата

1. p% от K е $\frac{p}{100}.K$.
2. Проста лихва за n периода върху сума K, при p% лихвен процент за един период е $L = K.\frac{p}{100}.n$.
3. Сума K за n периода, при p% лихвен процент за един период, нараства на $K_n = K\left(1+\frac{p}{100}n\right)$ - при просто олихвяване,

   $K_n = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ - при сложно олихвяване.
4. Брутно трудово възнаграждение = нетно (чисто) трудово възнаграждение + ДОД + осигуровки.

5. Ако стойността на една инвестиция е P_0, а FV_1, FV_2, ..., FV_n са суми в бъдещ паричен поток, то неизвестното $r*$, което се получава от уравнението $\sum_{i=1}^{n} \frac{FV_i}{(1+r*)^i} = P_0$, се нарича вътрешна норма на възвръщаемост, а $p = 100.r*$ е вътрешната норма на възвръщаемост, изразена в проценти.
6. Ако сума K е дължима след n периода при сложно олихвяване с p% за един период, то сегашната ѝ стойност е $\frac{K}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$, т.е. бъдещата сума се дисконтира.
7. Ако $a_1, a_2, ..., a_n$ са членове на геометрична прогресия с частно q, то сумата от членовете е $S = a_1.\frac{q^n - 1}{q - 1}$.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6
C	D	D	C	C	2431,74 лв.

Задача 1: Отг. C)

Решение:

Нека цената на стоката B е $P_B = x$. Тогава $P_A = 0,7x$, $P_C = \frac{4}{3}.0,7x$, $P_D = x - 50$.

Следователно $x + 0,7x + \frac{4}{3}.0,7.x + x - 50 = 1040 \Rightarrow x\left(1 + \frac{7}{10} + \frac{4}{3}.\frac{7}{10} + 1\right) = 1090$

$\Rightarrow x(60 + 21 + 28) = 1090.30 \Rightarrow x = 30.1090 : 109 = 300$ лв.

Окончателно $P_C = \frac{4}{3}.0,7.300 = 280$ лв.

Задача 2: Отг. D)

Решение:

На 5-ти март разликата в цените е 8–2=6 лв. На 5-ти април цената на 1 кг. сирене е 8.0,75=6 лв., а на 1 л. олио е 2.1,5=3 лв., т.е. разликата в цените е 6–3=3 лв. Следователно:

$\frac{6-3}{3}.100 = 100\%$.

Задача 3: Отг. D)

Решение:

Разходи	**Февруари – доход 2500 лв.**	**Октомври – доход 2500.1,1=2750 лв.**
Ток, вода, телефон	0,3.2500=750 лв.	1,3.750=975 лв.
Храна	0,4.2500=1000 лв.	1,2.1000=1200 лв.
Дрехи и други разходи	500 лв.	1,15.500=575 лв.
Спестявания:	2500–(750+1000+500)=250лв.	2750–(975+1200+575)=0 лв.

Задача 4: Отг. С)

Решение:

Нека p_1 и p_2 са процентите на възвръщаемост на двата проекта. Следователно, от обясненията към темата в точка 5:

$\frac{87}{\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^2}=80$ (1) и $\frac{40}{1+\frac{p_2}{100}}+\frac{13}{\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^2}=50$ (2).

Полагаме $q_1=\frac{1}{1+\frac{p_1}{100}}$ и $q_2=\frac{1}{1+\frac{p_2}{100}}$.

Тогава, от (1) следва $q_1^2=\frac{80}{87} \Rightarrow q_1=\sqrt{\frac{80}{87}} \Rightarrow 1+\frac{p_1}{100}=\sqrt{\frac{87}{80}} \Rightarrow p_1=\left(\sqrt{\frac{87}{80}}-1\right).100\approx 4,28\%$.

От (2) следва $13q_2^2+40q_2-50=0 \Rightarrow q_2=\frac{-20+\sqrt{400+650}}{13}=\frac{\sqrt{1050}-20}{13}$, т.е.

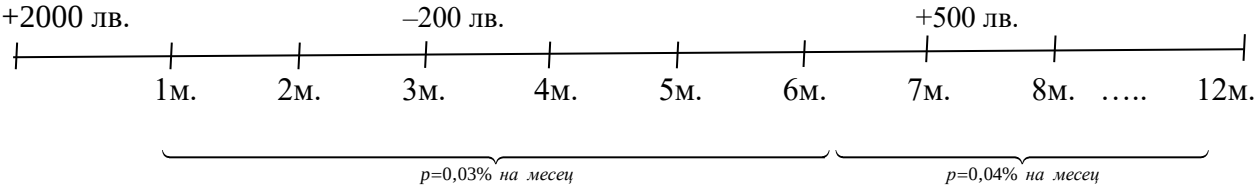
$\frac{1}{1+\frac{p_2}{100}}=\frac{\sqrt{1050}-20}{13}$,

$1=\frac{\sqrt{1050}-20}{13}+\frac{p_2}{100}.\frac{\sqrt{1050}-20}{13} \Rightarrow p_2=\left(1-\frac{\sqrt{1050}-20}{13}\right).100.\frac{13}{\sqrt{1050}-20}\approx 4,81\%$.

Тогава, $4,81\%-4,28\%=0,53\%$, $0,53\in[0,4;\ 0,6)$.

Задача 5: Отг. С)

Решение:



Основната сума по сметката в края на 12-тия месец е: 2000–200+500=2300 лв.

Месечният лихвен процент до края на 6-тия месец е $p_1=\frac{0,36}{12}=0,03\%$, с от седмия месец до края на годината е $p_2=\frac{0,48}{12}=0,04\%$.

Тогава, лихвите са:

$L_3=2000.\frac{0,03}{100}.3=1,80$ лв.

$L_6 = 1800.\frac{0,03}{100}.3 = 1,62$ лв.

$L_7 = 1800.\frac{0,04}{100}.1 = 0,72$ лв.

$L_{12} = 2300.\frac{0,04}{100}.5 = 4,60$ лв.

Общият размер на лихвите е 1,80+1,62+0,72+4,60=8,74 лв.
Размерът на цялата изтеглена сума е 2300+8,74=2308,74 лв.

Задача 6: Отг. 2431,74 лв.

Решение:

Нека размерът на осигуровките е x, а на ДОД е y. Тогава:

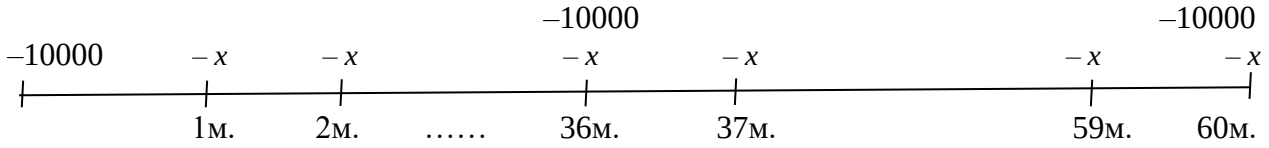
$$\begin{vmatrix} y = \frac{10}{100}(3200 - x) \\ x = \frac{17}{100}(3200 - y) \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y = 320 - 0,1x \\ x = 544 - 0,17y \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y = 320 - 54,4 + 0,017y \\ x = 544 - 0,17y \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0,983y = 265,6 \\ x = 544 - 0,17y \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y = 270,19лв. \\ x = 498,07лв. \end{vmatrix}$$

Тогава, чистата сума за получаване е: 3200–270,19–498,07=2431,74 лв.

Задача 7: Отг. 389 лв.

Решение:



Лихвеният процент на месец е 0,21% и нека $1 + \frac{0,21}{100} = 1,0021 = q$.

20% от 50000 лв. = 10000 лв., които се изплащат веднага при покупката на автомобила. Остават дължими 40000 лв.

Първи начин: Тогава $((40000q - x)q - x)q... - x - 10000)q - x)q... - x - 10000 = 0$, или, след разкриване на скобите:

$40000q^{60} - xq^{59} - xq^{58} - ... - xq - x - 10000q^{24} - 10000 = 0$ (*) $\Leftrightarrow$

$40000q^{60} - x(q^{59} + q^{58} + ... + 1) - 10000q^{24} - 10000 = 0$ и за сумата в скобите, като използваме формулата за сума от членовете на геометрична прогресия (точка 7 от обясненията към темата), получаваме:

$$40000q^{60} - x.\frac{q^{60}-1}{q-1} - 10000(q^{24}+1) = 0 \Leftrightarrow 10000(4q^{60} - q^{24} - 1) = x.\frac{q^{60}-1}{q-1} \Rightarrow$$

$x = \dfrac{10000(q-1)(4q^{60} - q^{24} - 1)}{q^{60}-1}$ и, като заместим q с 1,0021, се получава

$$x = \frac{10000.0,0021(4.1,0021^{60} - 1,0021^{24} - 1)}{1,0021^{60} - 1} = 389,04 \Rightarrow 389 \text{ лв.}$$

Втори начин: Като използваме точка 6 от обясненията към темата и приемем, че $x, x, x, ..., x+10000, x, x, ..., x+10000$ са бъдещите дължими суми, то, след като ги дисконтираме, сумираме и приравним към първоначалната сума от 40000 лв., получаваме:

$$\frac{x}{q} + \frac{x}{q^2} + ... + \frac{x+10000}{q^{36}} + \frac{x}{q^{37}} + ... + \frac{x}{q^{59}} + \frac{x+10000}{q^{60}} = 40000 .$$

След подвеждане под общ знаменател се получава уравнението (*), след което задачата се решава, както е показано при първия начин.